

УДК 539.3

**К ИССЛЕДОВАНИЮ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ**© 2021 г. А. О. Ватульян^{1,2,*}, Д. К. Плотников^{1,2,**}¹ Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия² Южный математический институт ВЦ РАН, Владикавказ, Россия

*e-mail: vatulyan@aaanet.ru

**e-mail: dustheap@mail.ru

Поступила в редакцию 03.02.2021 г.

После доработки 26.02.2021 г.

Принята к публикации 11.03.2021 г.

В плоской постановке исследована контактная задача для неоднородной упругой полосы и штампа с гладким основанием. С помощью преобразования Фурье построена система дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно трансформант компонент вектора смещений и тензора напряжений. На основе метода пристрелки построен символ ядра интегрального уравнения. Проведен асимптотический анализ символа ядра при малых и больших значениях параметра преобразования. Представлена вычислительная схема на основе метода граничных элементов построения решения интегрального уравнения контактной задачи с неизвестной областью контакта. Представлены результаты решения контактной задачи для разных законов неоднородности.

Ключевые слова: контактная задача, неоднородная полоса, асимптотический анализ, метод граничных элементов

DOI: 10.31857/S0032823521030103

1. Введение. Контактные задачи теории упругости для полосы – важный раздел смешанных задач, в который ростовские механики внесли значительный вклад. Отметим пионерскую работу [1], а также монографию [2], оказавшую значительное влияние на многих исследователей и дальнейшее развитие теории контактных задач. При этом в монографии представлены общие вопросы контактного взаимодействия, вопросы разрешимости краевых задач в различных классах функций, методы исследования интегральных уравнений для малых областей контакта (метод больших лямбда, развитый В.М. Александровым), и метод бесконечных систем (метод малых лямбда, развитый В.А. Бабешко [3, 4]). В дальнейшем ряд результатов в рамках метода больших лямбда был распространен на неоднородную полосу [5], в контактных задачах для которой основная трудность состоит в том, что символы ядер интегральных операторов невозможно построить в явном виде для произвольных законов неоднородности. Символ ядра строился в два этапа. На первом этапе решалась краевая задача для матричного дифференциального оператора с параметром (параметром преобразования Фурье); на втором этапе строилась аппроксимация полученной численно функциональной зависимости дробно-рациональными и степенными функциями. В работах [6, 7] данный подход расширен для многослойных структур с неоднородным покрытием.

В настоящее время в инженерную практику внедряется все большее количество составных конструкций, покрытий, конструктивных элементов, изготовленных из композиционных материалов. Моделирование таких объектов, обладающих существенно неоднородными свойствами, требует изучения деформирования неоднородных слоистых структур при статических и динамических воздействиях. Одним из наиболее популярных и быстро развивающихся направлений в конструировании неоднородных объектов является изготовление функционально-градиентных материалов (ФГМ). ФГМ представляет из себя среду, свойства которой изменяются по некоторому закону, исходя из некоторых требований, например, для снижения уровня напряженного состояния внутри конструктивного элемента [8].

Одной из наиболее перспективных областей применения ФГМ является изготовление градиентных покрытий различного назначения. Нанесение покрытий из ФГМ широко применяется при изготовлении различных элементов инженерных конструкций, режущего инструмента, медицинских приборов, в конструкциях компонентов двигателей авиационной и космической техники [9]. Переменный состав и изменение свойств с глубиной покрытия приводит к уменьшению концентрации напряжений, что в свою очередь позволяет снизить вероятность образования трещин и других дефектов.

Альтернативным способом исследования деформирования неоднородных оснований является построение приближенных моделей. В монографии [10] построен ряд приближенных моделей контактного взаимодействия для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Работы [11, 12] посвящены разработке моделей деформирования неоднородной упругой полосы в рамках использования некоторых гипотез о структуре полей, позволяющие рассматривать произвольные законы неоднородности, в том числе разрывные.

Большое число работ посвящено решению контактных задач для функционально-градиентных материалов на основе метода конечных элементов. Исследована [13] контактная задача для вязкоупругого основания и сферического индентора. Построено [14] решение задачи о контактном взаимодействии неоднородного слоя, лежащего на однородном полупространстве, и двух плоских штампов.

Рассмотрена [15] задача о контакте двух сфер, усиленных функционально-градиентными покрытиями. Задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Неоднородность материала смоделирована путем создания многослойной области с постоянными свойствами в каждом слое.

Большое количество работ для полосы выполнено в предположении о том, что законы неоднородности изменяются экспоненциальным образом, что приводит к краевым задачам с постоянными коэффициентами и символы ядер интегральных операторов могут быть получены аналитически. В [16] исследована контактная задача для поперечно-неоднородного ортотропного слоя и цилиндрического штампа. Коэффициенты матрицы жесткостей изменяются с толщиной по экспоненциальному закону.

Настоящая работа посвящена развитию методов исследования контактных задач для неоднородной упругой полосы, где для изучения символа ядра интегрального оператора использованы численные и асимптотические методы, позволяющие выявить основные свойства этих функций при малых и больших значениях аргумента. Разработан метод граничных элементов для решения интегрального уравнения контактной задачи, позволяющий исследовать задачи с переменной областью контакта, не прибегая к затратной схеме его решения в расширенной области. Построены важные зависимости сила–внедрение для различных законов неоднородности.

2. Постановка задачи. В рамках плоской задачи теории упругости рассмотрим контактное взаимодействие поперечно-неоднородной упругой полосы толщины h и штампа с основанием гладкой формы. Свяжем с полосой прямоугольную систему координат Ox_1x_3 с началом в основании полосы, ось Ox_3 направлена вертикально вверх

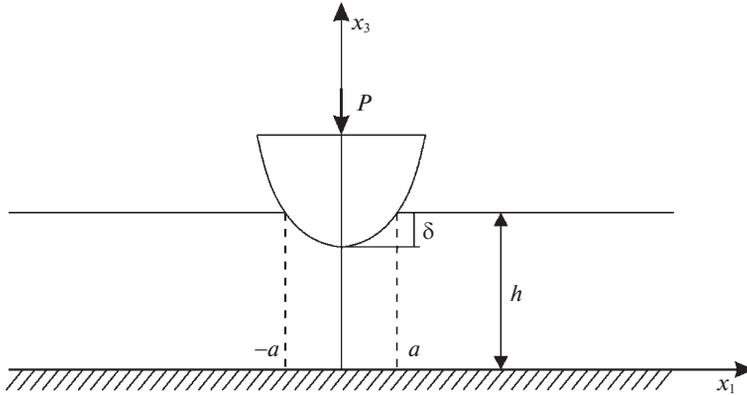


Рис. 1.

(рис. 1). Нижняя граница полосы $x_3 = 0$ жестко сцеплена с недеформируемым основанием. Область контакта полосы и штампа расположена на отрезке $|x_1| \leq a$. Параметры Ламе полосы являются произвольными положительными функциями вертикальной координаты, $\lambda = \lambda(x_3)$, $\mu = \mu(x_3)$, $x_3 \in [0, h]$.

Уравнения равновесия и определяющие соотношения задачи имеют вид

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} = 0, \quad \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} = 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda(x_3) + 2\mu(x_3))u_{1,1} + \lambda(x_3)u_{3,3}, & \sigma_{13} &= \mu(x_3)(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ \sigma_{33} &= \lambda(x_3)u_{1,1} + (\lambda(x_3) + 2\mu(x_3))u_{3,3}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где u_i , σ_{ij} – компоненты вектора перемещений и тензора напряжений соответственно.

Считая, что трение между контактными поверхностями штампа и полосы отсутствует, сформулируем граничные условия контактной задачи

$$u_1(x_1, 0) = 0, \quad u_3(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, h) = 0 \quad (2.3)$$

$$\sigma_{33}(x_1, h) = 0; \quad |x_1| > a, \quad u_3(x_1, h) = -\delta + f(x_1); \quad |x_1| \leq a, \quad (2.4)$$

где δ – глубина внедрения, a – величина области контакта, функция $f(x_1)$ описывает форму основания штампа.

Связь между внедрением штампа δ и величиной области контакта a определяется из условия равенства нулю контактных напряжений на границе контакта. Для определения силы, действующей на штамп, служит условие равновесия штампа

$$P = \int_{-a}^a q(x_1) dx_1, \quad q(x_1) = \sigma_{33}(x_1, h)$$

Обезразмерим задачу, введя безразмерные параметры следующим образом

$$\begin{aligned} \xi_i &= x_i/h, \quad \hat{u}_i = u_i/h, \quad \hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/\mu_0; \quad i, j = 1, 3 \\ \beta &= a/h, \quad \delta_* = \delta/h, \quad \gamma = f/h \\ f_1 &= \lambda/\mu_0, \quad f_2 = \mu/\mu_0, \quad \hat{q} = q/\mu_0, \quad \hat{P} = P/\mu_0 h, \end{aligned}$$

где μ_0 – характерное значение модуля сдвига (либо среднее значение функции, либо максимальное).

3. Равновесие неоднородной упругой полосы под действием нагрузки. Рассмотрим вспомогательную задачу о равновесии неоднородной упругой полосы под действием безразмерной нормальной нагрузки $\hat{q}(\xi_1)$, локализованной на отрезке $[-\beta, \beta]$ верхней границы. Граничные условия задачи в безразмерных параметрах имеют вид

$$\hat{u}_1(\xi_1, 0) = 0, \quad \hat{u}_3(\xi_1, 0) = 0 \quad (3.1)$$

$$\hat{\sigma}_{13}(\xi_1, 1) = 0, \quad \hat{\sigma}_{33}(\xi_1, 1) = q_*(\xi_1), \quad (3.2)$$

где

$$q_* = \begin{cases} \hat{q}(\xi_1), & |\xi_1| \leq \beta \\ 0, & |\xi_1| > \beta \end{cases}$$

В работе [17] система дифференциальных уравнений в частных производных (2.1), (2.2) с помощью преобразования Фурье по координате ξ_1 сведена к канонической системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно трансформант вида

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad X_1 = i\tilde{u}_1, \quad X_2 = \tilde{u}_3, \quad X_3 = i\tilde{\sigma}_{13}, \quad X_4 = \tilde{\sigma}_{33}, \quad (3.3)$$

где знаком “ \sim ” обозначены символы Фурье соответствующих функций, а матрица коэффициентов системы не содержит производных от законов неоднородности, в отличие от [5, 18], и имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \frac{1}{f_2} & 0 \\ \frac{\alpha f_1}{f_1 + 2f_2} & 0 & 0 & \frac{1}{f_1 + 2f_2} \\ \frac{4\alpha^2 f_2 (f_1 + f_2)}{f_1 + 2f_2} & 0 & 0 & -\frac{\alpha f_1}{f_1 + 2f_2} \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Граничные условия (3.1), (3.2) краевой задачи в трансформантах примут вид

$$X_1(\alpha, 0) = 0, \quad X_2(\alpha, 0) = 0, \quad X_3(\alpha, 1) = 0, \quad X_4(\alpha, 1) = Q(\alpha), \quad (3.4)$$

где

$$Q(\alpha) = \int_{-\beta}^{\beta} \hat{q}(\xi_1) e^{i\alpha \xi_1} d\xi_1$$

Решение краевой задачи (3.3), (3.4) построим численно с помощью метода пристрелки. Для этого сформулируем следующие вспомогательные задачи Коши

$$X_1^{(1)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_2^{(1)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_3^{(1)}(\alpha, 0) = 1, \quad X_4^{(1)}(\alpha, 0) = 0 \quad (3.5)$$

$$X_1^{(2)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_2^{(2)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_3^{(2)}(\alpha, 0) = 0, \quad X_4^{(2)}(\alpha, 0) = 1 \quad (3.6)$$

В силу линейной независимости решений вспомогательных задач, решение краевой задачи (3.3), (3.4) запишем в виде их линейной комбинации

$$X_j(\alpha, \xi_3) = c_1 X_j^{(1)}(\alpha, \xi_3) + c_2 X_j^{(2)}(\alpha, \xi_3); \quad j = \overline{1, 4}$$

Находя константы c_1, c_2 из условий (3.4) в точке $\xi_3 = 1$, получим решение краевой задачи (3.3), (3.4) в виде

$$\begin{aligned} X_j(\alpha, \xi_3) &= (X_3^{(2)}(\alpha, 1)X_j^{(1)}(\alpha, \xi_3) - X_3^{(1)}(\alpha, 1)X_j^{(2)}(\alpha, \xi_3))\Delta^{-1}(\alpha)Q(\alpha) \\ \Delta(\alpha) &= X_3^{(1)}(\alpha, 1)X_4^{(2)}(\alpha, 1) - X_3^{(2)}(\alpha, 1)X_4^{(1)}(\alpha, 1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Формула (3.7) позволяет установить связь трансформант нагрузки и вертикальной компоненты смещения верхней границы полосы в виде

$$X_2(\alpha, 1) = K(\alpha)Q(\alpha), \tag{3.8}$$

где $K(\alpha)$ – передаточная функция, определяемая через решения вспомогательных задач Коши формулой

$$K(\alpha) = (X_3^{(2)}(\alpha, 1)X_2^{(1)}(\alpha, 1) - X_3^{(1)}(\alpha, 1)X_2^{(2)}(\alpha, 1))\Delta^{-1}(\alpha)$$

4. Анализ передаточной функции. Передаточная функция $K(\alpha)$ является важным объектом при исследовании контактных задач для полосы. Важную роль согласно [2] играет асимптотическое поведение этих функций при малых и больших значениях параметра преобразования. Значения в нуле характеризуют среднее значение контактного давления, а поведение на бесконечности – структуру контактного давления у границ области контакта. Исследуем поведение $K(\alpha)$ и проведем асимптотический анализ при малых и больших значениях параметра α .

Меняя в системе (3.3) α на $-\alpha$, нетрудно показать, что функция $K(\alpha)$ для любых законов неоднородности является четной функцией, т.е. $K(-\alpha) = K(\alpha)$.

При проведении асимптотического анализа рассмотрим задачу (3.3), (3.4), для удобства полагая $Q(\alpha) \equiv 1$, что соответствует действию сосредоточенной силы в точке $\xi_1 = 0$ верхней границы полосы

$$X_1(\alpha, 0) = 0, \quad X_2(\alpha, 0) = 0, \quad X_3(\alpha, 1) = 0, \quad X_4(\alpha, 1) = 1 \tag{4.1}$$

Полагая параметр α малым, представим решение краевой задачи в виде регулярных асимптотических разложений

$$X_j(\alpha, \xi_3) = X_{j0}(\xi_3) + \alpha X_{j1}(\xi_3) + \alpha^2 X_{j2}(\xi_3) + \dots + \alpha^m X_{jm}(\xi_3) + \dots \tag{4.2}$$

Подставляя выражение (4.2) в систему (3.3) и приравнивая между собой коэффициенты при одинаковых степенях α , получим краевые задачи для систем дифференциальных уравнений первого порядка, анализ которых позволяет найти начальные коэффициенты разложений (4.2). На основе асимптотических представлений решения краевой задачи передаточная функция для малых значений параметра α с учетом четности может быть записана в виде

$$K(\alpha) = X_2(\alpha, 1) = X_{20}(1) + \alpha^2 X_{22}(1) + \dots + \alpha^m X_{2m}(1) + \dots,$$

где главный член разложения имеет вид

$$X_{20}(1) = \int_0^1 \frac{d\tau}{f_1(\tau) + 2f_2(\tau)},$$

а остальные находятся рекуррентным образом [15].

Рассмотрим теперь случай больших α и исследуем поведение передаточной функции при $\alpha \rightarrow \infty$, что приводит к анализу для системы с переменными коэффициентами краевой задачи с малым параметром при старшей производной. Используем для анализа асимптотический метод, например метод Вишика–Люстерника [19]. Отметим, что спектр матрицы коэффициентов системы (3.3) состоит из двух двукратных значений $|\alpha|$ и $-|\alpha|$, что приводит к существенному усложнению построения асимптотического решения в рамках известных подходов [20].

Будем искать решение задачи при больших α в окрестности $\xi_3 = 1$ при $\alpha > 0$ в виде

$$X_j(\alpha, \xi_3) = Y_j(\alpha, \xi_3)e^{\alpha(\xi_3-1)} \tag{4.3}$$

$$Y_j(\alpha, \xi_3) = Y_{k0}(\xi_3)\alpha + Y_{k1}(\xi_3) + Y_{k2}(\xi_3)\alpha^{-1} + o(\alpha^{-1})$$

Подставляя представление (4.3) в каноническую систему (3.3), решая возникающие краевые задачи и удовлетворяя граничным условиям (4.1), с учетом четности функции $K(\alpha)$ найдем главный член разложения передаточной функции при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в явном виде

$$K(\alpha) = C|\alpha|^{-1} + o(|\alpha|^{-1}), \quad C = \frac{f_1(1) + 2f_2(1)}{2f_2(1)(f_1(1) + f_2(1))} \quad (4.4)$$

Построенное асимптотическое представление согласуется с известными результатами для однородного случая [2], а также с качественными результатами, полученными для неоднородной полосы, например в [5].

5. Интегральное уравнение контактной задачи. Метод граничных элементов. Найдем вертикальное смещение верхней границы полосы, для этого построим обращение преобразования Фурье. Из формулы (3.8) найдем

$$\hat{u}_3(\xi_1, 1) = \int_{-\beta}^{\beta} k(\eta - \xi_1)q(\eta)d\eta,$$

причем ядро интегрального оператора имеет вид

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha)e^{i\alpha t} d\alpha$$

Учитывая условия (2.4), сформулируем интегральное уравнение контактной задачи в виде

$$\int_{-\beta}^{\beta} k(\eta - \xi_1)q(\eta)d\eta = -\delta_* + \gamma(\xi_1) \quad (5.1)$$

Поскольку основные свойства функции $K(\alpha)$ идентичны свойствам этой функции в однородном случае, можно показать, что ядро интегрального уравнения (5.1) имеет логарифмическую особенность и для его решения может быть использован метод больших лямбда [5] или численные методы.

Решение интегрального уравнения (5.1) построим численно с помощью метода граничных элементов. Учитывая симметрию задачи в случае, когда функция $\gamma(\xi_1)$, описывающая форму основания штампа, является четной, построим решение уравнения (5.1) в области $[0, \beta]$. Проведем дискретизацию уравнения (5.1), для этого разобьем отрезок $[0, \beta]$ на N элементов $\Delta_p = [\eta_p, \eta_{p+1}]$, $p = \overline{1, N}$, границы отрезков Δ_p определяются формулой $\eta_j = (j - 1)s$, $s = \beta N^{-1}$, $j = \overline{1, N + 1}$; в качестве точек коллокаций выберем середины отрезков Δ_p : $\xi_{1p} = (p - 0.5)s$. Будем считать, что функция $q(\xi_1)$ принимает постоянные значения на элементах и введем обозначение $q_p = q|_{\Delta_p}$. Считая, что уравнение (5.1) выполнено в наборе точек $\{\xi_{1p}\}$, составим алгебраическую систему относительно узловых значений неизвестной функции $q(\xi_1)$ вида

$$\sum_{p=1}^N q_p H_{pm} = g_m; \quad m = \overline{1, N}, \quad (5.2)$$

где

$$H_{pm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\alpha)}{i\alpha} (e^{i\alpha(\eta_{p+1} - \xi_{1m})} - e^{i\alpha(\eta_p - \xi_{1m})}) d\alpha, \quad g_m = -\delta_* + \gamma(\xi_{1m}) \quad (5.3)$$

При исследовании контактных задач для штампов с гладким основанием область контакта является неизвестной величиной, зависящей от глубины внедрения штампа, и подлежит определению. При реализации вычислительных схем решения интегральных уравнений в контактных задачах в качестве исходных параметров, как правило, задается значение внедрения или силы, действующей на штамп, а затем определяется величина области контакта, которая нелинейным образом зависит от задаваемых величин. В работе [21] исследована контактная задача для трехслойного сферического шарнира, решение интегрального уравнения построено с помощью метода коллокаций. Для определения величины области контакта по заданному значению внедрения построен итерационный процесс, в котором область контакта определяется из условия неотрицательности контактного давления. Схожий подход применен при решении пространственных контактных задач в работах [22, 23], в которых область контакта изначально полагается заведомо большей, чем действительная, а затем уточняется на каждом шаге итерационного процесса.

При реализации вычислительной схемы, построенной в настоящей работе, задается значение β , а величина внедрения определяется из условия равенства нулю контактного давления на границах контактной области, которое после дискретизации является условием равенства нулю узлового значения q_N искомой функции вблизи границы контакта и может быть записано в виде

$$\Delta_N = 0, \tag{5.4}$$

где Δ_N — определитель матрицы, получающейся согласно методу Крамера заменой N -го столбца матрицы H на вектор-столбец g . Отметим, что параметр δ_* входит в правые части интегральных уравнений линейно и уравнение (5.4) является линейным алгебраическим уравнением относительно δ_* , что позволяет просто найти связь $\delta_*(\beta)$.

При вычислении коэффициентов алгебраической системы (5.2) интегралы в (5.3) вычисляются с использованием асимптотического представления символа ядра на бесконечности. Интегрирование осуществляется по отрезку $[0, b]$ с помощью квадратурных формул Гаусса, а при вычислении оставшейся части интеграла на полуинтервале $[b, \infty)$ функция $K(\alpha)$ заменяется ее асимптотическим представлением (4.4). Значение параметра b определяется в вычислительном эксперименте.

6. Результаты вычислительных экспериментов. При проведении вычислительных экспериментов были выбраны следующие законы неоднородности полосы

1. возрастающие: $f_1^{(1)}(\xi_3) = 0.75 + 2.25\xi_3^2$, $f_2^{(1)}(\xi_3) = 0.6 + 1.2\xi_3^2$;
2. убывающие: $f_1^{(2)}(\xi_3) = 2.4 - 1.8\xi_3$, $f_2^{(2)}(\xi_3) = 1.5 - \xi_3$;
3. немонотонные: $f_1^{(3)}(\xi_3) = 1.5 - 0.9 \cos(2\pi\xi_3)$, $f_2^{(3)}(\xi_3) = 1 - 0.5 \cos(2\pi\xi_3)$;
4. кусочно-линейные:

$$f_1^{(4)} = \begin{cases} 0.8380 + 0.9311\xi_3, & 0 \leq \xi_3 < 0.9 \\ -2.6815 + 6.7039\xi_3, & 0.9 \leq \xi_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$f_2^{(4)} = \begin{cases} 0.7111 + 0.3950\xi_3, & 0 \leq \xi_3 < 0.9 \\ -5.5999 + 7.9999\xi_3, & 0.9 \leq \xi_3 \leq 1 \end{cases}$$

причем средние значения законов неоднородности на отрезке $[0, 1]$ равны

$$\int_0^1 f_1^{(j)}(\xi_3) d\xi_3 = 1.5, \quad \int_0^1 f_2^{(j)}(\xi_3) d\xi_3 = 1; \quad j = \overline{1, 4}$$

Графики законов неоднородности $1-4$ представлены на рис. 2.

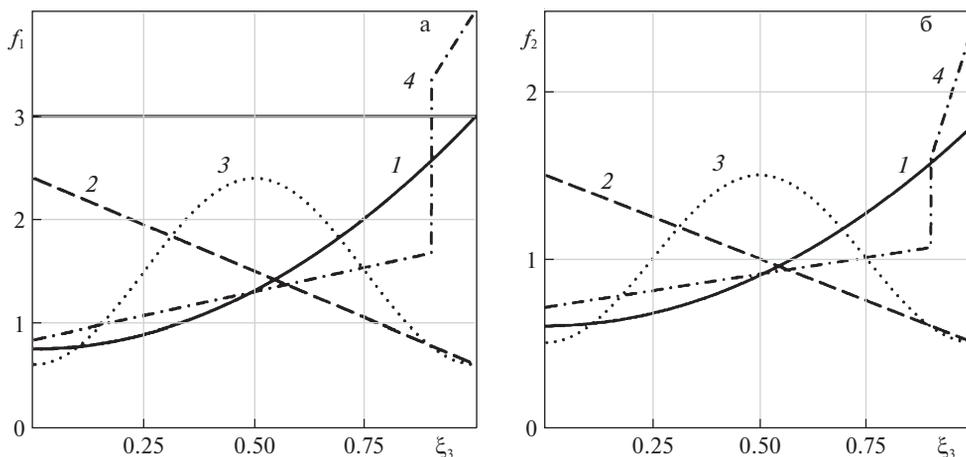


Рис. 2. Законы неоднородности 1–4.

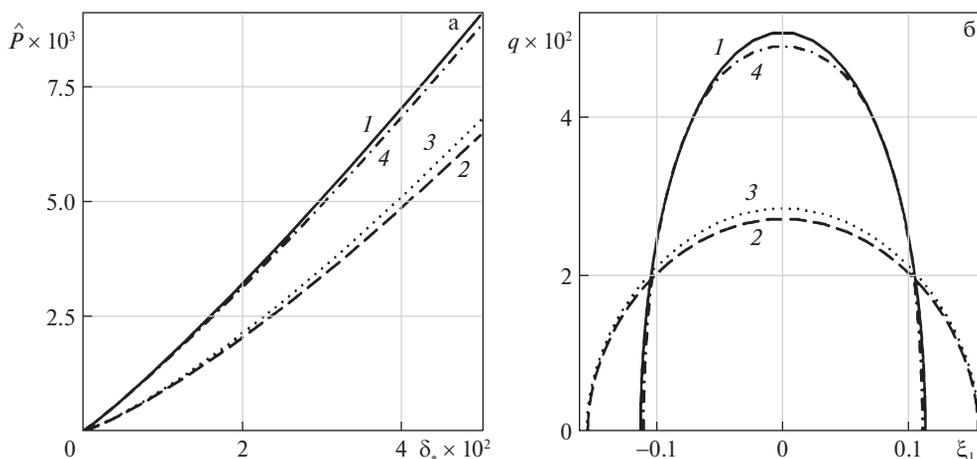


Рис. 3. Решения контактной задачи для законов 1–4. а) зависимость сила–внедрение, б) распределение контактного давления.

С целью проверки сходимости вычислительной схемы решения задачи построены для различного количества граничных элементов на равномерной сетке при $N = 10, 30, 90$. Проведено сравнение значений искомого контактного давления в общих для разных разбиений точках коллокации. Проведенный анализ показал сходимость вычислительной схемы при увеличении количества отрезков разбиения. Более эффективным является построение неравномерной сетки граничных элементов со сгущением вблизи границ области контакта. Ниже представлены результаты вычислительных экспериментов, построенные для штампа с основанием параболической формы $\gamma(\xi_1) = \xi_1^2/2r$ при значениях параметров: $r = 5, N = 30, l_N/l_1 = 0.01, l_p$ – длина отрезка Δ_p .

На рис. 3 представлены решения контактных задач для законов неоднородности 1–4. Распределение контактного давления для разных законов построено при одинаковом

значении внедрения $\delta_* = 0.005$. Контактное давление достигает наибольшей величины для законов, значение которых на верхней границе полосы больше. Результаты решения контактной задачи получились близкими для законов с близкими значениями модулей упругости на верхней границе.

Заключение. Исследована задача о контактном взаимодействии без трения неоднородной упругой полосы и штампа с гладким основанием. Проведен асимптотический анализ символа ядра интегрального уравнения контактной задачи при малых и больших значениях параметра преобразования. Главные члены асимптотик найдены в аналитическом виде. Показано, что значение символа ядра в нуле, характеризующее среднее значение контактного давления, определяется среднеинтегральным значением податливости полосы, а поведение на бесконечности, определяющее структуру контактного давления у границ области контакта, определяется значениями упругих модулей на верхней границе полосы. На основе метода граничных элементов построено решение интегрального уравнения контактной задачи. Представлен подход, позволяющий исследовать задачи с переменной областью контакта, не прибегая к затратной схеме ее определения в расширенной области. Построены зависимости сила–внедрение и распределение контактного давления для различных законов неоднородности.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ № 075-15-2019-1928.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И., Устинов Ю.А.* О давлении штампа на слой конечной толщины // ПММ. 1959. Т. 23. № 3. С. 445–455.
2. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. *Бабешко В.А.* Асимптотические свойства решений одного класса интегральных уравнений, возникающих в теории упругости и математической физике // Докл. АН СССР. 1969. Т. 186. № 6. С. 1273–1276.
4. *Александров В.М., Бабешко В.А.* Контактные задачи для упругой полосы малой толщины // Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 2. С. 95–107.
5. *Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконов А.В. и др.* Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 240 с.
6. *Волков С.С., Васильев А.С., Айзикович С.М. и др.* Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора // Вестн. ПНИПУ. Механика. 2016. № 4. С. 20–34.
7. *Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovitch S.M.* Approximated analytical solution of contact problem on indentation of elastic half-space with coating reinforced with inhomogeneous interlayer // Mater. Phys.&Mech. 2018. V. 35. № 1. P. 175–180.
8. *Naebe M., Shirvanimoghaddam K.* Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // Appl. Mater. Today. 2016. V. 5. P. 223–245.
9. *Mahmood R.M., Akinlabi E.T.* Functionally Graded Materials. Springer Int. Publ., 2017. 103 p.
10. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
11. *Ватульян А.О., Плотников Д.К.* Об одной модели индентирования функционально-градиентной полосы // Докл. РАН. 2019. Т. 485. № 5. С. 564–567.
12. *Ватульян А.О., Плотников Д.К., Поддубный А.А.* О некоторых моделях индентирования функционально-градиентных покрытий // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18. Вып. 4. С. 421–432.
13. *Wagiha A., Attiaab M.A., AbdelRahman A.A. et al.* On the indentation of elastoplastic functionally graded materials // Mech. Mater. 2019. V. 129. P. 169–188.
14. *Polat A., Kaya Y., Bendine K., Özşahin T.Ş.* Frictionless contact problem for a functionally graded layer loaded through two rigid punches using finite element method // J. Mech. V. 35. № 5. P. 591–600.

15. *Chen X.W., Yue Z.Q.* Contact mechanics of two elastic spheres reinforced by functionally graded materials (FGM) thin coatings // *Engng. Analysis with Boundary Elements*. V. 109. P. 57–69.
16. *Çömez İ.* Contact mechanics of the functionally graded monoclinic layer // *Europ. J. Mech. A/Solids*. V. 83. Art. no. 104018.
17. *Vatulyan A.O., Morozova J.A., Plotnikov D.K.* Deformation of inhomogeneous elastic strip // in: *Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials / Ed. by Altenbach H. et al.* 2021. V. 141. P. 461–474.
18. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
19. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // *УМН*. 1957. Т. 12. № 5 (77). С. 3–122.
20. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977. 354 с.
21. *Чебаков М.И., Абрамович М.В., Колосова Е.М.* Контактная задача для трехслойного сферического шарнира // *Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки*. 2015. № 3. С. 60–64.
22. *Горячева И.Г., Степанов Ф.И., Торская Е.В.* Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству // *ПММ*. 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 853–863.
23. *Степанов Ф.И., Торская Е.В.* Пространственная контактная задача для двухслойного упругого полупространства при наличии адгезии // *ПММ*. 2020. Т. 84. № 2. С. 256–268.

Investigation of the Contact Problem for an Inhomogeneous Elastic Strip

A. O. Vatulyan^{a,b,#} and D. K. Plotnikov^{a,b,##}

^a Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

^b Southern Mathematical Institute of VSC RAS, Vladikavkaz, Russia

[#]e-mail: vatulyan@aaanet.ru

^{##}e-mail: dustheap@mail.ru

The plane contact problem for an inhomogeneous elastic strip and a stamp with a smooth base is investigated. Using the Fourier transform, a system of differential equations with variable coefficients for the transformants of the components of the displacement vector and the stress tensor is constructed. On the basis of the shooting method, the symbol of the kernel of the integral equation is constructed. An asymptotic analysis of the kernel symbol for small and large values of the transformation parameter is carried out. A computational scheme based on the boundary element method for constructing a solution to the integral equation of a contact problem with an unknown contact area is presented. The results of solving the contact problem for different laws of inhomogeneity are presented.

Keywords: contact problem, inhomogeneous strip, asymptotic analysis, boundary element method

REFERENCES

1. *Vorovich I.I., Ustinov Iu.A.* Pressure of a die on an elastic layer of finite thickness // *JAMM*, 1959, vol. 23, no. 3, pp. 445–455.
2. *Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A.* Non-Classical Mixed Problems of Elasticity Theory. Moscow: Nauka, 1974. 456 p.
3. *Babeshko V.A.* Asymptotic properties of the solutions of some integral equations // *Dokl. AN SSSR*, 1969, vol. 187, no 3. pp. 728–731.
4. *Aleksandrov V.M., Babeshko V.A.* Contact problems for an elastic strip of small thickness // *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh.*, 1965, no. 2, pp. 95–107. (in Russian)
5. *Ayzikovich S.M., Aleksandrov V.M., Belokon A.V. et al.* Contact Problems of the Theory of Elasticity for Inhomogeneous Media. (Kontaktnye zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnykh sred). Moscow: Fizmatlit, 2006. 240 p. (in Russian)

6. Volkov S.S., Vasil'yev A.S., Ayzikovich S.M. et al. Stress-strain state of an elastic soft functionally-graded coating subjected to indentation by a spherical punch // PNRPU Mech. Bull., 2016, no. 4, pp. 20–34. (in Russian).
7. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Ayzikovich S.M. Approximated analytical solution of contact problem on indentation of elastic half-space with coating reinforced with inhomogeneous interlayer // Mater. Phys.&Mech., 2018, vol. 35, no 1, pp. 175–180.
8. Naebe M., Shirvanimoghaddam K. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties // Appl. Mater. Today, 2016, vol. 5, pp. 223–245.
9. Mahamood R.M., Akinlabi E.T. Functionally Graded Materials. Springer Int. Publ., 2017. 103 p.
10. Aleksandrov V.M., Mkhitaryan S.M. Contact Problems for Bodies with Thin Coatings and Interlayers (Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiyami i prosloykami). Moscow: Nauka, 1983. 488 p. (in Russian)
11. Vatulyan A.O., Plotnikov D.K. A Model of indentation for a functionally graded strip // Dokl. Phys., 2019, vol. 64, no. 4, pp. 173–175.
12. Vatulyan A.O., Plotnikov D.K., Poddubny A.A. On some models of indentation for functionally graded coatings // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2018, vol. 18, no. 4, pp. 421–432. (in Russian)
13. Wagiha A., Attiaab M.A., AbdelRahman A.A. et al. On the indentation of elastoplastic functionally graded materials // Mech. Mater., 2019, vol. 129, pp. 169–188.
14. Polat A., Kaya Y., Bendine K., Özşahin T.Ş. Frictionless contact problem for a functionally graded layer loaded through two rigid punches using finite element method // J. Mech., vol. 35, no. 5, pp. 591–600.
15. Chen X.W., Yue Z.Q. Contact mechanics of two elastic spheres reinforced by functionally graded materials (FGM) thin coatings // Engng. Analysis with Boundary Elements, vol. 109, pp. 57–69.
16. Çömez İ. Contact mechanics of the functionally graded monoclinic layer // Europ. J. Mech. A/Solids, vol. 83, Art. no. 104018.
17. Vatulyan A.O., Morozova J.A., Plotnikov D.K. Deformation of inhomogeneous elastic strip // in: Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials / Ed. by Altenbach H. et al. 2021, Vol. 141, pp. 461–474.
18. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F. Dynamics of Inhomogeneous Linear Elastic Media. (Dinamika neodnorodnih lineyno-uprugih sred) Moscow: Nauka, 1989. 344 p. (in Russian)
19. Vishik M.I., Ljusternik L.A. Regular degeneracy and boundary layer for linear differential equations with a small parameter // UMN, 1957, vol. 12, no. 5(77), pp. 3–122. (in Russian)
20. Fedorjuk M.V. Asymptotic Methods for Linear Ordinary Differential Equations. (Asimptoticheskie metody dlja linejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij) Moscow: Nauka, 1977. 354 p. (in Russian)
21. Chebakov M.I., Abramovich M.V., Kolosova E.M. Contact problem for a three-layer spherical hinge // Bull. Higher Educ. Inst. North Caucasus Region, 2015, no. 3, pp. 60–64. (in Russian)
22. Goryacheva I.G., Stepanov F.I., Torskaya E.V. Sliding of a smooth indenter over a viscoelastic half-space when there is friction // JAMM, 2015, vol. 79, no. 6, pp. 596–603.
23. Stepanov F.I., Torskaya E.V. 3D contact problem with adhesion for two-layered elastic half-space // PMM, 2020, vol. 84, no. 2, pp. 256–268. (in Russian)