

УДК 539.3:517.968.2

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ФИКТИВНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ© 2021 г. А. В. Павлова^{1,*}, С. Е. Рубцов^{1,**}, И. С. Телятников^{2,***}¹ ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Краснодар, Россия² ФГБУН ФИЦ Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия

*e-mail: pavlova@math.kubsu.ru

**e-mail: rub_serg@mail.ru

***e-mail: ilux_t@list.ru

Поступила в редакцию 03.02.2021 г.

После доработки 27.03.2021 г.

Принята к публикации 29.03.2021 г.

В работе описана модификация метода фиктивного поглощения в части выбора базисных функций, а также схема реализации метода для случая, когда штамп или дефект имеют невыпуклую область в плане. В отличие от обычно применяемой схемы, для вводимой вспомогательной составляющей решения использованы производные δ -функций Дирака с граничным множеством области контакта в качестве носителя. Применение нового вида вспомогательных функций продемонстрировано на примере интегральных уравнений осесимметричных задач о колебаниях штампа и трещины в упругой среде. Выбор более сложного вида базисных функций приводит к более простой форме решения.

Ключевые слова: интегральное уравнение, метод фиктивного поглощения, осциллирующее ядро, область сложной конфигурации, осесимметричная задача

DOI: 10.31857/S0032823521030097

1. Введение. Аппарат интегральных уравнений (ИУ) занимает важное место в решении смешанных задач механики деформируемого твердого тела, в том числе задач контактного взаимодействия. В [1, 2] проведено сравнение применяемых подходов и представлены результаты анализа применимости различных методов ИУ статических и динамических задач.

Задачи без начальных условий для установившихся колебаний объектов на поверхности упругой среды, возникающие при исследовании взаимодействия источника с деформируемым основанием, сводятся к решению ИУ или систем интегральных уравнений (СИУ) с осциллирующими ядрами. В.А. Бабешко был предложен эффективный метод решения ИУ и СИУ с разностными ядрами I-го рода, названный методом фиктивного поглощения (МФП) [3]. Дальнейшее развитие этот метод получил в работах В.А. Бабешко и О.Д. Пряхиной [4–8] применительно к решению интегральных уравнений и СИУ для различных постановок смешанных задач и моделей сред, обладающих сложными свойствами, в том числе анизотропией. Примеры успешного применения МФП в задачах термо- и электроупругости при учете связности полей продемонстрированы в работах [9, 10]. В [9] в схему МФП включены прямые численные методы, позволяющие использовать точное представление символа ядра ИУ динамической задачи, не прибегая к его аппроксимации легко факторизуемыми функциями. Для невыпуклых односвязных областей МФП был применен в [11].

Идея МФП [3] заключается в преобразовании уравнения, имеющего осциллирующее ядро, к ИУ с быстро убывающим на бесконечности ядром. Подобное поведение свойственно ИУ задач для сред с большой вязкостью. МФП позволяет уверенно решать ИУ динамических задач, используя в качестве вспомогательных статические задачи или задачи для сред с затуханием. Для решения последних можно применять многочисленные методы, в частности, изложенные в [12].

МФП создан В.А. Бабешко на рубеже 70–80-х годов прошлого столетия и, к сожалению, нечасто используется в настоящее время. Цель статьи – вновь привлечь внимание к этому методу решения ИУ с осциллирующими ядрами. В работе описана модификация МФП в части выбора базисных функций, а также схема реализации метода для случая, когда штамп или дефект имеют невыпуклую область в плане. В отличие от представленной в [4–9] традиционно применяемой схемы, для вводимой вспомогательной составляющей решения использованы производные δ -функций Дирака, в качестве носителя которых выбрано множество граничной области контакта.

2. МФП в односвязной области произвольной конфигурации. Пусть в плоскости изменения типа граничных условий (контакта штампа со средой или расположения внутреннего дефекта) введена декартова система координат x_1Ox_2 . Запишем ИУ рассматриваемой задачи в форме

$$\mathcal{H}q \equiv \iint_{\Omega} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1, x_2); \quad (x_1, x_2) \in \Omega \quad (2.1)$$

Решение (2.1) будем искать в классе суммируемых функций $q(x_1, x_2) \in L_b(\Omega)$, $b > 1$ [7]. Будем рассматривать ситуацию, когда конечная область интегрирования Ω представляется объединением M ($1 < M < \infty$) выпуклых областей $\Omega = \bigcup_{m=1}^M D_m$, где области разбиения D_m ($\partial D_m = S_m$) могут иметь общие участки границ. ИУ (2.1) можно записать в виде системы

$$\sum_{m=1}^M \mathcal{H}_m q_m = f_s(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in D_s; \quad s = \overline{1, M} \quad (2.2)$$

$$\mathcal{H}_m q_m = \iint_{D_m} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q_m(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (x_1, x_2) \in D_m \quad (2.3)$$

$$k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$f_s = P_{|D_s|} f(x_1, x_2)$, где $P_{|D_s|}$ – проекционный оператор на область D_s , положение Γ_1, Γ_2 в комплексной плоскости определено принципом предельного поглощения [7, 8].

Свойства символа ядра интегрального уравнения (2.1) K определяются выбранной моделью упругой среды и подробно описаны в [7, 8]. Здесь принимается, что $K(\alpha_1, \alpha_2) \equiv K(\alpha)$ ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \alpha^2$), $K(\alpha) = K(-\alpha)$, $K(\alpha) = C|\alpha|^{-1}[1 + O(\alpha^{-1})]$, $|\alpha| \rightarrow \infty$. Мероморфная функция K может иметь конечное число вещественных полюсов p_k и нулей z_k ($k = \overline{1, N}$), увеличивающееся с ростом частоты колебаний, и счетное множество комплексных p_k, z_k ($k = \overline{N+1, \infty}$) [7, 8, 14].

В дальнейшем, кроме введенной системы координат x_1Ox_2 , будем использовать локальные декартовы системы координат $x_1^m O_m x_2^m$, $O_m(a_m, b_m) \in D_m$, выбрав оси параллельными осям x_1Ox_2 .

Для системы штампов в ряде случаев единственность решения СИУ [13] не достигается, то же самое имеет место в задачах для установившихся колебаний структур с множественными неоднородностями. Далее для простоты полагается, что ИУ

$$\int_0^{2\pi} f_{ks}(\psi) \exp(ip_k R_s(\psi) \cos(\psi - \gamma)) d\psi = b_{ks}(\gamma), \quad 0 \leq \gamma \leq 2\pi, \quad (2.4)$$

где $R_m = R_m(\psi)$ – уравнения границ S_m в локальных координатах, $\forall k = \overline{1, N}$, $s = \overline{1, M}$, $b_{ks} \in C(0, 2\pi)$ имеют единственное решение [7].

Представим решение (2.1) $q(x_1, x_2) \in L_b(\Omega)$, $b > 1$, в форме

$$q(x_1, x_2) = p(x_1, x_2) + \varphi(x_1, x_2) \quad (2.5)$$

Возьмем φ в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2) &= \sum_{s=1}^M \varphi_s(x_1, x_2) \\ \varphi_s(x_1, x_2) &\equiv \sum_{k=1}^N \varphi(x_1 - a_s, x_2 - b_s, G_k, R_s, f_{ks}) = \\ &= \sum_{k=1}^N G_k(-\Delta) \int_0^{2\pi} \delta[x_1 - a_s - R_s(\psi) \cos \psi] \delta[x_2 - b_s - R_s(\psi) \sin \psi] g_{ks}(\psi) d\psi \quad (2.6) \\ G_k(\alpha^2) &= (\alpha^2 - p_1^2) \dots (\alpha^2 - p_{k-1}^2) (\alpha^2 - p_{k+1}^2) \dots (\alpha^2 - p_N^2), \end{aligned}$$

где g_{ks} – неизвестные однозначные функции, $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$. Выбор базисных функций для φ может быть различным [7], в данной работе представлен МФП для $\varphi(x_1, x_2)$ вида (2.6). Если все полюсы p_k функции K простые, то $\varphi(x_1, x_2)$ и $p(x_1, x_2)$ должны обладать свойствами

$$\begin{aligned} V_2\varphi(x_1, x_2) &= V_2q(x_1, x_2), \quad V_2\varphi_s(x_1, x_2) = V_2q(x_1, x_2, D_s) \\ \alpha^2 &= p_k^2; \quad k = \overline{1, N} \\ V_2p(x_1, x_2) &= 0, \quad \alpha^2 = p_k^2; \quad k = \overline{1, N} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь и далее через $V_2g(x_1, x_2)$ обозначено двумерное изображение Фурье функции $g(x_1, x_2)$. Условия для случая кратных полюсов сформулированы в [7]. Далее будем считать, что функция $K(\alpha)$ не имеет кратных нулей z_k и полюсов p_k ($z_k, p_k \in \mathbb{R}$). Тогда для нее справедливо представление $K(\alpha) = K_0(\alpha)\Pi(\alpha)$, где $K_0(\alpha)$ имеет то же асимптотическое поведение при $|\alpha| \rightarrow \infty$, что и $K(\alpha)$, и является регулярной на вещественной оси. Функция $\Pi(\alpha)$ имеет на вещественной оси конечное число нулей и полюсов, совпадающих с нулями и полюсами $K(\alpha)$.

Функция $\Pi(\alpha)$ приближается рациональной функцией с заданной точностью [14]. Для простоты введем функцию $\Pi(\alpha, N) = E_N(\alpha^2)Q_N^{-1}(\alpha^2)$, где $E_N(\alpha^2) = \prod_{k=1}^N (\alpha^2 - z_k^2)$, $Q_N(\alpha^2) \equiv \prod_{k=1}^N (\alpha^2 - p_k^2)$, p_k и z_k – полюсы и нули $K(\alpha)$ соответственно, $p_k, z_k \in \mathbb{R}$, $\Pi(\alpha, N) = 1 + O(\alpha^{-1})$, $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Тогда функция $K_0(\alpha) = K(\alpha)\Pi^{-1}(\alpha, N)$ будет обладать свойствами, характерными для символа ядра ИУ статической задачи. Далее будем использовать представление

$$K(\alpha) = K_0(\alpha)\Pi(\alpha, N) \quad (2.8)$$

Из (2.1), принимая во внимание (2.8), в операторном виде можно записать соотношение для новой неизвестной $t(x_1, x_2) = V_2^{-1}\Pi(\alpha, N)V_2p(x_1, x_2)$, где V_2^{-1} – оператор обратного двумерного преобразования Фурье,

$$\mathcal{H}_0 t = f(x_1, x_2) - \mathcal{H}_0 V_2^{-1}\Pi(\alpha, N)V_2\varphi,$$

где \mathcal{H}_0 – интегральный оператор с символом ядра $K_0(\alpha)$,

$$\mathcal{H}_0 t = f(x_1, x_2) - \mathcal{H}_0\varphi - S\varphi$$

$$S\varphi = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} \iint_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K_0(\alpha) [\Pi(\alpha, N) - 1] \times \\ \times \exp(-i(\alpha_1(x_1 - \xi_1) + \alpha_2(x_2 - \xi_2))) d\alpha_1 d\alpha_2 \varphi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

Существуют различные техники построения обратного оператора \mathcal{H}_0^{-1} в зависимости от свойств функции $K_0(\alpha)$, обзор их можно найти, в том числе, в [1]. Положим, что \mathcal{H}_0^{-1} известен, тогда

$$t = \mathcal{H}_0^{-1} f(x_1, x_2) - \varphi - \mathcal{H}_0^{-1} S\varphi \tag{2.9}$$

и решение (2.1) в операторном виде запишется как

$$q = p + \varphi = V_2^{-1}\Pi^{-1}V_2 t + \varphi = V_2^{-1}\Pi^{-1}V_2[\mathcal{H}_0^{-1} f - \varphi - \mathcal{H}_0^{-1} S\varphi] + \varphi = \\ = \mathcal{H}_0^{-1} f - \mathcal{H}_0^{-1} S\varphi + V_2^{-1}[\Pi^{-1} - 1]V_2[\mathcal{H}_0^{-1} f - \varphi - \mathcal{H}_0^{-1} S\varphi] \tag{2.10}$$

Чтобы $p(x_1, x_2) \in L_b(\Omega)$ имела носитель в Ω , требуется выполнение условий [7]

$$V_2[\mathcal{H}_0^{-1} f - \varphi - \mathcal{H}_0^{-1} S\varphi] = 0, \quad \alpha^2 = z_k^2; \quad k = \overline{1, N} \tag{2.11}$$

Выделим у функции $V_2^{-1}\Pi(\alpha, N)V_2\varphi$, в общем случае имеющей в качестве носителя всю плоскость, обобщенную составляющую φ_0 с носителем в Ω . Тогда $\varphi_2 = V_2^{-1}\Pi(\alpha, N)V_2\varphi - \varphi_0$ будет классической функцией, имеющей носитель во всей плоскости. С этой целью в соотношении

$$V_2^{-1}\Pi(\alpha, N)V_2\varphi = V_2^{-1}\Pi(\alpha, N) \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^M G_k(\alpha^2) \exp(i(a_s\alpha_1 + b_s\alpha_2)) \times \\ \times \int_0^{2\pi} g_{ks}(\psi) \exp(i\alpha R(\psi) \cos(\psi - \gamma)) d\psi$$

из рациональных функций выделим полиномиальные составляющие

$$\Pi(\alpha, N)G_k(\alpha^2) = P_k(\alpha^2) + R_k(\alpha^2) \\ P_k(\alpha^2) = [E_N(\alpha^2) - E_N(p_k^2)](\alpha^2 - p_k^2)^{-1} \approx \alpha^{2N-2} \\ R_k(\alpha^2) = E_N(p_k^2)(\alpha^2 - p_k^2)^{-1} \approx \alpha^{-2}; \quad \alpha \rightarrow \infty$$

Будем иметь

$$\varphi_2 = V_2^{-1} \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^M R_k(\alpha^2) \exp(i(a_s\alpha_1 + b_s\alpha_2)) \int_0^{2\pi} g_{ks}(\psi) \exp(i\alpha R(\psi) \cos(\psi - \gamma)) d\psi$$

Из (2.9)

$$t = \mathcal{H}_0^{-1} f(x_1, x_2) - \varphi_0(x_1, x_2) - \mathcal{H}_0^{-1} P_{[\Omega]} \mathcal{H}_0 \varphi_2 \tag{2.12}$$

В (2.12) использован проектор на Ω , так как носитель φ_2 – вся плоскость. Из (2.10)

$$p(x_1, x_2) = V_2^{-1} \Pi^{-1}(\alpha, N) V_2 [\mathcal{H}_0^{-1}(f(x_1, x_2) - P_{[\Omega]} \mathcal{H}_0 \varphi_2) - \varphi_0(x_1, x_2)]$$

Условия (2.11) переписываются в форме

$$V_2 P_{[\Omega]} [\mathcal{H}_0^{-1}(f(x_1, x_2) - P_{[\Omega]} \mathcal{H}_0 \varphi_2) - \varphi_0] = 0, \quad \alpha^2 = z_n^2; \quad n = \overline{1, N},$$

которую, в свою очередь, можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N P_k(z_n) \int_0^{2\pi} g_{ks}(\psi) \exp(iz_n R(\psi) \cos(\psi - \gamma)) d\psi = \\ & = \exp(-i(a_s \alpha_1 + b_s \alpha_2)) V_2 P_{[D_s]} \mathcal{H}_0^{-1} [f(x_1, x_2) - P_{[\Omega]} \mathcal{H}_0 \varphi_2] \\ & \quad \alpha^2 = z_n^2; \quad n = \overline{1, N}, \quad s = \overline{1, M} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для (2.4) полагалась разрешимость левой части полученной системы относительно $g_{ks}(\psi)$. В правой части (2.13) неизвестные $g_{ks}(\psi)$ содержатся в φ_2 . Обратив левую часть, приходим к системе ИУ II-го рода относительно введенных в (2.6) функций $g_{ks}(\psi)$, которая, в свою очередь, может быть решена с помощью дискретизации.

С учетом вышесказанного для решения (2.1) справедливо представление

$$q(x_1, x_2) = V_2^{-1} \Pi^{-1}(\alpha, N) V_2 [\varphi_2 + \mathcal{H}_0^{-1}(f(x_1, x_2) - P_{[\Omega]} \mathcal{H}_0 \varphi_2)], \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= V_2^{-1} \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^M E_N(p_k^2) (\alpha^2 - p_k^2)^{-1} \bar{g}_{ks}(\alpha) \exp(i(a_s \alpha_1 + b_s \alpha_2)) \\ \bar{g}_{ks}(\alpha) &= \int_0^{2\pi} g_{ks}(\psi) \exp(i\alpha R(\psi) \cos(\psi - \gamma)) d\psi \end{aligned}$$

Можно проделать дальнейшие упрощения (2.14), представив φ_2 в виде $\varphi_2(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^M \varphi_{2s}^+ + \varphi_2^-$, где $\varphi_{2s}^+ = P_{[D_s]} \varphi_2^+$. Обозначив $q_s(x_1, x_2) \equiv q(x_1, x_2, D_s)$, $(x_1, x_2) \in D_s$, получим решение (2.2)

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, D_s) &= V_2^{-1} \Pi^{-1}(\alpha, N) F(\alpha_1, \alpha_2, D_s) \\ F(\alpha_1, \alpha_2, D_s) &= V_2 P_{[D_s]} \mathcal{H}_0^{-1} [f - P_{[\Omega]} \mathcal{H}_0 \varphi_2^-] + V_2 \varphi_{2s}^- \end{aligned}$$

Неизвестные g_{ks} при этом определяются из системы, аналогично [7]

$$F(\alpha_1, \alpha_2, D_s) = 0, \quad \alpha^2 = z_n^2; \quad n = \overline{1, N}$$

Из полученных представлений решения видно, что введенная в виде (2.6) функция φ присутствует лишь под знаками интегральных операторов.

3. МФП в осесимметричных задачах

3.1. Решение ИУ осесимметричной задачи с убывающим символом ядра. Рассмотрим интегральное уравнение пространственной задачи об установившихся колебаниях (с частотой ω) круглого штампа на поверхности однородного упругого слоя толщины h с заземленной нижней гранью в отсутствии трения в области контакта штампа со средой при заданных вертикальных смещениях его подошвы. В декартовой системе координат плоскость $x_1 O x_2$ совмещена с поверхностью слоя, ось $O x_3$ направлена вверх по нормали. В случае осевой симметрии в цилиндрических координатах ИУ принимает вид

$$\int_0^a k(r, \tau) q(\tau) \tau d\tau = f(r), \quad 0 \leq r \leq a \tag{3.1}$$

$$k(r, \tau) = \int_{\Gamma_0} K(\alpha) J_n(\alpha r) J_n(\alpha \tau) \alpha d\alpha, \tag{3.2}$$

где a – радиус штампа, $J_n(r)$ – функция Бесселя I рода порядка n , Γ_0 – часть контура Γ (2.3), расположенная в полуплоскости $x_1 > 0$. Неизвестная функция $q(r)$ описывает напряжения в области контакта штампа со средой, функция $f(r)$ – перемещения подошвы штампа. Вид символа ядра, соответствующий элементу матрицы-функции Грина $K(\alpha) \equiv K_{33}(\alpha, 0)$ упругого слоя, жестко сцепленного с недеформируемым основанием, приведен в [2, 7, 8]. Там же описаны свойства элементов матрицы Грина, зависящих от упругих характеристик, плотности среды и толщины слоя.

Рассмотрим в качестве вспомогательного для решения (3.1) уравнение с правой частью в виде функции Бесселя I рода вида

$$\int_0^a k(r, \tau) q(\tau) \tau d\tau = J_n(\eta r), \quad 0 \leq r \leq a, \quad \text{Im } \eta = 0, \quad \eta > 0 \tag{3.3}$$

с ядром (3.2). Для произвольной правой части следует разложить $f(r)$ в ряд по функциям Бесселя или представить ее в виде интеграла Фурье–Бесселя.

Имеется много примеров применения МФП в осесимметричных задачах [5–8]. Но везде в качестве функции φ используется линейная комбинация δ -функций Дирака с непересекающимися носителями вида

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^N C_k \delta(r - r_k), \quad 0 < r_k < a$$

Вместе с тем, справедлива лемма, позволяющая выбрать другой вид функции φ .

Лемма [7]: Пусть функция $q(r) \in L_b(0, a)$ ($b > 1$). Существует единственная функция $\varphi(r)$ вида

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^N C_k N_{m_k} G_k(L_n) \delta(r - a), \quad L_n = -\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} \right),$$

такая, что имеют место равенства $Q(p_k) = \Phi(p_k)$; $k = \overline{1, N}$, где

$$Q(\alpha) = V_{B_n} q(x), \quad \Phi(\alpha) = V_{B_n} \varphi(x), \quad N_m f = r^{-n} \left(\frac{d}{r dr} \right)^m r^{n+m} f(r)$$

Здесь V_{B_n} – оператор интегрального преобразования Ханкеля (Бесселя–Фурье), m_k выбирается таким образом, что $J_n(ap_k) \neq 0$. Далее рассматривается $m_k = 0$.

Функцию $K(\alpha)$ символа ядра представим в виде (2.8). Как, например в [7], выберем в качестве $K_0(\alpha)$ функцию $K_0(\alpha) = (\alpha^2 + B^2)^{-1/2}$, где B – заданный параметр аппроксимации. Рациональная функция $\Pi(\alpha, N) = \prod_{k=1}^N (\alpha^2 - z_k^2)(\alpha^2 - p_k^2)^{-1}$ описана в предыдущем разделе. Здесь p_k – полюса, лежащие выше контура Γ_0 .

В соответствии с (2.5) представим решение (3.3) в виде

$$q(r) = p(r) + \varphi(r); \quad 0 \leq r \leq a$$

В качестве $\varphi(r)$ возьмем

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^N G_k(L_N) C_k \delta(r-a), \quad (3.4)$$

где, как и ранее, $G_k(\alpha^2) = (\alpha^2 - p_1^2) \dots (\alpha^2 - p_{k-1}^2)(\alpha^2 - p_{k+1}^2) \dots (\alpha^2 - p_N^2)$, а C_k — неизвестные константы, определяемые в дальнейшем.

В соответствии с (2.7)

$$Q(p_k) = \Phi(p_k); \quad k = \overline{1, N}, \quad Q(\alpha) \equiv V_{B_n} q = \int_0^a q(r) J_n(\alpha r) r dr$$

$$\Phi(\alpha) \equiv V_{B_n} \varphi = \int_0^a \varphi(r) J_n(\alpha r) r dr = \sum_{k=1}^N G_k(\alpha^2) C_k a J_n(\alpha a)$$

Введем новую неизвестную $t(r)$, для которой, используя представление (2.8), приходим к ИУ с регулярным убывающим ядром

$$\int_0^a k_0(r, \tau) t(\tau) \tau d\tau = J_n(\eta r) - \sum_{k=1}^N \int_0^a k(r, \tau) C_k G_k(L_N) \delta(\tau-a) \tau d\tau \quad (3.5)$$

$$k_0(r, \tau) = \int_0^\infty K_0(\alpha) J_n(\alpha r) J_n(\alpha \tau) \alpha d\alpha$$

Решение ИУ (3.3) запишется в виде

$$q(r) = t_\eta(r) + \int_{\Gamma_0} (\Pi^{-1}(\alpha, N) - 1) T_\eta(\alpha) \alpha J_n(\alpha r) d\alpha -$$

$$- \int_{\Gamma_0} \Pi^{-1}(\alpha, N) \sum_{k=1}^N a C_k [L_k(\alpha) - R_k(\alpha^2) J_n(\alpha a)] J_n(\alpha r) \alpha d\alpha$$

$$L_k(\alpha) = \int_{\Gamma_0} K_0(\eta) R_k(\eta^2) T_\eta(\alpha) \eta J_n(\eta a) d\eta$$

Система для определения (2.13) примет вид

$$\sum_{k=1}^N P_k(\alpha^2) C_k a J_n(\alpha a) + \mathcal{V} \mathcal{K}_0^{-1} \mathcal{P}_{[0,a]} \mathcal{K}_0 \Phi_2 = T(\alpha), \quad \alpha = z_k; \quad k = \overline{1, N},$$

где z_k — нули функции $\Pi(\alpha, N)$, лежащие выше контура Γ_0 .

Оценка точности построения решения ИУ для среды с поглощением определяется значением параметра B , порядок отбрасываемых при деформации контура интегрирования членов тем меньше, чем больше значение B [14]. Воспользуемся приведенным в [7] приближенным решением уравнения

$$\int_0^a k_0(r, \tau) t(\tau) \tau d\tau = J_n(\eta r)$$

с ядром (3.5) и представлением [7]

$$\Pi^{-1}(\alpha, N) = 1 + \sum_{j=1}^N \beta_j (\alpha^2 - z_j^2)^{-1}, \quad \beta_j = \prod_{k=1}^N (z_j^2 - p_k^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (z_j^2 - z_k^2)^{-1}$$

Применив процедуру перехода к интегрированию по развернутому контуру, Γ , используя свойства цилиндрических функций, в результате получим представление решения (3.3)

$$\begin{aligned}
 q(r) = & J_n(\eta r) K^{-1}(\eta) + \frac{i\pi a}{2} K_0^{-1} \sum_{l=1}^N \beta_l J_n(z_l r) G_1(\eta, z_l) - \\
 & - \frac{a\pi^2}{4} \sum_{k=1}^N g_k \sum_{l=1}^N \beta_l J_n(z_l r) G_2(z_l, p_k) b(\eta) \left(\frac{\exp(-B(a-r))}{\sqrt{a^2-r^2}} + i\pi \sqrt{\frac{a\varepsilon}{2}} \sum_{l=1}^N \beta_l H_n^{(1)}(z_l a) J_n(z_l r) \right) + \\
 & + \left[i \sqrt{\frac{a\pi}{2}} \frac{\exp(-B(a-r))}{\sqrt{a^2-r^2}} - \frac{a\pi\sqrt{\pi\varepsilon}}{2} \sum_{l=1}^N \beta_l J_n(z_l r) H_n^{(1)}(z_l a) \right] \sum_{k=1}^N \frac{g_k}{\sqrt{B-ip_k}} H_n^{(1)}(p_k a), \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 G_1(\eta, z) &= [\eta J_{n+1}(\eta a) H_n^{(1)}(za) - z J_n(\eta a) H_{n+1}^{(1)}(za)](\eta^2 - z^2)^{-1} \\
 G_2(z, p) &= [p H_{n+1}^{(1)}(pa) H_n^{(1)}(za) - z H_n^{(1)}(pa) H_{n+1}^{(1)}(za)](z^2 - p^2)^{-1} \\
 b(\eta) &= \sqrt{\frac{a}{2\pi}} [H_n^{(1)}(\eta a) \sqrt{B+i\eta} + H_n^{(2)}(\eta a) \sqrt{B-i\eta}], \quad \varepsilon = \frac{1}{B}
 \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения, аналогичные [7], $H_0^{(j)}$ – функции Бесселя III рода (функции Ханкеля) ($j = 1, 2$). Присутствующие в представлении (3.6) g_k содержат в себе неизвестные константы C_k , $g_k = a C_k E_N(p_k^2) J_n(ap_k)$.

Алгебраическая система для определения g_k примет вид

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^N g_k [p_k H_{n+1}^{(1)}(ap_k) J_n(a\alpha) - \alpha H_n^{(1)}(ap_k) J_{n+1}(a\alpha)](\alpha^2 - p_k^2)^{-1} - \\
 & + \left[i \sqrt{\frac{a\pi}{2}} \frac{\exp(-B(a-r))}{\sqrt{a^2-r^2}} - \frac{a\pi\sqrt{\pi\varepsilon}}{2} \sum_{l=1}^N \beta_l J_n(z_l r) H_n^{(1)}(z_l a) \right] \sum_{k=1}^N \frac{g_k}{\sqrt{B-ip_k}} H_n^{(1)}(p_k a) = \\
 & = \frac{2i}{\pi} \frac{\sqrt{B^2 + \eta^2}}{\alpha^2 - \eta^2} [\alpha J_{n+1}(a\alpha) J_n(a\eta) - \eta J_{n+1}(a\eta) J_n(a\alpha)] + \frac{2i}{\pi} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{a}} J_n(a\alpha) b(\eta) \\
 & \alpha = z_l; \quad l = \overline{1, N}
 \end{aligned}$$

Выражение (3.6) описывает решение (3.3) с точностью до множителя C^{-1} , где C характеризует поведение функции $K(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ ($K(\alpha) = C|\alpha|^{-1}[1 + O(\alpha^{-1})]$, $|\alpha| \rightarrow \infty$), а выбранное ядро вспомогательной статической задачи имеет асимптотику $K_0(\alpha) = |\alpha|^{-1}[1 + O(\alpha^{-1})]$, $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Описанная схема МФП для осесимметричной задачи реализована в работе [15].

На рис. 1, 2 представлены результаты расчетов амплитудных значений контактных напряжений, когда форма подошвы описывается функцией $f(r) = J_n(\eta r)$. Все параметры отнесены к толщине слоя, безразмерная частота определяется формулой $\bar{\omega}^2 = \rho \omega^2 h^2 \mu^{-1}$. Характеристики слоя: $h = 1$ – толщина, плотность $\rho = 1$; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; модуль сдвига $\mu = 1$. Графики реальной части $q(r)$, отражающие изменения амплитуды напряжений с ростом частоты, приведены на рис. 1.

На рис. 2 представлены мнимые части амплитуды контактных напряжений. Кривым под номерами 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют значения приведенной частоты 1.8; 2.2; 2.6; 3; 3.4 ($a = 3, n = 0, \eta = 1$).

МФП применим для любых частот колебаний. Преимуществом МФП также является правильное описание поведения решения не только во внутренних точках, но и в окрестности границ области контакта.

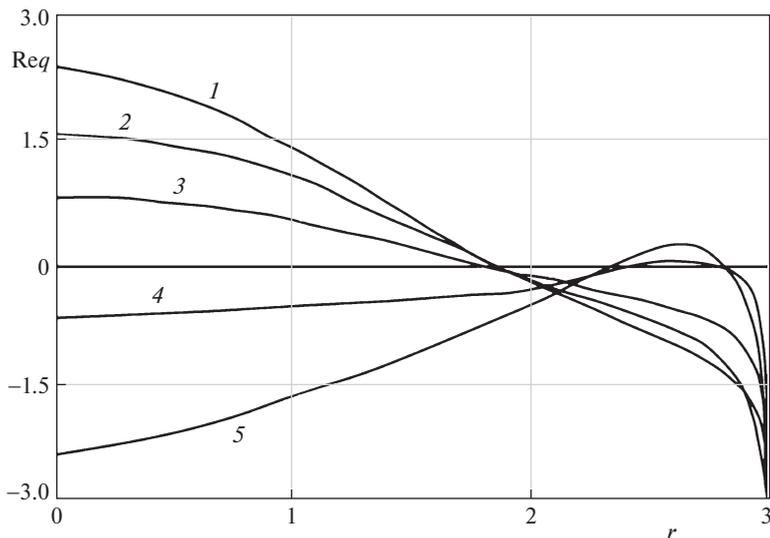


Рис. 1.

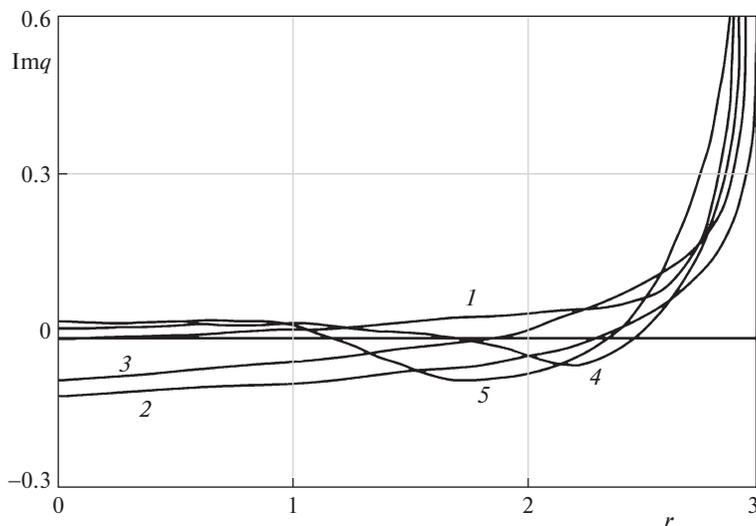


Рис. 2.

3.2. Решение ИУ осесимметричной задачи с растущим символом ядра. В контактных задачах для трещин символ ядра ИУ относительно неизвестного скачка перемещений в области дефекта имеет асимптотику $K(\alpha) = C|\alpha|[1 + O(\alpha^{-1})]$, $|\alpha| \rightarrow \infty$ [16], и ядро интегрального оператора является обобщенной функцией. В данном случае за счет выноса из обеих частей интегрального уравнения вида (3.3) дифференциального оператора можно привести ИУ к уравнению с классической функцией ядра, решение которого осуществляется в соответствии с приведенным алгоритмом МФП. При этом

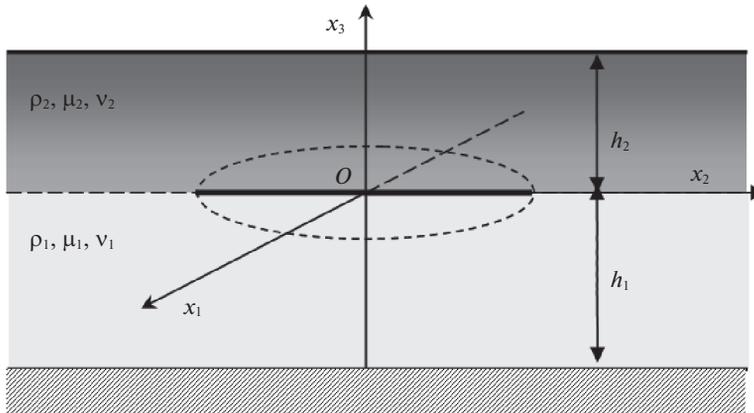


Рис. 3.

решение уравнения отыскивается в классе суммируемых функций $q(r) \in L_b(0, a)$ ($b > 1$), обращающихся в нуль на границе области трещины.

Рассмотрим в качестве примера ИУ осесимметричной задачи о возбуждении гармонических колебаний в упругой среде вибрацией берегов круглой трещины отрыва ($\Omega : x^2 + y^2 \leq a^2$). В качестве упругой среды будем рассматривать двухслойный пакет, считая, что трещина располагается в плоскости раздела физико-механических свойств (рис. 3).

Верхняя грань пакета свободна от нагрузок, нижняя – жестко закреплена, в области трещины заданы равные напряжения на противоположных ее берегах. Полагается, что в процессе колебаний берега трещины не взаимодействуют. Смешанная граничная задача может быть сведена к интегральному уравнению вида (3.1), где, для сохранения единых обозначений в ИУ, через $q(r)$ обозначено неизвестное амплитудное значение скачка перемещений в области трещины, $f(r)$ описывает амплитуду напряжения на ее берегах. Структура и свойства функции символа ядра описаны в работах [16, 17].

Будем строить решение ИУ вида (3.3), где символ ядра (3.6) – растущая функция.

Выведем из обеих частей ИУ дифференциальный оператор вида $-L_n + l^2$, где l – некоторая константа. Получим ИУ с убывающей при $|\alpha| \rightarrow \infty$ функцией символа ядра

$$\int_0^a k_1(r, \rho) q(\rho) \rho d\rho = \int_0^a J_n(\eta\rho) \rho \int_0^\infty \frac{J_n(\alpha\rho) J_n(\alpha r)}{\alpha^2 + l^2} \alpha d\alpha d\rho + \varepsilon(r); \quad 0 \leq r \leq a \tag{3.7}$$

$$k_1(r, \rho) = \int_0^\infty K_1(\alpha) J_n(\alpha\rho) J_n(\alpha r) \alpha d\alpha \equiv \int_0^\infty \frac{K(\alpha)}{\alpha^2 + l^2} J_n(\alpha\rho) J_n(\alpha r) \alpha d\alpha,$$

$\varepsilon(r) = C_1 I_n(lr)$ – ограниченное в нуле решение модифицированного уравнения Бесселя

$$\frac{d^2 \varepsilon(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varepsilon(r)}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + l^2 \right) \varepsilon(r) = 0$$

Здесь $I_n(r)$ – модифицированная функция Бесселя I рода порядка n , C_1 – константа, подлежащая определению.

Используя свойства цилиндрических функций [18] и проведя разворот контура интегрирования на всю вещественную ось, можно преобразовать правую часть (3.7) так, что ИУ примет вид

$$\int_0^a k_1(r, \rho) q(\rho) \rho d\rho = K_n(lr) \int_0^r f(\rho) I_n(l\rho) \rho d\rho + I_n(lr) \left[C_1 + \int_r^a f(\rho) K_n(l\rho) \rho d\rho \right], \quad (3.8)$$

где C_1 находится из заданного на краю трещины условия $q(a) = 0$.

Значения интегралов, стоящих в (3.8) справа, нетрудно посчитать с помощью таблиц [19], в результате чего приходим к ИУ с правой частью в виде комбинации функций Бесселя $J_n(\eta r)$ и $I_n(lr)$

$$\int_0^a k_1(r, \rho) q(\rho) \rho d\rho = \frac{J_n(\eta r)}{\eta^2 + l^2} + I_n(lr) \left[C_1 + \frac{a}{\eta^2 + l^2} (\eta J_{n+1}(\eta a) K_n(la) - l J_n(\eta a) K_{n+1}(la)) \right], \quad (3.9)$$

где $K_n(r)$ – модифицированная функция Бесселя II рода (функция Макдональда).

Функция символа ядра K_1 с точностью до постоянного множителя приближается соотношением $K_1(\alpha) = K(\alpha)(\alpha^2 + l^2)^{-1} \approx K_0(\alpha)\Pi(\alpha, N)$, далее для построения решения (3.8) может быть использован алгоритм МФП с базисными функциями вида (3.4).

Решение вспомогательной задачи для среды с поглощением для ИУ с правой частью в виде $I_n(lr)$ построено в работе [17]. В силу линейности задачи решение ИУ (3.9) запишется как

$$q(r) = \frac{q_1(r)}{\eta^2 + l^2} + q_2(r) \left[C_1 + \frac{a}{\eta^2 + l^2} (\eta J_{n+1}(\eta a) K_n(la) - l J_n(\eta a) K_{n+1}(la)) \right],$$

где $q_1(r)$ – приближенное решение ИУ для правой части в виде $J_n(\eta r)$, представляемое соотношением (3.6),

$$\begin{aligned} q_2(r) = & I_n(lr) K^{-1}(il) + \frac{i\pi a}{2} K_0^{-1}(il) \sum_{l=1}^N \beta_l J_n(z_l r) G_1^*(l, z_l) - \\ & - \frac{a\pi^2}{4} \sum_{k=1}^N d_k \sum_{l=1}^N \beta_l J_n(z_l r) G_2(z_l, p_k) + \\ & + b^*(l) \left(\frac{\exp(-B(a-r))}{\sqrt{a^2 - r^2}} + i\pi \sqrt{\frac{a\epsilon}{2}} \sum_{l=1}^N \beta_l H_n^{(1)}(z_l a) J_n(z_l r) \right) + \\ & + \left[i\sqrt{\frac{a\pi}{2}} \frac{\exp(-B(a-r))}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{a\pi\sqrt{\pi\epsilon}}{2} \sum_{l=1}^N \beta_l J_n(z_l r) H_n^{(1)}(z_l a) \right] \sum_{k=1}^N \frac{d_k}{\sqrt{B - ip_k}} H_n^{(1)}(p_k a) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь $b^*(l) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} J_n(al) \sqrt{B + l}$,

$$G_1^*(l, z) = [l I_{n+1}(la) H_n^{(1)}(za) + z I_n(la) H_{n+1}^{(1)}(za)] (l^2 + z^2)^{-1}$$

Система для определения d_k , входящих в (3.10), принимает вид

$$\sum_{k=1}^N d_k \left[(p_k H_{n+1}^{(1)}(ap_k) J_n(a\alpha) - \alpha H_n^{(1)}(ap_k) J_{n+1}(a\alpha)) (\alpha^2 - p_k^2)^{-1} - \right.$$

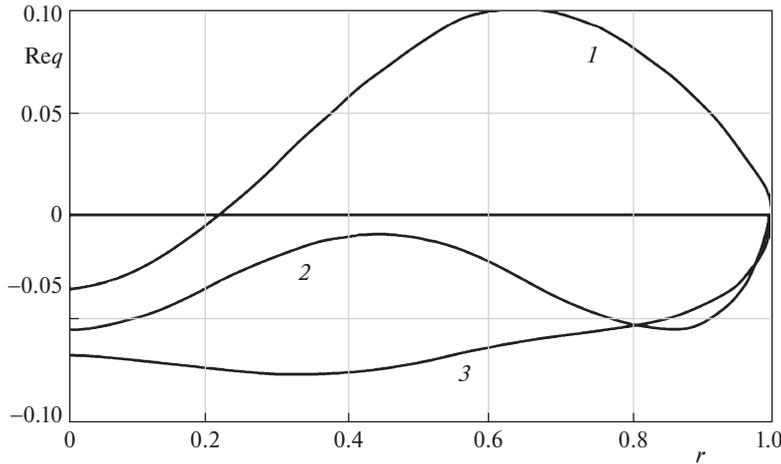


Рис. 4.

$$\begin{aligned}
 -2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi(B - ip_k)}} H_n^{(1)}(ap_k) J_n(a\alpha) \Big] &= \frac{2i}{\pi} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{a}} J_n(a\alpha) b_*(l) - \\
 - \frac{2i}{\pi} \frac{\sqrt{B^2 - l^2}}{\alpha^2 + l^2} [I_{n+1}(al) J_n(a\alpha) + \alpha J_{n+1}(a\alpha) I_n(al)] & \\
 \alpha = z_l; \quad l = \overline{1, N} &
 \end{aligned}$$

Присутствующая в решении константа C_1 определяется из условия равенства нулю скачка перемещений на границе области трещины. С этой целью вычисляется предел $R = \lim_{r \rightarrow a-0} q(r) \sqrt{a-r}$, соответствующий коэффициенту при корневой особенности, и приравняется к нулю.

В работе [16] представлено решение интегральных уравнений плоской задачи для слоистого пакета при наличии интерфейсных трещин. Авторами также использован МФП, но вынос дифференциального оператора осуществлялся на этапе построения решения вспомогательной статической задачи.

На рис. 4, 5 представлены результаты расчетов для трещины отрыва на границе раздела свойств в двухслойном пакете с заземленной нижней гранью. Все безразмерные величины приведены к параметрам верхнего слоя, в качестве характерного линейного размера выбран радиус трещины, приведенная частота определяется формулой $\bar{\omega}^2 = \rho_2 \omega^2 a^2 \mu_2^{-1}$. Параметры пакета: $h_1 = 0.6$ – толщина нижнего слоя, $h_2 = 0.4$ – толщина верхнего слоя; плотности слоев $\rho_1 = \rho_2 = 1$; коэффициенты Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$; $\mu_1/\mu_2 = 0.5$.

На рис. 4 приведены реальные, на рис. 5 – мнимые части амплитудного значения скачка перемещений на берегах трещины, к которым приложена единичная нагрузка ($a = 1, n = 0, \eta = 0$).

Кривым под номерами 1, 2, 3 соответствуют значения приведенной частоты 4, 5, 7. Как видно из графиков, значения мнимой части возрастают, в вещественной – убывают с ростом частоты колебаний.

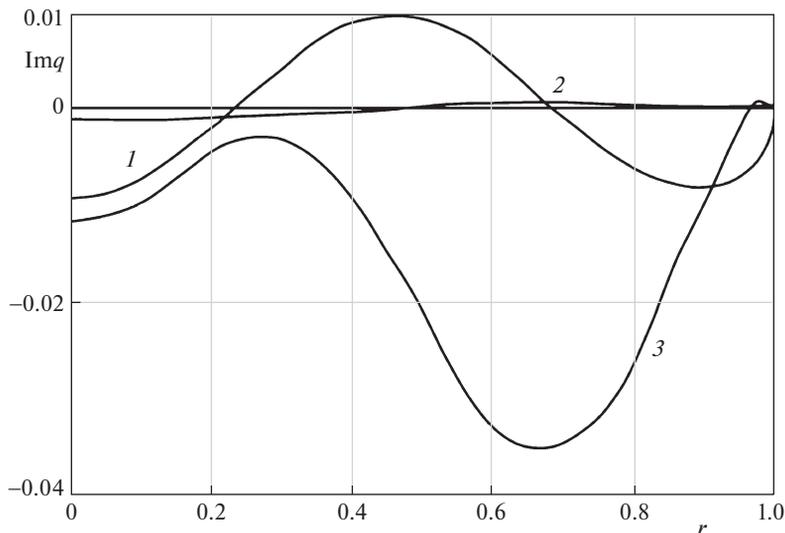


Рис. 5.

Заключение. В работе описана схема метода фиктивного поглощения решения интегральных уравнений смешанных задач механики деформируемого твердого тела для односвязной области, занимаемой штампом или дефектом. Применение нового вида вспомогательных функций продемонстрировано на примере ИУ осесимметричных задач о колебаниях штампа и трещины в упругой среде. Выбор более сложного вида базисных функций приводит к более простой форме решения. Для трещины отрыва в двухслойном пакете приведены результаты численных расчетов.

МФП может использоваться при решении ИУ задач для произвольных в плане областей штампов или дефектов (трещин и включений). Достоинство МФП состоит также в том, что область применимости полученных приближенных решений динамических задач определяется областью применения решений использованных в качестве вспомогательных статических задач.

Фрагменты работы выполнены в рамках задания ГЗ ЮНЦ РАН, проект № 01201354241 и при частичной поддержке РФФИ (проект 18-05-80008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Механика контактных взаимодействий / Под ред. Воровича И.И., Александрова В.М. М.: Физматлит, 2001. 672 с.
2. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
3. Бабешко В.А. Новый метод в теории пространственных динамических смешанных задач // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242. Вып. 1. С. 62–65.
4. Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Метод фиктивного поглощения в плоских динамических задачах // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 477–484.
5. Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Об одном методе теории динамических контактных задач для круглых штампов // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 2. С. 22–28.
6. Ватульян А.О., Овсепян В.В., Пряхина О.Д. Контактная динамическая задача для ортотропного цилиндра // Изв. АН АрмССР. Механика. 1983. Т. 36. № 4. С. 47–55.
7. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 265 с.

8. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 248 с.
9. *Бабешко В.А., Калинин В.В.* Метод фиктивного поглощения в связанных смешанных задачах теории упругости и математической физики для слоисто-неоднородного полупространства // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 285–292.
10. *Калинчук В.В., Белянкова Т.И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
11. *Бабешко В.А., Павлова А.В.* Некоторые соотношения для решений двумерных интегральных уравнений типа свертки смешанных задач. 1987. 18 с. Деп. в ВИНТИ 18.08.87, № 6022-B87.
12. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
13. *Бабешко В.А.* О неединственности решений динамических смешанных задач для систем штампов // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 6. С. 1327–1330.
14. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
15. *Капустин М.С., Павлова А.В., Рубцов С.Е., Телятников И.С.* К моделированию взаимодействия фундамента с деформируемой грунтовой средой // Эколог. вестн. научн. центров ЧЭС. 2015. № 3. С. 44–51.
16. *Кардовский И.В., Пряхина О.Д., Смирнова А.В.* Решение динамической задачи для трехслойной среды с трещинами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки. 2004. № 3. С. 38–43.
17. *Павлова А.В., Телятников С.В.* Об одном методе решения динамических задач о колебаниях упругого слоя, вызванных вибрацией берегов внутренней трещины / Деп. в ВИНТИ 07.02.95, № 354-B95, 21 с.
18. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
19. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции. М.: Физматлит, 2003. 664 с.

On One Modification of the Fictitious Absorption Method

A. V. Pavlova^{a,#}, S. E. Rubtsov^{a,##}, and I. S. Telyatnikov^{b,###}

^a *Kuban State University, Krasnodar, Russia*

^b *Federal Research Centre The Southern Scientific Centre RAS, Rostov-on-Don, Russia*

[#]*e-mail: pavlova@math.kubsu.ru*

^{##}*e-mail: rub_serg@mail.ru*

^{###}*e-mail: ilux_t@list.ru*

The paper describes a modification of the fictitious absorption method in terms of the basis functions choice, as well as a method for its implementation for the case when a stamp or defect has a non-convex region in the plan. In contrast to the commonly used scheme, for the introduced auxiliary component of the solution, we use the derivatives of the Dirac delta functions with the boundary set of the contact region as the carrier. We demonstrated application of a new type of auxiliary functions by the example of the integral equations for axisymmetric problems of vibrations for a stamp and a crack in an elastic medium. The choice of a more complex form for basis functions leads to a simpler form of the solution.

Keywords: integral equation, fictitious absorption method, oscillating kernel, region of complex configuration, axisymmetric problem

REFERENCES

1. *Mechanics of contact interactions / Ed. by Vorovich I.I., Alexandrov V.M.* Moscow: Fizmatlit, 2001. 672 p. (in Russian)
2. *Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F.* Dynamics of Inhomogeneous Linear Elastic Media. Moscow: Nauka, 1989. 344 p. (in Russian)

3. *Babeshko V.A.* A new method in the theory of spatial dynamic mixed problems // Dokl. AS USSR, 1978, vol. 242, iss. 1, pp. 62–65. (in Russian)
4. *Babeshko V.A., Pryakhina O.D.* The fictitious absorption method in plane dynamic problems // JAMM, 1980, vol. 44, iss. 3, pp. 477–484. (in Russian)
5. *Babeshko V.A., Pryakhina O.D.* On one method of the theory of dynamic contact problems for round stamps // Izv. AS USSR. Solid Mech., 1981, no. 2, pp. 22–28. (in Russian)
6. *Vatulyan A.O., Ovsepyan V.V., Pryakhina O.D.* Contact dynamic problem for an orthotropic cylinder // Izv. AS Arm. SSR. Mech., 1983, vol. 36, no. 4, pp. 47–55. (in Russian)
7. *Babeshko V.A.* Generalized Method of Factorization in Spatial Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory. Moscow: Nauka, 1984. 265 p. (in Russian)
8. *Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D.* Dynamics of Massive Bodies and Resonance Phenomena in Deformable Media. Moscow: Sci. World, 1999. 248 p. (in Russian)
9. *Babeshko V.A., Kalinchuk V.V.* Fictitious absorption method in coupled mixed problems of elasticity theory and mathematical physics for a layered inhomogeneous half-space // JAMM, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 285–292. (in Russian)
10. *Kalinchuk V.V., Belyankova T.I.* Dynamic Contact Problems for Prestressed Electroelastic Bodies. Moscow: Fizmatlit, 2006. 272 p. (in Russian)
11. *Babeshko V.A., Pavlova A.V.* Some relations for solutions of two-dimensional integral equations of convolution type of mixed problems // 1987, 18 p. Dep. VINITI on 18.08.87, No. 6022-B87. (in Russian)
12. *Vorovich I.I., Alexandrov V.M., Babeshko V.A.* Non-Classical Mixed Problems of Elasticity Theory. Moscow: Nauka, 1974. 455 p. (in Russian)
13. *Babeshko V.A.* On the non-uniqueness of solutions of dynamic mixed problems for systems of stamps // Dokl. AS USSR, 1990, vol. 310, no. 6, pp. 1327–1330. (in Russian)
14. *Vorovich I.I., Babeshko V.A.* Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Non-Classical Domains. Moscow: Nauka, 1979. 320 p. (in Russian)
15. *Kapustin M.S., Pavlova A.V., Rubtsov S.E., Telyatnikov I.S.* To the modeling of the interaction of the foundation with the deformed soil environment // Ecol. Bull. Res. Centers of the BSEC, 2015, no. 3, pp. 44–51. (in Russian)
16. *Kardovsky I.V., Pryakhina O.D., Smirnova A.V.* Solution of a dynamic problem for a three-layer medium with cracks // Univ. Proceed. North Caucasus. Reg. Nat. Sc., 2004, no. 3, pp. 38–43. (in Russian)
17. *Pavlova A.V., Telyatnikov S.V.* On one method for solving dynamic problems of vibrations of an elastic layer caused by vibration of the edges of an internal crack / Dep. VINITI 07.02.95, No. 354-B95, 21 p. (in Russian)
18. *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. M.: Nauka, 1979. 832 p. (in Russian)
19. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integrals and Series, Vol. 2, Special Functions. Moscow: Fizmatlit, 2003. 664 p. (in Russian)