

УДК 539.3:534.1

БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИТАХ

© 2021 г. Е. В. Глушков^{1,*}, Н. В. Глушкова¹¹ Институт математики, механики и информатики КубГУ, Краснодар, Россия

*e-mail: evg@math.kubsu.ru

Поступила в редакцию 03.02.2021 г.

После доработки 11.03.2021 г.

Принята к публикации 27.03.2021 г.

Рассматривается возбуждение и распространение поверхностных акустических волн в многослойных волноводах с произвольной анизотропией упругих слоев. Дается краткий обзор асимптотических представлений, полученных в рамках разрабатываемого В.А. Бабешко интегрального подхода, в сопоставлении с результатами классического модального анализа. Приводятся примеры приложений к задачам ультразвукового неразрушающего контроля состояния изделий из композитных материалов.

Ключевые слова: композитные материалы, поверхностные акустические волны, интегральные и асимптотические представления, модальный анализ, вектор групповой скорости, ультразвуковой контроль, эффективные упругие модули

DOI: 10.31857/S0032823521030061

1. Введение. Основной областью научных интересов Владимира Андреевича Бабешко, с начала научной работы под руководством И.И. Воровича в 1960-х годах и до наших дней, является решение динамических задач теории упругости. Академик Бабешко — один из основоположников интегрального подхода, базирующегося на выводе и использовании интегрального представления вектора смещений возбуждаемого волнового поля $\mathbf{u}$ через матрицу Грина k для рассматриваемой упругой слоистой структуры и вектор приложенной нагрузки $\mathbf{q}$ [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \iint_{\Omega} k(\mathbf{x} - \xi, y - \eta, z) \mathbf{q}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &\equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\Gamma_1 \Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2, z) \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $K = F[k]$ и $\mathbf{Q} = F[\mathbf{q}]$ — Фурье-символы (результат преобразования Фурье F по горизонтальным координатам x и y) матрицы-функции $k(\mathbf{x})$ и вектор-функции $\mathbf{q}(\mathbf{x}, y)$; $\mathbf{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$. Такое представление позволяет разрабатывать эффективные полуаналитические методы как для решения динамических контактных задач (определение неизвестных контактных напряжений $\mathbf{q}$ и тем самым динамической реакции упругой среды), так и для исследования волновых процессов.

Контактные задачи сводятся к интегральным уравнениям, для решения которых В.А. Бабешко был разработан и реализован набор эффективных методов, таких как метод факторизации [1] и метод фиктивного поглощения [2]. Для исследования волновых процессов используются методы численного интегрирования (в ближней зоне)

или выводятся асимптотики рассматриваемых интегралов (для дальней зоны) [3]. Важно, что интегральное представление (1.1) и полученные из него асимптотики справедливы для любой вертикально-неоднородной упругой среды, отличие только в конкретном виде матрицы K . Для классических однородных изотропных волноводов (слой, полупространство) ее элементы могут быть выписаны в явном виде, а для сред более сложного строения (многослойность, непрерывная зависимость упругих свойств от глубины и др.) для ее построения требуется разработка численно устойчивых алгоритмов [4–6]. При этом самостоятельный интерес представляют анизотропные волноводы, к которым, в частности, относятся пластины из многослойных композитных материалов [7].

Представление (1.1) остается справедливым и в этом случае, но задача усложняется как с точки зрения разработки эффективных алгоритмов построения матрицы K , так и вывода асимптотики бегущих волн, который уже не сводится к простому применению теоремы Коши о вычетах. Следует отметить, что для однородного ортотропного слоя А.О. Ватульяну удалось получить матрицу K в явном виде [8]. Однако в общем случае произвольной анизотропии разработка алгоритмов построения матрицы K потребовала значительной модификации по сравнению с изотропным случаем [9, 10].

Для моделирования распространения бегущих волн в упругих слоистых волноводах традиционно используется техника модального анализа. Они ищутся в виде плоских волн, волновой вектор которых указывает направление распространения, а их скорости и собственные формы определяются дисперсионными соотношениями, возникающими при подстановке искомого решения в однородные граничные условия. В анизотропном случае для многослойных волноводов разрабатываются специальные матричные алгоритмы вычисления волновых характеристик [11–14]. Причем некоторые из указанных подходов, например, метод дискретных слоев, базирующийся на конечно-элементной дискретизации по толщине [15], позволяет не только строить дисперсионные кривые, но и вычислять динамическую функцию Грина многослойного полупространства. Разработанные подходы к исследованию волн Лэмба в многослойных анизотропных пластинах (см., например обзор [16]) позволяют также исследовать такие интересные явления, как влияние сильной неоднородности материала на волновые эффекты [17] или строить их длинноволновые и коротковолновые асимптотики [18].

В отличие от изотропного случая, вектор групповой скорости $\mathbf{c}$, указывающий направление переноса энергии волновым пакетом, вообще говоря, не совпадает по направлению с волновым вектором $\mathbf{k}$, отклоняясь от него на некоторый угол ϑ . Возникает дополнительная проблема определения такого направления γ волнового вектора $\mathbf{k}$, которое дает требуемое направление φ для вектора групповой скорости $\mathbf{c}$. Ее решение важно, например, для развития SHM-технологии неразрушающего ультразвукового контроля композитных материалов, используемых в аэрокосмических изделиях [19]. Асимптотика, полученная из интегрального представления (1.1), описывает цилиндрические бегущие волны, распространяющиеся от источника (области приложения нагрузки $\mathbf{q}$) [9, 10]. Ее замечательным свойством является то, что значение групповой скорости $c = |\mathbf{c}|$ определяется этой асимптотикой для любого требуемого направления φ без необходимости находить направление волнового вектора $\mathbf{k}$ для эквивалентной плоской волны. Ниже это свойство подробно обсуждается в сопоставлении с результатами модального анализа. Преимущества асимптотических представлений, полученных в рамках интегрального подхода, иллюстрируются практическими приложениями к задачам обнаружения повреждений и скрытых дефектов методами SHM, а также к обратным задачам определения эффективных упругих модулей армированных углепластиков и нанокompозитов.

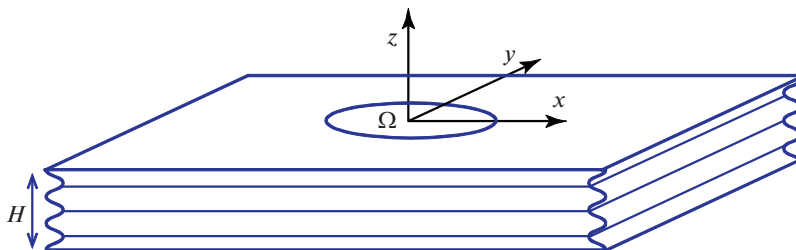


Рис. 1. Слоистая композитная пластина; Ω — область приложения поверхностной нагрузки.

2. Цилиндрические бегущие волны. Рассматривается M -слойная упругая пластина с произвольной анизотропией слоев, к поверхности которой в области Ω приложена осциллирующая нагрузка $\mathbf{q}(x, y)e^{-i\omega t}$, генерирующая поле установившихся гармонических колебаний $\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$; $\omega = 2\pi f$ — круговая частота, f — частота (рис. 1). В частности, это может быть композитная пластины толщины H , изготовленная из волоконно-армированных трансверсально-изотропных слоев-препрегов [7], с приклеенным к поверхности круговым пьезоактуатором.

Вектор комплексной амплитуды смещений $\mathbf{u}$ удовлетворяет в каждом из слоев уравнениям эластодинамики

$$C_{ijkl}u_{l,jk} + \rho\omega^2 u_i = 0; \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

Здесь C_{ijkl} — компоненты тензора упругих постоянных, ρ — плотность. Слои жестко сцеплены между собой, т.е. поля перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и напряжений $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ непрерывны во всем объеме пластины $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, $-H < z < 0$, в том числе и на внутренних границах раздела слоев $z = z_m$. Внешние границы $z = -H$ и $z = 0$ свободны от напряжений за исключением области приложения нагрузки. В случае пленочного пьезоактуатора нагрузка $\mathbf{q}$ — это радиальные контактные напряжения, концентрирующиеся на границе области контакта Ω [20, 21].

Решение данной краевой задачи представимо в виде (1.1). В полярных координатах

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & \alpha_1 &= \alpha \cos \gamma, & \alpha_2 &= \alpha \sin \gamma \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \alpha &= \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, & 0 &\leq \gamma, & \varphi &\leq 2\pi \end{aligned}$$

двукратный контурный интеграл сводится к однократному интегралу по контуру Γ_+ , идущему в комплексной плоскости α вдоль положительной вещественной полуоси, отклоняясь от нее при обходе вещественных полюсов подынтегральной функции ζ_n , и внутреннему интегралу по угловой переменной γ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\Gamma_+} \int_0^{2\pi} K(\alpha, \gamma, z) \mathbf{Q}(\alpha, \gamma) e^{-i\alpha r \cos(\gamma - \varphi)} d\gamma \alpha d\alpha \quad (2.2)$$

Основной идеей, позволившей сформировать алгоритм построения матрицы K в компактной матричной форме, является замена производных по пространственным координатам $\partial/\partial x_j$ на их Фурье-символы $-i\alpha_j$, в том числе и для производной по поперечной координате $z = x_3$, по которой преобразование Фурье формально не применимо [22]. При кусочно-постоянной зависимости упругих свойств от z общее решение уравнений (2.1) в области преобразования Фурье выписывается в каждом слое в

явном виде с точностью до шести постоянных множителей $\mathbf{t}_m = (t_m^{(1)}, t_m^{(2)}, \dots, t_m^{(6)})$, $m = 1, 2, \dots, M$. Вектор неизвестных коэффициентов $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_M)$ длиной $6M$ определяется из системы линейных алгебраических уравнений $A\mathbf{t} = \mathbf{f}$, возникающей при удовлетворении граничных условий. Поэтому по построению определитель матрицы этой системы $\Delta = \det A$ входит в знаменатель коэффициентов $\mathbf{t}_m$, а тем самым и в общий знаменатель элементов матрицы K : $K = \hat{K}(\alpha_1, \alpha_2, z)/\Delta(\alpha_1, \alpha_2)$. Корни $\alpha = \zeta_n$ характеристического уравнения

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \omega) = \Delta(\alpha, \gamma, \omega) = 0 \quad (2.3)$$

являются полюсами подынтегральной функции в представлении (2.2) (числитель $\hat{K}$, как и Фурье-символ нагрузки $\mathbf{Q}$, полюсов не имеет). В анизотропном случае они зависят не только от частоты ω , но и от направления γ в плоскости (α_1, α_2) : $\alpha = \zeta_n(\omega, \gamma)$.

Как в изотропном, так и в анизотропном случае разворот контура Γ_+ и его замыкание в соответствии с леммой Жордана позволяет воспользоваться теоремой Коши, заменив интеграл по α суммой вычетов в полюсах ζ_n , попадающих внутрь замкнутого контура (для обратной волны вычет берется в отрицательном полюсе $-\zeta_n$). Вычеты в вещественных полюсах дают бегущие волны. В изотропном случае их асимптотика в дальней зоне представима в виде [3]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{a}_n(\varphi, z) e^{i\zeta_n r} / \sqrt{\zeta_n r} (1 + O((\zeta_n r)^{-1})), \quad \zeta_n r \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

$$\mathbf{a}_n = i \operatorname{res} K(-\alpha, \varphi, z)|_{\alpha=\zeta_n} \mathbf{Q}(-\zeta_n, \varphi) \zeta_n,$$

N — число вещественных полюсов. Каждое слагаемое в разложении (2.4) описывает цилиндрическую бегущую волну, распространяющуюся от источника на бесконечность с фазовой скоростью $v_n = \omega/\zeta_n$ и групповой скоростью $c_n = d\omega/d\zeta_n$. При этом амплитудные множители $\mathbf{a}_n$ однозначно определяются свойствами волновода (через $\operatorname{res} K$) и параметрами источника (через $\mathbf{Q}$).

В анизотропном случае зависимость полюсов ζ_n от γ не позволяет после взятия вычетов свести внутренние интегралы по γ к цилиндрическим функциям Бесселя. Поэтому для дальней зоны $\zeta_n r \gg 1$ строится их асимптотика методом стационарной фазы [23]. После замены переменных $\gamma = \beta + \varphi + \pi/2$ фазовая функция в показателе осциллирующей экспоненты принимает вид [10]

$$s_n(\beta) = \zeta_n(\theta) \sin \beta, \quad \theta = \beta + \varphi + \pi/2 \quad (2.5)$$

Стационарные точки β_{nm} определяются корнями уравнения

$$s'_n(\beta) = \zeta_n(\theta) \cos \beta + \zeta'_n(\theta) \sin \beta = 0, \quad (2.6)$$

которое эквивалентно уравнению $\operatorname{ctg} \beta = -\zeta'_n(\theta)/\zeta_n(\theta)$. В изотропном случае $\zeta'_n(\theta) = 0$, что приводит к фазовому уравнению $\cos \beta = 0$, имеющему на отрезке $[0, \pi]$ единственный корень $\beta = \pi/2$, дающий в конечном счете асимптотику (2.4).

В анизотропном случае $\zeta'_n(\theta) \neq 0$, что приводит, во-первых, к отклонению стационарной точки от $\pi/2$, а во-вторых, к возможности появления дополнительных стационарных точек — корней уравнения (2.6). В качестве иллюстрации на рис. 2, взятом из работы [10], показаны графики функций $\operatorname{ctg} \beta$ и $-\zeta'_n(\theta)/\zeta_n(\theta)$ для направления φ вдоль армирующих волокон верхнего слоя (рис. 2, а) и под углом 45° к ним (рис. 2, б) для фундаментальной моды SH_0 , возбуждаемой в композитной пластине, геометрические и упругие свойства которой приведены в указанной работе. Точки пересечения этих

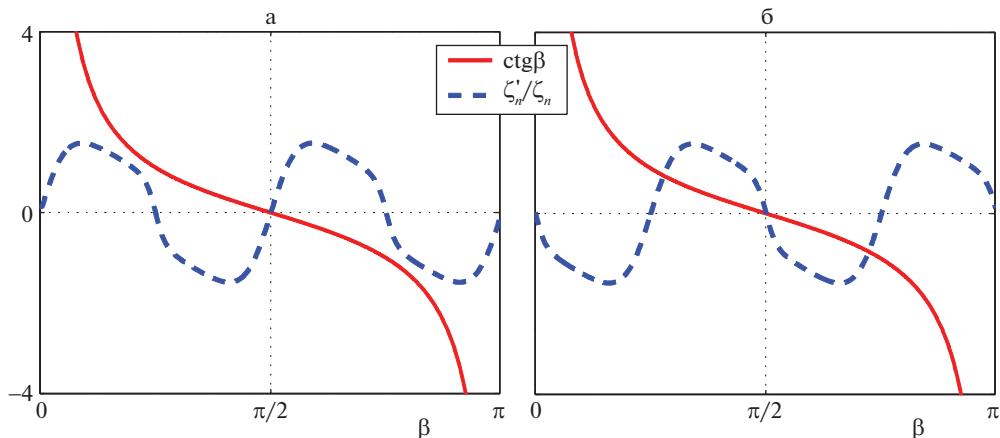


Рис. 2. Иллюстрация возможности появления нескольких бегущих волн, соответствующих одному и тому же полюсу ζ_n .

кривых дают корни уравнения (2.6). В первом случае, для главного направления вдоль волокон, корень $\beta = \pi/2$ такой же, как и в изотропном случае, а во втором случае наблюдается пересечение в трех точках. Это означает, что в асимптотике бегущих волн для этого направления φ одному полюсу ζ_n соответствует три волны, распространяющиеся с различными скоростями. В общем случае асимптотика цилиндрических бегущих волн, возбуждаемых локализованной нагрузкой $\mathbf{q}$ принимает вид [9, 10]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \sim \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n(r, \varphi, z), \quad \zeta r \rightarrow \infty; \quad \mathbf{u}_n = \sum_{m=1}^{M_n} \mathbf{a}_{nm}(\varphi, z) e^{i s_{nm} r} / \sqrt{\zeta r} \quad (2.7)$$

Здесь, как и в представлении (2.4), амплитудные множители $\mathbf{a}_{nm}$ выражаются через вычеты элементов матрицы K в полюсах $\alpha = \zeta_n$ при $\gamma = \theta_{nm}$ и $\mathbf{Q}(-s_{nm}, \varphi)$; M_n — число стационарных точек (корней β_{nm} уравнения (2.6)) для фиксированного направления φ , $s_{nm} = s_n(\beta_{nm})$, ζ — характерное значение волнового числа.

Наряду с возможным существованием нескольких бегущих волн, соответствующих одному полюсу ζ_n , качественное отличие разложения (2.7) от асимптотики (2.4) состоит в том, что сам по себе полюс уже не является волновым числом. Вместо него в показателе экспоненты при радиальной переменной r стоят коэффициенты s_{nm} , отличающиеся от ζ_n сомножителем $\sin \beta_{nm}$. Именно они и играют роль волнового числа. Соответственно, разложение (2.7) описывает набор бегущих волн, распространяющихся с фазовыми и групповыми скоростями

$$v_{nm}(\varphi) = \omega / s_{nm} \quad \text{и} \quad c_{nm}(\varphi) = d\omega / ds_{nm}, \quad (2.8)$$

причем их число может меняться в зависимости от направления φ .

3. Модальный анализ. В рамках модального анализа распространяющиеся вдоль пластины бегущие волны описываются собственными решениями рассматриваемой краевой задачи, которые ищутся в виде плоских волн

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(z) e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})} \quad (3.1)$$

Волновой вектор $\mathbf{k} = (k_x, k_y, 0)$, $k_x = k \cos \gamma$, $k_y = k \sin \gamma$, $k = |\mathbf{k}|$, определяет ориентацию волнового фронта в плоскости (x, y) , указывая ортогональное к фронту направление

ние γ (традиционное обозначение волнового числа k совпало с также ставшим традиционным обозначением матрицы Грина в представлении (1.1); это не должно приводить к путанице, т.к. они используются в различных контекстах). Подстановка представления (3.1) в уравнения (2.1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных компонент амплитудного вектора $\mathbf{a}(z)$. Как и при построении матрицы K , в каждом из слоев композита ее общее решение выписывается в явном виде с точностью до постоянных множителей $\mathbf{t}_m$, а общий вектор неизвестных $\mathbf{t}$ определяется из возникающей при удовлетворении граничных условий однородной системы $A\mathbf{t} = \mathbf{0}$ с той же матрицей A , но только с компонентами волнового вектора (k_x, k_y) вместо параметров преобразования Фурье (α_1, α_2) . Поэтому условие $\det A = 0$, необходимое для существования ее ненулевого решения, дает такое же дисперсионное уравнение как и (2.3):

$$\Delta(k_x, k_y, \omega) = \Delta(k, \gamma, \omega) = 0 \quad (3.2)$$

Соответственно, его корни выражаются через те же полюса ζ_n :

$$k_{n,x} = \zeta_n(\gamma) \cos \gamma, \quad k_{n,y} = \zeta_n(\gamma) \sin \gamma, \quad k_n = |\mathbf{k}_n| = \zeta_n(\gamma) \quad (3.3)$$

В то время как векторы фазовой скорости $\mathbf{k}_n$ для мод бегущих волн, определяемых корнями дисперсионного уравнения, коллинеарны волновым векторам:

$$\mathbf{v}_n(\gamma) = (\omega/k_n^2) \mathbf{k}_n(\gamma),$$

векторы групповой скорости $\mathbf{c}_n$ могут отклоняться от $\mathbf{k}_n$, т.е. быть не ортогональными к фронту волны.

Для определения $\mathbf{c}_n$ уравнение (3.2) разрешается относительно частоты ω :

$$\omega = \omega_n(\mathbf{k}) = \omega_n(k_x, k_y),$$

и используется представление [24, 25]

$$\mathbf{c}_n = \text{grad } \omega_n(k) = \left(\frac{\partial \omega_n}{\partial k_x}, \frac{\partial \omega_n}{\partial k_y} \right) \quad (3.4)$$

Чтобы не вычислять производные от искомым корней ω_n , удобно также использовать представление

$$\mathbf{c}_n = -\text{grad } \Delta(\mathbf{k}, \omega) / (\partial \Delta / \partial \omega)|_{\omega=\omega_n}, \quad (3.5)$$

для вывода которого достаточно взять полные производные уравнения (3.2) по k_x и k_y :

$$\frac{d\Delta}{dk_x} = \frac{\partial \Delta}{\partial k_x} + \frac{\partial \Delta}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = 0, \quad \frac{d\Delta}{dk_y} = \frac{\partial \Delta}{\partial k_y} + \frac{\partial \Delta}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial k_y} = 0$$

Отклонение $\mathbf{c}_n$ от $\mathbf{k}_n$ хорошо иллюстрируется следующими геометрическими построениями. Будучи градиентом к поверхности $\omega_n(\mathbf{k})$, вектор $\mathbf{c}_n$ ортогонален к линии уровня $\omega_n = \text{const}$, вычерчиваемой на плоскости (k_x, k_y) волновым вектором $\mathbf{k}_n(\gamma)$ при $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ (рис. 3, а). В изотропном случае ζ_n не зависит от γ и кривая, определяемая равенствами (3.3), является окружностью, у которой радиус-вектор $\mathbf{k}_n$ ортогонален к касательной, т.е. угол ϕ , определяющий направление вектора групповой скорости $\mathbf{c}_n = (c_{n,x}, c_{n,y})$:

$$c_{n,x} = c_n \cos \phi, \quad c_{n,y} = c_n \sin \phi, \quad c_n = |\mathbf{c}_n|$$

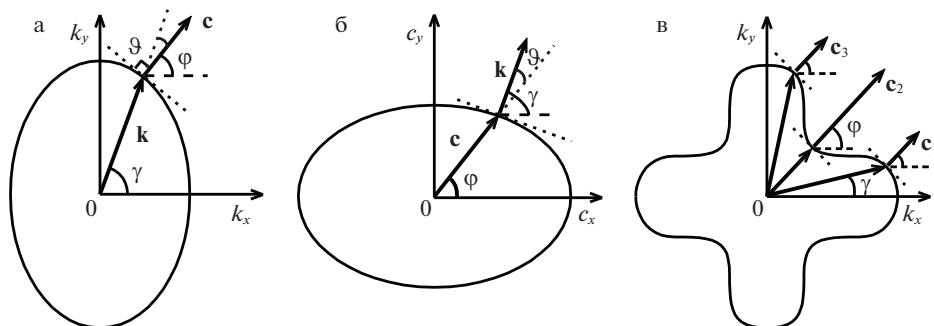


Рис. 3. Кривая волнового вектора $\mathbf{k}(\gamma)$ с ортогональным к ней вектором групповой скорости $\mathbf{c}(\varphi)$ (а) и обратное соотношение между кривой $\mathbf{c}(\varphi)$ с ортогональным к ней волновым вектором $\mathbf{k}(\gamma)$ (б); возникновение нескольких бегущих волн, соответствующих одному корню $\zeta_n(\gamma)$ дисперсионного уравнения (3.2) (в).

совпадает с углом γ волнового вектора. Следует отметить, что свойство ортогональности $\mathbf{c}_n$ к кривой $\mathbf{k}_n(\gamma)$ взаимно обратно: волновой вектор $\mathbf{k}_n$ также ортогонален к кривой, вычерчиваемой вектором групповой скорости $\mathbf{c}_n(\varphi)$ (рис. 3, б).

Зависимость полюсов ζ_n от γ дает кривую, отличную от окружности, нормаль к которой в общем случае не совпадает с направлением радиус-вектора $\mathbf{k}_n(\gamma)$ (совпадает только для главных осей анизотропии). При этом угол отклонения $\vartheta = \varphi(\gamma) - \gamma$ зависит не только от γ , но и от частоты ω и может достигать значительных величин, превышающих 45° . В качестве примера на рис. 4 показаны зависимости ϑ от γ для фундаментальных мод A_0 , S_0 и SH_0 , возбуждаемых в однонаправленном (рис. 4, а) и перекрестно-армированном (рис. 4, б) композитах толщины $H = 1.1$ мм, составленных из слоев-препрегов плотности $\rho = 1482$ кг/м³. Препреги моделируются трансверсально-изотропными слоями с упругими модулями $C_{11} = 95.9$, $C_{12} = 3.6$, $C_{22} = 9.6$, $C_{44} = 3.0$, $C_{55} = 3.45$ (ГПа) (C_{ij} в нотации Фойгта [7]).

4. Сравнение характеристик цилиндрических и плоских волн. Как правило, вектор $\mathbf{k}_n(\gamma)$ вычерчивает выпуклую кривую. Но если $\zeta_n(\gamma)$ в диапазоне $0 \leq \gamma \leq \pi/2$ меняется немонотонно, то эта кривая становится невыпуклой. В этом случае несколько точек γ_m могут давать одно и то же направление φ для соответствующих векторов групповой скорости $\mathbf{c}_m$ (рис. 3, в), то есть в таком направлении φ распространяется несколько волновых пакетов, переносимых плоскими волнами с разным направлением волновых векторов. Это полностью согласуется с возможностью существования в асимптотике (2.7) M_n бегущих цилиндрических волн, соответствующих одному и тому же полюсу ζ_n . Более того, значения $c_n(\varphi)$, получающиеся для плоских волн по формуле (3.4) или (3.5), совпадают со значениями групповой скорости цилиндрических волн $c_{nm}(\varphi)$, получаемых из (2.8).

В качестве примера на рис. 5 показаны угловые диаграммы групповых скоростей плоских волн $c_n(\varphi)$ (сплошные линии) и цилиндрических волн $c_{nm}(\varphi)$ (маркеры) для фундаментальных мод, распространяющихся в тех же композитных пластинах, что и на рис. 4. Для каждого направления φ их значения полностью совпадают, однако формулы (2.8) дают их сразу, в то время как углы γ волновых векторов плоских волн, определяющих их групповую скорость в этом направлении, заранее неизвестны. По-

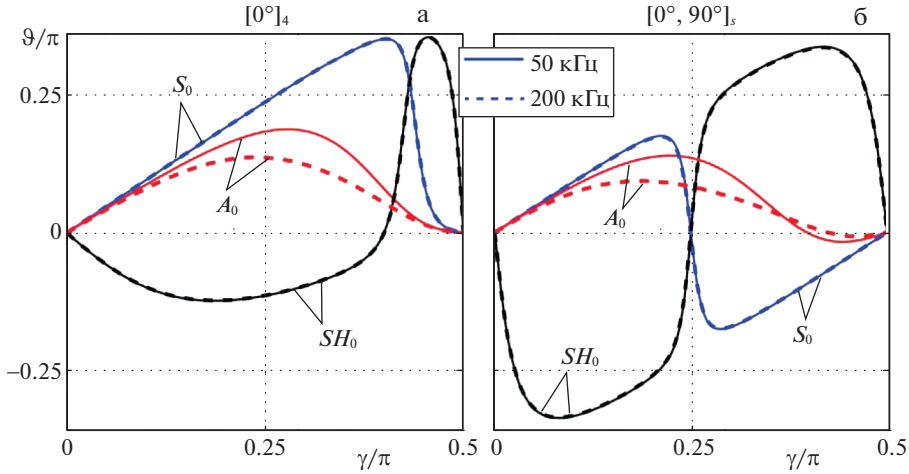


Рис. 4. Зависимость угла отклонения ϑ от угла γ , задающего направление волнового вектора $\mathbf{k}$, для фундаментальных волн Лэмба в однонаправленном (а) и перекрестно-армированном (б) композите.

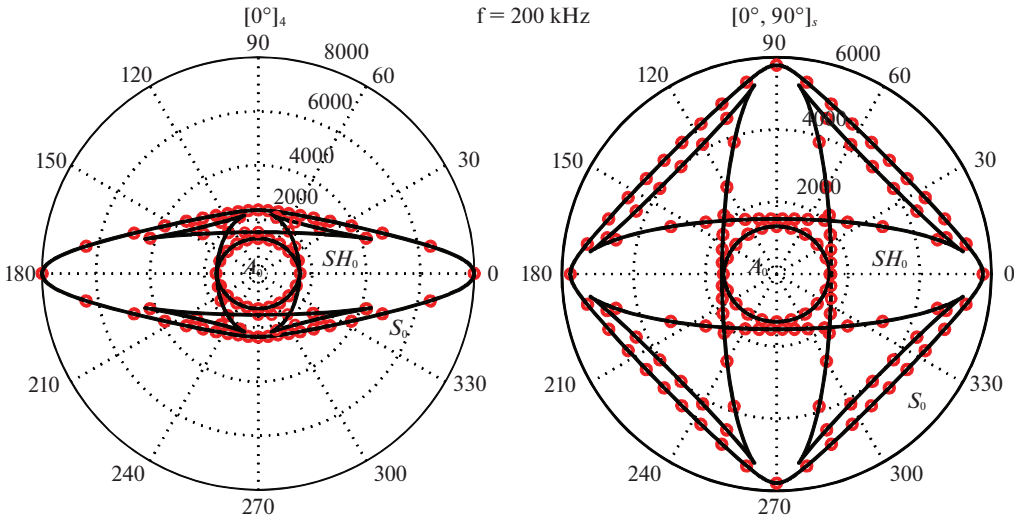


Рис. 5. Диаграммы зависимости групповой скорости от направления распространения для плоских (представление (3.6), сплошные линии) и цилиндрических ((2.8), маркеры) фундаментальных волн Лэмба; композитные образцы те же, что и на рис. 4.

этому в практических приложениях на каждом шаге применения формул (3.4)–(3.5) необходим поиск требуемых углов γ_m .

Кроме того, разложение (2.7) дает однозначные величины амплитудных коэффициентов $\mathbf{a}_{nm}(\varphi, z)$, тогда как собственные формы $\mathbf{a}(z)$ плоских волн (3.1) определяются с точностью до постоянного множителя, не учитывая параметры источника. Тем не менее, их нормированные зависимости от z для одинаковых φ совпадают: и те, и другие описывают одни и те же собственные формы нормальных мод.

В целом, полученная из интегрального представления асимптотика бегущих волн (2.7) дает те же волновые характеристики, что и классический модальный анализ (скорость, собственные формы), но вдобавок имеет два важных преимущества:

1) учет источника, позволяющий получать значение амплитуды возбуждаемых волн и тем самым анализировать амплитудно-частотные характеристики, определять оптимальные диапазоны возбуждения требуемых мод и т.п.

2) нет необходимости подбирать нужную ориентацию плоской волны для определения групповой скорости движения волнового пакета в требуемом направлении ϕ .

5. Практические приложения. Преимущества интегрального подхода позволяют решать задачи, которые сложно или даже невозможно решить, используя только модальный анализ. Из недавних примеров отметим реализацию метода обращения времени для анизотропных композитов [26] и определение эффективных упругих модулей нанокompозитов [27].

5.1. Метод обращения времени [28], известный в отечественной литературе как метод обращения волн [29], основан на инвариантности волнового оператора относительно замены времени t на $-t$ для сред без внутреннего трения. Это позволяет использовать сигналы $v_j(t)$, регистрируемые в различных точках $\mathbf{x}_j$ поверхности упругой пластины, например, сетью пьезосенсоров, в качестве обращенных по времени управляющих сигналов $q_j(t) = p v_j(-t)$ источников, расположенных в этих же точках; p — размерный коэффициент. Эти источники генерируют волновые поля $\mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t)$, и, если сигналы $v_j(t)$ были принесены волнами, рассеянными скрытым дефектом, то обращенные волны фокусируются на нем, обнаруживая его местоположение.

Для изотропных пластин местоположение рассеивателя может быть определено и более простыми средствами, например, с помощью триангуляции, зная время прихода сигналов и групповую скорость приносящих их волн. Однако для анизотропных композитных пластин зависимость вектора групповой скорости $\mathbf{c}_g$ от направления распространения и частоты не позволяет использовать простую триангуляцию или фокусировку обращенных плоских волн $\mathbf{u}_j$.

В то же время, использование полученных в рамках интегрального подхода асимптотик (2.7) для вычисления обращенных волн $\mathbf{u}_j$ по данным экспериментальных измерений сигналов $v_j(t)$ позволило реализовать метод обращения времени и для композитных образцов [26].

5.2. Определение эффективных упругих модулей композитной пластины по характеристикам возбуждаемых в ней бегущих волн базируется на минимизации функционала невязки

$$F(C, \rho, h) = \sum_j (1 - d_j^m / d_j^c)^2, \quad (5.1)$$

в котором C , ρ и h — массивы упругих модулей, плотностей и толщин слоев образца, а d_j^m и d_j^c — измеренные и расчетные волновые характеристики, например, групповые скорости или длины волн на определенных частотах. Алгоритмы минимизации функционала F могут быть различными (покоординатный или градиентный спуск, метод сопряженных градиентов, генетический алгоритм и др.), но каждый их шаг требует пересчета волновых характеристик d_j^c по новым значениям варьируемых (неизвестных) входных параметров. Использование асимптотики (2.7) и представлений (2.8) дает такое же преимущество по сравнению с модальным анализом, как и в методе обращения времени. Однако поиск корней дисперсионного уравнения (2.3) все еще требует сотни и тысячи вызовов процедуры вычисления матрицы K на каждом шаге, определяя общий уровень вычислительных затрат. Тем не менее, реализация такого

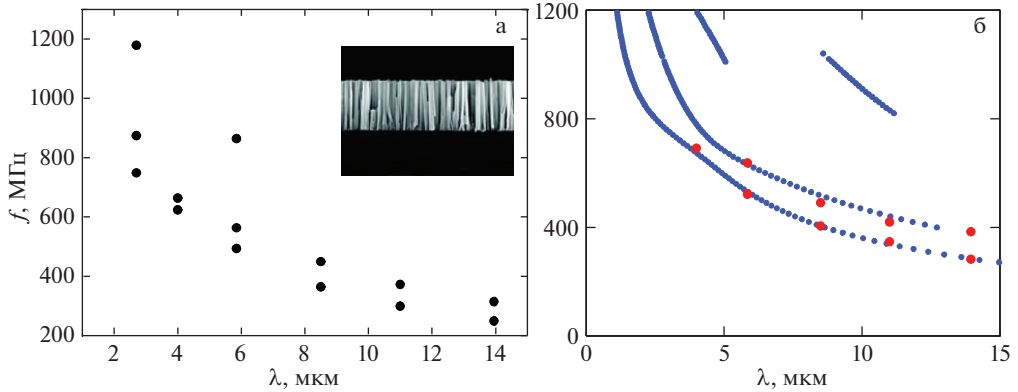


Рис. 6. а: Экспериментальные данные (точки резонансного отклика в плоскости длина волны — частота) для нанокompозитной пленки с платиновым покрытием на кремниевой подложке и б: дисперсионные кривые для трехслойного упругого анизотропного полупространства с эффективными параметрами, восстановленными по этим данным.

подхода позволила успешно определить свойства используемых в экспериментах образцов и провести на этой основе экспериментальную верификацию полученных интегральных и асимптотических представлений (2.2), (2.7) для анизотропных композитных пластин [30].

При использовании лазерно-оптической установки измерения дисперсионных характеристик бегущих волн на определенных фиксированных частотах методом TGM (transient grating method) [31] удалось избежать поиска корней ζ_n , снизив этим вычислительные затраты на 2–3 порядка [27]. Идея заключается в том, что для полученных методом TGM пар (λ_j, f_j) , $j = 1, 2, \dots$ (длина волны — частота), дающих пиковые значения частотного спектра поверхностных акустических волн (ПАВ), целевую функцию можно сформировать в следующем виде

$$F(C, \rho, h) = \sum_j |K_{33}^{-1}(\alpha_j, \omega_j)|, \quad (5.2)$$

где K_{33} элемент матрицы K , дающий вертикальную компоненту смещений при нормальном воздействии q_3 , $\alpha_j = 2\pi/\lambda_j$, $\omega_j = 2\pi f_j$. Для ПАВ значения α_j , ω_j должны совпадать с корнями дисперсионного уравнения (2.3). Обратная величина элементов матрицы K при этом должна обращаться в ноль, что и позволяет использовать функционал (5.2) вместо (5.1). Минимизация этого функционала уже не требует затратного поиска корней дисперсионного уравнения, а только вычисления значений K_{33} в нескольких точках (α_j, ω_j) .

В качестве примера на рис. 6, а показано типичное распределение точек резонансного отклика в плоскости (λ, f) , полученное для композитной пленки толщиной около 1 микрона с III-нитридными нанонитями GaN, запеченными в пластик HSQ [27]. Дисперсионные кривые, посчитанные для эффективных параметров композита, полученных при минимизации функционала (5.2), проходят через эти точки (рис. 6, б), т.е. дают наблюдаемые в эксперименте характеристики ПАВ.

Заключение. Рассмотрено приложение интегрального подхода к анализу бегущих волн в анизотропных композитных пластинах. Показаны преимущества полученных

асимптотических представлений при решении задач неразрушающего ультразвуково-го контроля и определения эффективных упругих свойств композитных материалов.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01191).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
2. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 258 с.
3. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
4. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Методы построения матрицы Грина стратифицированного упругого полупространства // ЖВММФ. 1987. Т. 27. № 1. С. 93–101.
5. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Еремин А.А. и др.* Метод слоистых элементов в динамической теории упругости // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 4. С. 622–634.
6. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Фоменко С.И. и др.* Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // Акуст. ж. 2012. Т. 58. № 3. С. 370–385.
7. *Кристensen Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
8. *Ватульян А.О.* Контактные задачи со сцеплением для анизотропного слоя // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 727–734.
9. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Кривонос А.С.* Возбуждение и распространение упругих волн в многослойных анизотропных композитах // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 3. С. 419–432.
10. *Glushkov E., Glushkova N., Eremin A.* Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 129. № 5. P. 2923–2934.
11. *Kausel E.* Wave propagation in anisotropic layered media // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1986. V. 23. № 8. P. 1567–1578.
12. *Nayfeh A.H.* The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media // J. Acoust. Soc. Am. 1991. V. 89. № 4. P. 1521–1531.
13. *Lowe M.J.S.* Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 1995. V. 42. № 4. P. 525–542.
14. *Velichko A., Wilcox P.D.* Modelling the excitation of guided waves in generally anisotropic multilayered media // J. Acoust. Soc. Am. 2007. V. 121. P. 60–69.
15. *Kausel E.* Dynamic point sources in laminated media via the thin-layer method // Int. J. Solids Struct. 1999. V. 36. № 31–32. P. 4725–4742.
16. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in anisotropic plates (review) // Acoust. Phys. 2014. V. 60. P. 95–103.
17. *Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Prikazchikova L.A.* Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate // Int. J. Solids Struct. 2017. V. 113–114. P. 169–179.
18. *Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.* Solitary SH waves in two-layered traction-free plates // Comptes Rendus Mécanique. 2008. V. 336(1–2). P. 102–107.
19. *Giurgiutiu V.* Structural Health Monitoring of Aerospace Composites. Amsterdam: Acad. Press, 2016. 470 p.
20. *Giurgiutiu V.* Tuned Lamb wave excitation and detection with piezoelectric wafer active sensors for structural health monitoring // J. Intell. Mater. Syst. & Struct. 2005. V. 16. № 4. P. 291–305.
21. *Raghavan A., Cesnik C.E.S.* Finite-dimensional piezoelectric transducer modeling for guided wave based structural health monitoring // Smart Mater. Struct. 2005. V. 14. № 6. P. 1448–1461.
22. *Глушков Е.В., Сыромятников П.В.* Анализ волновых полей, возбуждаемых поверхностным гармоническим источником в анизотропном полупространстве. Краснодар, 1985. 11 с. Рукопись представлена Кубанским госуниверситетом, Деп. в ВИНТИ 07.08.85, № 5861–85.
23. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.
24. *Neau G., Deschamps M., Lowe M.J.S.* Group velocity of Lamb waves in anisotropic plates: comparison between theory and experiment // in: Rev. Progr. in Quantit. NDE / Ed. by Thompson D.O., Chimenti D.E. New York: AIP, 2001. P. 81–88.
25. *Wang L., Yuan F.G.* Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modeling and experiments // Composites Sci. & Technol. 2007. V. 67. № 8. P. 1370–1384.

26. Eremin A., Glushkov E., Glushkova N. et al. Guided wave time-reversal imaging of macroscopic localized inhomogeneities in anisotropic composites // *Struct. Health Monit.* 2019. V. 18. № 5–6. P. 1803–1819.
27. Glushkov E., Glushkova N., Bonello B. et al. Evaluation of effective elastic properties of nitride NWs/polymer composite materials using laser-generated surface acoustic waves // *Appl. Sci.* 2018. V. 8. № 11:2319.
28. Fink M., Cassereau D., Derode A. et al. Time-reversed acoustics // *Rep. Prog. Phys.* 2000. V. 63. № 12. P. 1933–1995.
29. Зеерев В.А. Принцип акустического обращения волн и голография // *Акуст. ж.* 2004. Т. 50. С. 792–801.
30. Eremin A., Glushkov E., Glushkova N. et al., Evaluation of effective elastic properties of layered composite fiber-reinforced plastic plates by piezoelectrically induced guided waves and laser Doppler vibrometry // *Compos. Struct.* 2015. V. 125. P. 449–458.
31. Lu L., Charron E., Glushkov E. et al. Probing elastic properties of nanowire-based structures // *Appl. Phys. Lett.* 2018. V. 113. № 16. P. 161903.

Guided Waves in Multilayered Anisotropic Composites

E. V. Glushkov^{a,*} and N. V. Glushkova^a

^a *Institute for Mathematics, Mechanics and Informatics KubSU, Krasnodar, Russia*

*e-mail: evg@math.kubsu.ru

The excitation of surface acoustic waves in multilayered arbitrarily anisotropic waveguides is considered. The article provides a brief overview of the explicit asymptotic representations derived within the framework of the integral approach developed by V.A. Babeshko in comparison with the classic modal analysis results. The practical application is illustrated by examples of ultrasonic evaluation of composites.

Keywords: composite materials, surface acoustic waves, integral and asymptotic representations, modal analysis, group velocity vector, ultrasonic inspection, effective elastic moduli

REFERENCES

1. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dynamic Mixed Problems of Elasticity for Non-Classical Domains.* (Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastej) Moscow: Nauka, 1979. 320 p. (in Russian)
2. Babeshko V.A. *Generalized Factorization Method in Dynamic Mixed Problems of Elasticity.* (Obobshchennyy metod faktorizatsii v dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti) Moscow: Nauka, 1984. 258 p. (in Russian)
3. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko J.F. *Dynamics of Inhomogeneous Linearly Elastic Media.* (Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred) Moscow: Nauka, 1989. 344 p. (in Russian).
4. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Glushkova N.V. Methods of constructing Green's matrix of a stratified elastic half-space // *USSR Comput. Math.&Math. Phys.*, 1987, vol. 27, no. 1, pp. 60–65.
5. Glushkov Ye.V., Glushkova N.V., Yeregin A.A., Mikhas'kiv V.V. The layered element method in the dynamic theory of elasticity // *JAMM*, 2009, vol. 73, pp. 449–456.
6. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Fomenko S.I., Zhang C. Surface waves in materials with functionally gradient coatings // *Acoust. Phys.*, 2012, vol. 58, no. 3, pp. 339–353.
7. Christensen R.M. *Mechanics of Composite Materials.* N.Y.: Wiley-Intersci., 1979. 348 p.
8. Vatul'ian A.O. Contact problem with adhesion for an anisotropic layer // *JAMM*, 1977, vol. 41, no. 4, pp. 745–752.
9. Glushkov Ye.V., Glushkova N.V., Krivonos A.S. The excitation and propagation of elastic waves in multilayered anisotropic composites // *JAMM*, 2010, vol. 74, pp. 297–305.
10. Glushkov E., Glushkova N., Eremin A. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites // *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, vol. 129, no. 5, pp. 2923–2934.

11. *Kausel E.* Wave propagation in anisotropic layered media // *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1986, vol. 23, no. 8, pp. 1567–1578.
12. *Nayfeh A.H.* The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media // *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991, vol. 89, no. 4, pp. 1521–1531.
13. *Lowe M.J.S.* Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, 1995, vol. 42, no. 4, pp. 525–542.
14. *Velichko A., Wilcox P.D.* Modeling the excitation of guided waves in generally anisotropic multi-layered media // *J. Acoust. Soc. Am.*, 2007, vol. 121, pp. 60–69.
15. *Kausel E.* Dynamic point sources in laminated media via the thin-layer method // *Int. J. Solids Struct.*, 1999, vol. 36, no. 31–32, pp. 4725–4742.
16. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in anisotropic plates (review) // *Acoust. Phys.*, 2014, vol. 60, pp. 95–103.
17. *Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Prikazchikova L.A.* Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate // *Int. J. Solids Struct.*, 2017, vol. 113–114, pp. 169–179.
18. *Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.* Solitary SH waves in two-layered traction-free plates // *Comptes Rendus Mécanique*, 2008, vol. 336, no. 1–2, pp. 102–107.
19. *Giurgiutiu V.* *Structural Health Monitoring of Aerospace Composites.* Amsterdam: Acad. Press, 2016. 470 p.
20. *Giurgiutiu V.* Tuned Lamb wave excitation and detection with piezoelectric wafer active sensors for structural health monitoring // *J. Intell. Mater. Syst. & Struct.*, 2005, vol. 16, no. 4, pp. 291–305.
21. *Raghavan A., Cesnik C.E.S.* Finite-dimensional piezoelectric transducer modeling for guided wave based structural health monitoring // *Smart Mater. Struct.*, 2005, vol. 14, no. 6, pp. 1448–1461.
22. *Glushkov E.V., Syromyatnikov P.V.* Analysis of wave fields excited by a harmonic surface source in an anisotropic half-space // Krasnodar, 1985. Manuscript presented at the Kuban State University. Deposited at VINITI 7 August 1985, No. 5861–85.
23. *Fedoryuk M.V.* *Saddle-Point Method (Metod perevala).* Moscow: Nauka, 1977. 368 p. (in Russian)
24. *Neau G., Deschamps M., Lowe M.J.S.* Group velocity of Lamb waves in anisotropic plates: Comparison between theory and experiment // in: *Rev. Progr. in Quantit. NDE / Ed. by Thompson D.O., Chimenti D.E.* N.Y.: AIP, 2001. pp. 81–88.
25. *Wang L., Yuan F.G.* Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modeling and experiments // *Compos. Sci. & Technol.*, 2007, vol. 67, no. 8, pp. 1370–1384.
26. *Eremin A., Glushkov E., Glushkova N. et al.* Guided wave time-reversal imaging of macroscopic localized inhomogeneities in anisotropic composites // *Struct. Health Monit.*, 2019, vol. 18, no. 5–6, pp. 1803–1819.
27. *Glushkov E., Glushkova N., Bonello B. et al.* Evaluation of effective elastic properties of nitride NWs/polymer composite materials using laser-generated surface acoustic waves // *Appl. Sci.*, 2018, vol. 8, no. 11:2319.
28. *Fink M., Cassereau D., Derode A. et al.* Time-reversed acoustics // *Rep. Prog. Phys.*, 2000, vol. 63, no. 12, pp. 1933–1995.
29. *Zverev V.A.* The principle of acoustic time reversal and holography // *Acoust. Phys.*, 2004, vol. 50, pp. 685–693.
30. *Eremin A., Glushkov E., Glushkova N. et al.* Evaluation of effective elastic properties of layered composite fiber-reinforced plastic plates by piezoelectrically induced guided waves and laser Doppler vibrometry // *Compos. Struct.*, 2015, vol. 125, pp. 449–458.
31. *Lu L., Charron E., Glushkov E. et al.* Probing elastic properties of nanowire-based structures // *Appl. Phys. Lett.*, 2018, vol. 113, no. 16:161903.