ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 3, с. 277–284

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ЧЕТВЕРТЬ ПЛОСКОСТИ

© 2021 г. В. А. Бабешко[1,2,*], О. В. Евдокимова[1,], О. М. Бабешко[2,***]**

[1] Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия
[2] Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия
**e-mail: babeshko41@mail.ru*
***e-mail: evdokimova.olga@mail.ru*
****e-mail: babeshko49@mail.ru*

Поступила в редакцию 28.01.2021 г.
После доработки 24.02.2021 г.
Принята к публикации 12.03.2021 г.

В работе, впервые, координатным методом блочного элемента строится точное решение в первом квадранте плоской граничной задачи второго рода для динамических уравнений упругости Ламе, разложенное по решениям граничных задач для уравнения Гельмгольца. В более ранней работе авторов решение было построено интегродифференциальным методом. Точные решения векторных граничных задач скалярными в неклассических областях позволяют упростить решения граничных задач в средах сложной реологии и извлечь ранее упускавшиеся, при использовании иных подходов, сведения о некоторых процессах и явлениях в механике и физике.

Ключевые слова: граничные задачи, метод блочного элемента, упакованные блочные элементы, уравнения Ламе, уравнения Гельмгольца

DOI: 10.31857/S0032823521030024

1. Введение. В работе построено решение векторной граничной задачи, разложенное по упакованным блочным элементам, которые являются решениями скалярных граничных задач в неклассических областях. Решения ряда векторных дифференциальных уравнений в частных производных механики сплошных сред, электромагнитных явлений, теории поля допускают представления в виде разложений по решениям скалярных уравнений. В его основе лежит преобразование Б.Г. Галеркина [1, 2]. Этот подход удобен при решении задач во всем пространстве и в ряде классических областей. К ним относятся такие области, как полупространство, шар, цилиндр, а также в некоторые области, получаемые в результате представлений групп преобразований пространства [3]. В то же время для ряда важных областей, отличных от классических, например, клиновидных, прямоугольных, в форме полуполос и полуплит построение точных решений этим подходом пока не удавалось осуществить. Основная сложность при решении граничных задач этим подходом в неклассических областях состоит в трудности удовлетворения граничных условий.

Ранее в работе авторов [4] разложение решения векторной граничной задачи с помощью скалярных было построено интегродифференциальным методом. В настоящей работе, развит иной подход, названный координатным, также основанный на методе блочного элемента. Впервые, этим подходом строится точное решение в первом квадранте плоской граничной задачи второго рода для динамических уравнений Ламе.

Известно, что неограниченность области делает неэффективным использование в этой граничной задаче численных методов. Решение строится при произвольных граничных условиях. Это открывает возможность изучить различные свойства решений, изменяя воздействия на границе. В отличие от работы авторов [5] в данном исследовании используются продольный и поперечный потенциалы, которые удовлетворяют уравнениям Гельмгольца. Построение точных решений граничных задач в практических применениях позволяет выявлять свойства и явления, которые оказывались упущенными при использовании различных приближенных подходов. Так, разработанный недавно метод блочного элемента позволил выявить условия возникновения некоторых типов землетрясений [6, 7]. Этот же метод дал возможность обнаружить существование нового типа трещин, дополняющих трещины Гриффитса [8]. Исследованию граничных задач для уравнения Ламе посвящено огромное количество работ, содержащих как аналитические, так и численные исследования, выполненные более чем за полтора века. Все публикации в этой области невозможно охватить. Отметим те из них, где удавалось построить точные аналитические решения некоторых типов граничных задач для векторных уравнений Ламе в неклассических областях. Опустим из рассмотрения многочисленные работы, посвященные граничным задачам в полупространстве и слоистой среде, где преобразование Фурье решает проблему. В сферических областях следует отметить работы, посвященные построению собственных векторных функций [3]. Этот подход развивался для применения в цилиндрических, эллиптических, клиновидных, конических областях [9, 10].

Как отмечено выше, сложность применения этого метода разложения векторных граничных задач скалярными в материалах разных реологий в неклассических областях объясняется трудностью удовлетворения граничных условий. Поэтому в работах [11—13], в которых построены важные соотношения представления решений векторных граничных задач скалярными, решения построены только для полупространства и слоя. Представление этого решения в виде разложения по блочным элементам, являющееся решениями скалярных граничных задач в неклассических областях, делает возможность углубленного исследования свойств решений векторных граничных задач выполнимым.

2. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую граничную задачу второго рода для системы уравнений Ламе, поставленную в первом квадранте при гармонических воздействиях на границе. Ранее точное ее решение получить не удавалось, однако метод блочного элемента в настоящей работе дает возможность это сделать в форме упакованных векторных блочных элементов.

В первом квадранте динамические уравнения Ламе после исключения члена $\exp(-i\omega t)$ имеют вид

$$\begin{gathered}(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\mu\Delta u_1+k^2u_1=0,\quad \theta=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad k^2=\rho\omega^2\\ (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+\mu\Delta u_2+k^2u_2=0,\quad x_1,x_2\in\Omega,\quad \Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\end{gathered}\tag{2.1}$$

Здесь $u_n(x_1,x_2)$ — компоненты векторов перемещений в точке x_1, x_2, Ω — область первого квадранта $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$, λ, μ — параметры Ламе, ρ — плотность материала деформируемого тела, ω — частота внешних гармонических воздействий на границе, задаваемых комплексной функцией $\exp(-i\omega t)$, где t — время. В задаче первого рода значения напряжений на границах квадранта обозначаются на оси абсцисс функциями $X_{11}(x_1,0)$, $X_{12}(x_1,0)$ и $Y_{11}(0,x_2)$, $Y_{12}(0,x_2)$ — на оси ординат. Нормальные к границе напряжения обозначаются символом X, а касательные — Y. В задаче второго рода на границе первого квадранта задаются компоненты векторов перемещения $u_1(x_1, 0)$, $u_2(x_1, 0)$ и $u_1(0, x_2)$, $u_2(0, x_2)$.

3. Метод исследования. Достаточно давно было замечено, что уравнения Ламе как в статическом, так и в динамическом случаях обладают свойством представления решения в виде сумм решений скалярных граничных задач [11–13].

Следуя [11–13], примем разложение решения уравнений Ламе в следующей форме:

$$u_1(x_1,x_2) = \partial_1\varphi(x_1,x_2) + \partial_2\psi(x_1,x_2), \quad u_2(x_1,x_2) = \partial_2\varphi(x_1,x_2) - \partial_1\psi(x_1,x_2)$$
$$\partial_1 = \partial/\partial x_1, \quad \partial_2 = \partial/\partial x_2 \tag{3.1}$$

Здесь приняты обозначения

$$(\Delta + p_1^2)\varphi = 0, \quad (\Delta + p_2^2)\psi = 0, \quad p_1^2 = k_1^2(\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad p_2^2 = k_1^2\mu^{-1}$$
$$\varphi(x_1,0) = f_1(x_1,0), \quad \varphi(0,x_2) = f_2(0,x_2) \tag{3.2}$$
$$\psi(x_1,0) = g_1(x_1,0), \quad \psi(0,x_2) = g_2(0,x_2)$$

Функции f_m, g_m, $m = 1,2$, в граничных условиях являются произвольными, удовлетворяющими лишь условиям корректности постановки граничной задачи. В частности, их можно брать из следов пространства медленно растущих обобщенных функций, в котором ищутся решения граничной задачи в области Ω.

Далее рассматривается случай граничной задачи Ламе второго рода для области Ω, в которой на границах задаются $u_n(x_1,0)$, $u_n(0,x_2)$, $n = 1,2$.

Таким образом, для решений уравнения Гельмгольца формируются граничные условия при $x_2 \to 0$ вида

$$\partial_1\varphi(x_1,x_2) + \partial_2\psi(x_1,x_2) = u_1(x_1,0), \quad \partial_2\varphi(x_1,x_2) - \partial_1\psi(x_1,x_2) = u_2(x_1,0) \tag{3.3}$$

Аналогично при $x_1 \to 0$

$$\partial_1\varphi(x_1,x_2) + \partial_2\psi(x_1,x_2) = u_1(0,x_2), \quad \partial_2\varphi(x_1,x_2) - \partial_1\psi(x_1,x_2) = u_2(0,x_2) \tag{3.4}$$

Решение граничной задачи для уравнений Ламе с граничными условиями (3.3), (3.4) требует построения решений граничных задач для уравнений Гельмгольца при произвольных граничных условиях (3.2). Это возможно сделать, используя метод блочного элемента, который описан в работах [4–7]. Примеры решения различных граничных задач с использованием решений уравнений Гельмгольца имеются в работах [14–17]. Решение граничной задачи в первом квадранте, выполненное методом блочного элемента, имеется в [14]. В упакованном виде в первом квадранте в случае граничной задачи Дирихле для уравнений Гельмгольца решения имеют вид

$$\varphi(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{R^2} \frac{\omega_1(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p_1^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2$$
$$\psi(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{R^2} \frac{\omega_2(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p_2^2)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 \tag{3.5}$$

В результате вычислений получаем следующее представление решений каждой граничной задачи

$$\varphi(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{R^2}\sum_{j=1}^{2}\left(\alpha_{3-j} - \alpha_{(3-j)1+}\right)\left\langle F_j(\alpha_j) - F_j(\alpha_{j1+})\right\rangle e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} \frac{i d\alpha_1 d\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p_1^2}$$

$$\psi(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{R^2}\sum_{j=1}^{2}\left(\alpha_{3-j} - \alpha_{(3-j)2+}\right)\left\langle G_j(\alpha_j) - G_1(\alpha_{j2+})\right\rangle e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} \frac{i d\alpha_1 d\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p_2^2}$$

$$\alpha_{11+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{21+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{12+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_2^2}, \quad \alpha_{22+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p_2^2}$$

Последние выражения представимы в виде

$$\varphi(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{2}\iint_{R^2}\frac{F_j(\alpha_j) - F_j(\alpha_{j1+})}{\alpha_{3-j} + \alpha_{(3-j)1+}}e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}id\alpha_1d\alpha_2$$

$$\psi(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{2}\iint_{R^2}\frac{G_j(\alpha_j) - G_1(\alpha_{j2+})}{\alpha_{3-j} + \alpha_{(3-j)2+}}e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}id\alpha_1d\alpha_2$$

Вычислим преобразования Фурье

$$\Phi(\alpha_1,x_2) = \int_0^\infty \varphi(x_1,x_2)e^{i\alpha_1x_1}dx_1, \quad \Phi(x_1,\alpha_2) = \int_0^\infty \varphi(x_1,x_2)e^{i\alpha_2x_2}dx_2$$

$$\Psi(\alpha_1,x_2) = \int_0^\infty \psi(x_1,x_2)e^{i\alpha_1x_1}dx_1, \quad \Psi(x_1,\alpha_2) = \int_0^\infty \psi(x_1,x_2)e^{i\alpha_2x_2}dx_2$$

Проведя исследования построенных преобразований Фурье для $\Phi(\alpha_1,x_2)$ и $\Psi(\alpha_1,x_2)$ вблизи границы $0 < x_2 \ll 1$ и отбросив исчезающие интегралы при $x_2 = 0$, получим соответственно представления вида

$$\Phi(\alpha_1,x_2) = F_1(\alpha_1)e^{i(\alpha_{21+}x_2)}, \quad \Psi(\alpha_1,x_2) = G_1(\alpha_1)e^{i(\alpha_{22+}x_2)}$$

Проделав аналогичные действия вблизи границы $x_1 = 0$ с функциями $\Phi(x_1,\alpha_2)$, $\Psi(x_1,\alpha_2)$ при $0 < x_1 \ll 1$, получаем выражения в форме

$$\Phi(x_1,\alpha_2) = F_2(\alpha_2)e^{i(\alpha_{11+}x_1)}, \quad \Psi(x_1,\alpha_2) = G_2(\alpha_2)e^{i(\alpha_{12+}x_1)}$$

4. Полученные результаты. На основании полученных выражений, сформируем представления решений граничных задач вблизи границ $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Имеем

$$\varphi(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\alpha_1,x_2)e^{-i\alpha_1x_1}d\alpha_1$$

$$\psi(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(\alpha_1,x_2)e^{-i\alpha_1x_1}d\alpha_1, \quad 0 < x_2 \ll 1$$

$$\varphi(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2x_2}d\alpha_2$$

$$\psi(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2x_2}d\alpha_2, \quad 0 < x_1 \ll 1$$

Отсюда получаем

$$\varphi(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\alpha_1)e^{i(\alpha_{21+}x_2)}e^{-i\alpha_1x_1}d\alpha_1$$

$$\psi(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_1(\alpha_1)e^{i(\alpha_{22+}x_2)}e^{-i\alpha_1x_1}d\alpha_1, \quad 0 < x_2 \ll 1$$

$$\varphi(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_2(\alpha_2)e^{i(\alpha_{11+}x_1)}e^{-i\alpha_2x_2}d\alpha_2$$

$$\psi(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_2(\alpha_2)e^{i(\alpha_{12+}x_1)}e^{-i\alpha_2x_2}d\alpha_2, \quad 0 < x_1 \ll 1$$

Для нахождения искомых граничных условий решений скалярных граничных задач, с целью построения решений векторных граничных задач, используем формулы (3.3), (3.4) представления решений векторных задач через скалярные. Имеем при $x_2 \to 0$

$$\partial_1\varphi(x_1,x_2)+\partial_2\psi(x_1,x_2)=u_1(x_1,0),\quad \partial_2\varphi(x_1,x_2)-\partial_1\psi(x_1,x_2)=u_2(x_1,0) \tag{4.1}$$

Аналогично при $x_1 \to 0$

$$\partial_1\varphi(x_1,x_2)+\partial_2\psi(x_1,x_2)=u_1(0,x_2),\quad \partial_2\varphi(x_1,x_2)-\partial_1\psi(x_1,x_2)=u_2(0,x_2) \tag{4.2}$$

В результате вычислений, находим значения граничных условий в граничных задачах для уравнений Гельмгольца, которые обеспечат выполнения граничных условий векторной граничной задачи. Эти условия имеют вид

$$\begin{gathered}F_1(\alpha_1)=i\Delta_1^{-1}\left[\alpha_1U_1(\alpha_1,0)-\alpha_{22+}U_2(\alpha_1,0)\right]\\ G_1(\alpha_1)=-i\Delta_1^{-1}\left[\alpha_{21+}U_1(\alpha_1,0)+\alpha_1U_2(\alpha_1,0)\right],\quad \Delta_1=\alpha_1^2+\alpha_{21+}\alpha_{22+}\end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered}F_2(\alpha_2)=i\Delta_2^{-1}\left[\alpha_2U_1(0,\alpha_2)-\alpha_{12+}U_2(0,\alpha_2)\right]\\ G_2(\alpha_2)=-i\Delta_2^{-1}\left[\alpha_{11+}U_1(0,\alpha_2)+\alpha_1U_2(0,\alpha_2)\right],\quad \Delta_2=\alpha_2^2+\alpha_{11+}\alpha_{12+}\end{gathered} \tag{4.4}$$

Внеся найденные значения функций в представления внешних форм (3.5), с помощью соотношений (4.3), (4.4), имеем возможность проверить выполнение граничных условий векторной граничной задачи из разложений по решениям скалярных граничных задач. Осуществив вычисления по указанным формулам при $0<x_2\ll 1$, и выполнив последующий предельный переход при $x_2 \to 0$, имеем

$$\Delta_1^{-1}\left\langle[\alpha_1^2U_1(\alpha_1,0)-\alpha_1\alpha_{22+}U_2(\alpha_1,0)]+\alpha_{22+}[\alpha_{21+}U_1(\alpha_1,0)+\alpha_1U_2(\alpha_1,0)]\right\rangle=U_1(\alpha_1,0)$$

$$\begin{gathered}\Delta_1^{-1}\left\langle[-\alpha_{21+}\alpha_1U_1(\alpha_1,0)+\alpha_{21+}\alpha_{22+}U_2(\alpha_1,0)]+\right.\\ \left.+\,\alpha_1\left[\alpha_{21+}U_1(\alpha_1,0)+\alpha_1U_2(\alpha_1,0)\right]\right\rangle=U_2(\alpha_1,0)\end{gathered}$$

Проделав аналогичные вычисления при $0<x_1\ll 1$ и последующий предельный переход при $x_1\to 0$, получаем

$$\Delta_2^{-1}\left\langle[\alpha_2^2U_1(0,\alpha_2)-\alpha_2\alpha_{12+}U_2(0,\alpha_2)]+\alpha_{12+}\left[\alpha_{11+}U_1(0,\alpha_2)+\alpha_2U_2(0,\alpha_2)\right]\right\rangle=U_1(0,\alpha_2)$$

$$\begin{gathered}\Delta_2^{-1}\left\langle[-\alpha_{11+}\alpha_2U_1(0,\alpha_2)+\alpha_{11+}\alpha_{12+}U_2(0,\alpha_2)]+\right.\\ \left.+\,\alpha_2\left[\alpha_{11+}U_1(0,\alpha_2)+\alpha_2U_2(0,\alpha_2)\right]\right\rangle=U_2(0,\alpha_2)\end{gathered}$$

$$U_n(\alpha_1,0)=\int_0^\infty u_n(x_1,0)e^{i\alpha_1x_1}dx_1,\quad U_n(0,\alpha_2)=\int_0^\infty u_n(0,x_2)e^{i\alpha_2x_2}dx_2;\quad n=1,2$$

Таким образом, построенные формулы (4.3), (4.4) граничных условий решений граничных задач для уравнений Гельмгольца в первом квадранте, внесенные в представление внешних форм упакованных блочных элементов (3.5), дают точное решение граничной задачи второго рода для уравнений Ламе при произвольных граничных условиях в первом квадранте.

В работе рассмотрен простейший случай неклассической области для граничной задачи для уравнения Ламе в качестве иллюстрации. Переход к более сложным областям будет зависеть от успехов построения точных решений для скалярных граничных задач. Этот подход освобождает исследователя от необходимости применения к векторным граничным задачам дифференциальной факторизации матриц-функций функциональных уравнений и построения достаточно сложных представлений их решений, пример которого дан в [18].

Выводы. Полученный результат открывает перспективу более глубокого исследования свойств векторных граничных задач, опираясь на достаточно полно изученные свойства решений граничных задач для уравнений Гельмгольца [14]. Построенное разложение решения векторной граничной задачи с помощью решений скалярных граничных задач позволяет изучить некоторые вопросы моделирования наноматериалов. Построив топологическую дискретизацию решений граничных задач для скалярных уравнений [19], оказывается возможным построить топологическую дискретизацию решений векторных граничных задач и получать их решения в более сложных неклассических областях, чем рассмотренные. Последнее открывает возможность строго математически построить механическую концепцию самоорганизации и самосборки некоторых типов наноматериалов, частицы которых могут быть наделены многокомпонентными параметрами сложной реологии. Математические модели такого материала описываются дискретными топологическими пространствами, наследующими свойства отдельных наночастиц [19].

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации госзадания на 2021 г. Минобрнауки, проект (FZEN-2020-0020), ЮНЦ РАН проект (00-20-13) № госрег. 01201354241, и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014, 18-05-80008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Galerkin B.G.* Contribution a la solution generale du probleme de la theorie de lelastisitecas de trois-dimensions // C.R. Acad. Sci. 1930. V. 190. P. 1047–1048; 1931. V. 193. P. 568–571.
2. *Moisil G.C.* Asupra sistemelor de ecuatii cu derivate partiale lineare si cu coeficienti constanti // Bull. Sci. Acad. RPR. ser. A. 1949. V. 1.
3. *Гельфанд И.М., Минлос З.А., Шапиро З.Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Гл. ред. физ-мат. лит., 1958. 368 с.
4. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Евдокимов В.С.* Метод блочного элемента в разложении решений сложных задач механики // Докл. РАН. 2020. Т. 495. №6. С. 34–38.
5. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Евдокимов В.С., Федоренко А.Г., Елецкий Ю.Б.* О векторных блочных элементах в задачах механики// Эколог. вестн. научн. центров Черном. эконом. сотрудн. 2019. Т. 16. № 3. С. 23–27.
6. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // Acta Mech. 2018. V. 229. № 5. P. 2163–2175.
7. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of litospheric plates // Acta Mech. 2018. V. 229. № 11. P. 4727–4739.
8. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Трещины нового типа и модели некоторых наноматериалов // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 13–20.
9. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 262 с.
10. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.
11. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
12. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
13. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 162 с.
14. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К проблеме акустических и гидродинамических свойств среды, занимающей область трехмерного прямоугольного клина // ПМТФ. 2019. Т. 60. № 6. С. 90–96.
15. *Ткачева Л.А.* Поведение плавающей пластины при колебаниях участка дна // ПМТФ. 2005. Т. 46. № 2 (270). С. 98–108.
16. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 502 с.
17. *Бабич В.М.* О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца // Математ. сб. 1964. Т. 65. С. 577–630.

18. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Применение метода блочного элемента в одной граничной задаче академика И.И. Воровича // Докл. РАН. 2020. Т. 493. С. 42–47.
19. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Бушуева О.А.* Топологическая дискретизация решений граничных задач механики сплошных сред // Эколог. вестн. научн. центров Черном. эконом. сотрудн. 2020. Т. 17. №3. С. 65–71.

On a Method for Solving Boundary Value Problems of the Dynamic Theory of Elasticity in a Quarter Plane

V. A. Babeshko[a,b,#], O. V. Evdokimova[a,##], and O. M. Babeshko[b,###]

[a] *Federal Research Centre the Southern Scientific Centre RAS, Rostov-on-Don, Russia*
[b] *Kuban State University, Krasnodar, Russia*
[#]*e-mail: babeshko41@mail.ru*
[##]*e-mail: evdokimova.olga@mail.ru*
[###]*e-mail: babeshko49@mail.ru*

The coordinate method block element is constructed exact solution in the first quadrant of the two-dimensional boundary value problems of the second kind for the dynamic equations of elasticity Lama, laid out on solutions of boundary-value problems of the Helmholtz equation. In the earlier work of the authors, the solution was constructed by the integro-differential method. Exact solutions of vector boundary value problems using scalar ones in nonclassical domains make it possible to simplify solutions in environments with complex rheology and to obtain information about processes and phenomena in mechanics and physics that were not previously noted when using other approaches. The features of the block element method are that, being in a packed form, they represent the solution of the boundary value problem strictly on their carrier. Another feature is the ability of the method to accurately solve boundary value problems in non-classical domains – quarter plane, half-strip, rectangle, wedge. A method is developed that makes it possible to simplify solutions in nonclassical domains of vector boundary value problems, that is, those described by systems of partial differential equations, by decomposing them using solutions of scalar boundary value problems, that is, those described by separate differential equations. The latter are solved by the block element method quite simply.

REFERENCES

1. *Galerkin B.G.* Contribution à la solution générale du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimensions // Comptes Rendus Acad. Sci., 1930, vol. 190, pp. 1047–1048; 1931, vol. 193, pp. 568–571. (in French)
2. *Moisil G.C.* Asupra sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale lineare şi cu coeficienţi constanti // Bul. sţiinţ. Acad. Rep. Pop. Române, ser. A, 1949, vol. 1, pp. 341. (in Romanian)
3. *Gelfand I.M., Minlos Z.A., Shapiro Z.Ya.* Representations of the Rotation Group and the Lorentz Group, Their Applications. Moscow: Nauka, 1958. (in Russian)
4. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S.* The block element method in the expansion of solutions to complex problems in mechanics // Dokl. RAN, 2020, vol. 495(6), pp. 34–38. (in Russian)
5. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S., Fedorenko A.G., Eletskiy Yu.B.* On vector block elements in mechanics problems // Ecolog. Bull. Res. Centers of the Black Sea Econom. Cooper., 2019, vol. 16(3), pp. 23–27. (in Russian)
6. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // Acta Mech., 2018, vol. 229(5), pp. 2163–2175.
7. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of lithospheric plates // Acta Mech., 2018, vol. 229(11), pp. 4727–4739.
8. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* Cracks of a new type and models of some nano materials // Mech. Solids, 2020, no. 5, pp. 13–20. (in Russian)

9. *Ulitko A.F.* The Method of Eigenvector Functions in Spatial Problems of Elasticity Theory. Kiev: Nauk. Dumka, 1979. (in Russian)
10. *Grinchenko V.T., Meleshko V.V.* Harmonic Vibrations and Waves in Elastic Bodies. Kiev: Nauk. Dumka, 1981. (in Russian)
11. *Novatskiy V.* Elasticity Theory. Moscow: Mir, 1975. (in Russian)
12. *Novatskiy V.* Dynamic Problems of Thermoelasticity. Moscow: Mir, 1970. (in Russian)
13. *Novatskiy V.* Electromagnetic Effects in Solids. Moscow: Mir, 1986. (in Russian)
14. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the problem of acoustic and hydrodynamic properties of a medium occupying the area of a three-dimensional rectangular wedge // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 2019, vol. 60(6), pp. 90–96. (in Russian)
15. *Tkacheva L.A.* Behavior of the floating plate when the bottom section vibrates // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 2005, vol. 46(2), pp. 98–108. (in Russian)
16. *Brekhovskikh L.M.* Waves in Layered Media. Moscow: Nauka, 1973. (in Russian)
17. *Babich V.M.* On the short-wavelength asymptotics of the Green's function for the Helmholtz equation // Sb. Math., 1964, vol. 65, pp. 577–630. (in Russian)
18. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* Application of the block element method in one boundary-value problem of academician I.I. Vorovich // Dokl. RAN, 2020, vol. 493, pp. 42–47. (in Russian)
19. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Bushueva O.A.* Topological discretization of solutions to boundary value problems in continuum mechanics // Ecolog. Bull. Res. Centers of the Black Sea Econom. Cooper., 2020, vol. 17(3), pp. 65–71. (in Russian)