ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2021, том 85, № 2, с. 139–151

УДК 531.38; 531.39

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

Г. В. Горр[1],*, Т. В. Белоконь[2],**

[1] *Институт прикладной математики и механики, Донецк, Украина*

[2] *Донецкий национальный университет экономики и торговли им. М. Туган-Барановского, Донецк, Украина*

**e-mail: gvgorr@gmail.com*

***e-mail: B.Tatyana13@mail.ru*

Поступила в редакцию 22.06.2020 г.
После доработки 12.10.2020 г.
Принята к публикации 20.10.2020 г.

Рассмотрена задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. Получено три новых решения уравнений движения, которые определяются тремя линейными инвариантными соотношениями (ИС) на компоненты вектора угловой скорости. Для случая тяжелого гиростата найдено решение, которое характеризуется обобщенными условиями класса Ковалевской и Горячева–Чаплыгина. Два следующих решения имеют место для уравнений класса Кирхгофа–Пуассона. Одно из них существует в случае динамически симметричных гиростатов, а в другом решении распределение масс произвольно.

Ключевые слова: гиростатический момент, инвариантные соотношения, потенциальные и гироскопические силы, обобщенные условия Ковалевской, Горячева–Чаплыгина

DOI: 10.31857/S0032823521020053

Введение. Задача о движении гиростата, имеющего неподвижную точку, является обобщением классической задачи, которая описывается уравнениями Эйлера–Пуассона. Постановка задачи о движении гиростата и первые результаты получены [1–4] и др. В динамике гиростата применяются различные определения и типы гиростатов, что связано с рассмотрением различных постановок. *Первая* постановка состоит в том, что изучается система твердых тел S, состоящая из тела-носителя S_0 и несомых роторов $S_1, \dots, S_n$, вращающихся вокруг своих осей симметрии. В частности, в этой постановке рассматриваются гиростаты [1]. В монографии [5] дается полное определение гиростата со ссылкой на статью [4]. Основное предположение в данном определении состоит в том, что распределение масс системы S не изменяется с течением времени. Кроме этого, при изучении движения гиростатов [1] полагается, что они имеют постоянные относительные компоненты суммарного кинетического момента, вычисленные по отношению к телу-носителю. Рассматривается [6, 7] движение гиростата, которое является статически и динамически уравновешенным [6], или характеризуется свойством динамической симметрии роторов, вращающихся вокруг своих барицентрических осей [7]. Если гиростатический момент гиростата постоянен, то, например, уравнения движения тяжелого гиростата имеют три первых интеграла.

Вторая постановка задачи о движении гиростата (гиростаты Жуковского—Вольтерра) характеризуется тем, что в ней рассматриваются системы, образованные телом-носителем с внутренними полостями с циркулирующей в них жидкостью.

С прикладной точки зрения важным свойством движения гиростата служит учет переменности гиростатического момента [7, 8]. Данное обстоятельство учитывается при исследовании спутников-гиростатов [9—11]. Особое значение имеет математическое моделирование движения гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, так как оно позволяет установить базовые свойства динамики гиростата с переменным гиростатическим моментом. В этом направлении опубликовано много исследований, среди которых отметим статьи [11, 12], а также монографию [13], в которой дан обзор результатов, полученных в динамике неавтономного гиростата. В последней монографии основное внимание уделено анализу результатов по исследованию прецессионных движений гиростата. Данная статья посвящена интегрированию уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил.

Для исследования условий существования решений уравнений движения гиростата применен метод инвариантных соотношений (ИС). Этот метод разработан в [5, 14] и обобщен в статье [15]. Метод ИС использован [16, 17] применительно к другим задачам динамики. Данный подход связан с тем, что в общем случае уравнения динамики твердого тела и гиростата неинтегрируемы в квадратурах по Якоби [18, 19]. В данной статье рассмотрена задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил на заданных ИС уравнений движения. Построены три новых решения в динамике неавтономного гиростата. Для случая тяжелого гиростата условия существования характеризуются следующими условиями на распределение масс гиростата: гиростат динамически симметричен, центр масс лежит в экваториальной плоскости (обобщенные условия Ковалевской и Горячева—Чаплыгина). Два следующих решения имеют место в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил; одно из них выполняется для тех же классов гиростатов, а другое соответствует случаю произвольного распределения масс гиростата.

1. Постановка задачи. Многие задачи динамики твердого тела и гиростата описываются системой дифференциальных уравнений, которая содержит уравнения Пуассона [20—25]

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — вектор, характеризующий направление оси симметрии силового поля; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости тела-носителя гиростата; точка над переменной $\boldsymbol{\nu}$ обозначает относительную производную по времени t.

Был изучен [25] важный класс инвариантных соотношений (ИС), которые имеют вид [25, 26]

$$\omega_1 = \nu_1\varepsilon + \beta_1 g, \quad \omega_2 = \nu_2\varepsilon + \beta_2 g, \quad \omega_3 = h, \tag{1.2}$$

где β_1, β_2 — постоянные параметры, $\varepsilon = \varepsilon(\nu_3)$, $g = g(\nu_3)$, $h = h(\nu_3)$ — дифференцируемые функции переменной ν_3. Особенность ИС (1.2) состоит в том, что уравнение (1.1), которое в скалярной форме приводится к системе уравнений [25]

$$\dot{\nu}_1 = \nu_2(h - \nu_3\varepsilon) - \beta_2\nu_3 g, \quad \dot{\nu}_2 = \nu_1(\nu_3\varepsilon - h) + \beta_1\nu_3 g, \quad \dot{\nu}_3 = (\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2)g, \tag{1.3}$$

допускает интегральное представление

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 + \int \frac{[h - \nu_3\varepsilon]d\nu_3}{g} = c_0, \tag{1.4}$$

где c_0 — произвольная постоянная. Наличие соотношения (1.4) позволило построить новые классы решений уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, в потенциальном силовом поле [25, 26], которые изучены в [27]. Но в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом ИС (1.2) не рассматривались.

Запишем уравнения движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [23–25, 28]. В качестве подвижной системы координат $Oxyz$ с единичными векторами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ выберем главную систему координат тела-носителя:

$$\dot{\mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}} = (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}(t)) \times a\mathbf{x} + a\mathbf{x} \times B\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu} \tag{1.5}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\mathbf{x}, \tag{1.6}$$

где a – гирационный тензор: $a = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3)$, $B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $C = \operatorname{diag}(C_1, C_2, C_3)$; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – постоянный вектор. Запишем ИС (1.2) в компонентах вектора $\mathbf{x}$. Используя равенства $x_i = \omega_i / a_i$ $(i = \overline{1,3})$, из (1.2) получим [25]

$$x_1 = \frac{1}{a_1}(\nu_1\varepsilon + \beta_1 g), \quad x_2 = \frac{1}{a_2}(\nu_2\varepsilon + \beta_2 g), \quad x_3 = \frac{1}{a_3}h \tag{1.7}$$

Будем полагать, что вектор гиростатического момента имеет вид [7]

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \sum_{i=1}^{3} D_i(a\mathbf{x} \cdot \mathbf{i}_i + \dot{\kappa}_i)\mathbf{i}_i, \tag{1.8}$$

где D_i – моменты инерции несомых тел S_i относительно главных осей инерции; $\dot{\kappa}_i$ – угловые скорости вращения этих тел вокруг осей l_i, направленных по главным осям инерции. Общий момент количества движения гиростата (S_0, S_1, S_2, S_3) выражается по формуле [7]

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}(t) \tag{1.9}$$

В равенстве (1.9) $\mathbf{x} = A\boldsymbol{\omega}$, где $A = a^{-1}$ – тензор инерции, функция $\boldsymbol{\lambda}(t)$ определена равенством (1.8). Если уравнения (1.5), (1.6) проинтегрировать, то необходимо дополнительно рассмотреть уравнения

$$D_i \dot{p}_i(t) = L_i(t) \quad (i = \overline{1,3}), \tag{1.10}$$

в которых, в силу (1.8), $p_i(t)$ имеют вид

$$p_i = a\mathbf{x} \cdot \mathbf{i}_i + \dot{\kappa}_i \tag{1.11}$$

В уравнениях (1.10) правая часть $L_i(t)$ – проекция на l_i внутренних сил, действующих со стороны тела-носителя на тела S_i.

Уравнения (1.5), (1.6) допускают два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}(t)) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \tag{1.12}$$

где k – произвольная постоянная.

2. Случай тяжелого гиростата. Положим в уравнениях (1.5), (1.12) $B = 0$, $C = 0$, $\lambda_1(t) = 0$, $\lambda_2(t) = 0$ и запишем (1.6) в скалярном виде:

$$a_2 x_2 \lambda_3(t) = -\dot{x}_1 + (a_3 - a_2)x_2 x_3 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2 \tag{2.1}$$

$$a_1 x_1 \lambda_3(t) = \dot{x}_2 - (a_1 - a_3)x_3 x_1 - s_3\nu_1 + s_1\nu_3 \tag{2.2}$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = -\dot{x}_3 + (a_2 - a_1)x_1 x_2 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1 \tag{2.3}$$

$$\dot{\nu}_1 = a_3 x_3 \nu_2 - a_2 x_2 \nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = a_1 x_1 \nu_3 - a_3 x_3 \nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = a_2 x_2 \nu_1 - a_1 x_1 \nu_2 \tag{2.4}$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad (x_1 + \lambda_1(t))\nu_1 + (x_2\nu_2 + x_3\nu_3)\nu_3 = k \tag{2.5}$$

Гиростатический момент $\boldsymbol{\lambda}(t)$ из (1.8) упрощается:

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda_3(t)\mathbf{i}_3, \quad \lambda_3(t) = D_3[(a\mathbf{x}\cdot\mathbf{i}_3) + \dot{\kappa}_3] \tag{2.6}$$

Рассмотрим систему уравнений (2.1)–(2.6). Исключим из уравнений (2.1), (2.2) переменную $\lambda_3(t)$. Результат представим в виде

$$\left[\frac{1}{2}\gamma_+(a,x,x) - s_3\nu_3\right]^{\bullet} + a_3(a_2 - a_1)x_1x_2x_3 + \nu_3\gamma_-(s,ax) = 0, \tag{2.7}$$

где точкой обозначена производная по времени от функции, входящей в квадратную скобку; $\gamma_+(a,x,y) = a_2x_1y_1 + a_1x_2y_2$, $\gamma_-(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1$. Уравнение (2.7) рассматривалось [12] в случае, когда выполняются равенства

$$a_2 = a_1, \quad s_2 = 0, \quad s_1 = 0 \tag{2.8}$$

В силу условий (2.8) из уравнения (2.7) получим первый интеграл

$$\frac{a_1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - s_3\nu_3 = b_0, \tag{2.9}$$

где b_0 – произвольная постоянная. Из уравнения (2.3) находится дополнительный интеграл [12]

$$x_3 + \lambda_3(t) = \mathrm{const} \tag{2.10}$$

Условия (2.8) характеризуют обобщенный интеграл Лагранжа (2.10) задачи о движении тяжелого твердого тела. Если второе уравнение из (2.5) продифференцировать только в силу уравнений (2.3), (2.4), то опять получим уравнение (2.7).

В качестве второго разрешающего уравнения будем использовать комбинацию уравнений (2.1), (2.2), которая получается в результате исключения из этих уравнений параметра s_3:

$$(x_3 + \lambda_3(t))\dot{\nu}_3 = -\gamma_+(1,\dot{x},\nu) + a_3x_3\gamma_-(\nu,x) + \nu_3\gamma_-(\nu,s) \tag{2.11}$$

Подставим в уравнение (2.11) значение $x_3 + \lambda_3$, найденное из второго уравнения (2.5), и воспользуемся третьим уравнением из системы (2.4):

$$\frac{k\dot{\nu}_3}{\nu_3} = \frac{\dot{\nu}_3}{\nu_3}\gamma_+(1,x,\nu) - \gamma_+(1,\dot{x},\nu) + a_3x_3\gamma_-(\nu,x) + \nu_3\gamma_-(\nu,s) \tag{2.12}$$

Таким образом, при рассмотрении условий существования ИС (1.7) необходимо изучать редуцированную систему, которая состоит из уравнений (2.4), (2.7), (2.12).

Рассмотрим уравнения (2.4), (2.7), (2.12) при наличии у них ИС (1.7). Вначале изучим систему уравнений (1.3) в случае, когда функции h и ε удовлетворяют равенству

$$h = \nu_3\varepsilon \tag{2.13}$$

Тогда из уравнения (1.3) и представления (1.4) имеем

$$\dot{\nu}_1 = -\beta_2\nu_3 g, \quad \dot{\nu}_2 = \beta_1\nu_3 g, \quad \dot{\nu}_3 = \gamma_-(\nu,\beta)\,g \tag{2.14}$$

$$\gamma_+(1,\beta,\nu) = c_0 \tag{2.15}$$

Было показано [25, 27], что компоненты ν_1, ν_2 вектора $\boldsymbol{\nu}$ в силу интеграла $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ и ИС (2.15) являются функциями вспомогательной переменной ν_3:

$$\nu_1 = \frac{1}{\kappa_0^2}\left(c_0\beta_1 + \beta_2\sqrt{D(\nu_3)}\right), \quad \nu_2 = \frac{1}{\kappa_0^2}\left(c_0\beta_2 - \beta_1\sqrt{D(\nu_3)}\right)$$
$$D(\nu_3) = (\kappa_0^2 - c_0^2) - \kappa_0^2\nu_3^2, \tag{2.16}$$

а зависимость $\nu_3(t)$ находится путем обращения интеграла

$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{g\sqrt{D(\nu_3)}} = t - t_0 \tag{2.17}$$

В формулах (2.16), (2.17) обозначено $\kappa_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$.

Распишем уравнения (2.7), (2.12) с учетом равенств (1.7), (2.13):

$$\begin{gathered}\dot{\nu}_3\left\{\varepsilon'\left[\gamma_+(a,\nu,\nu)\varepsilon + \gamma_+(a,\nu,\beta)g\right] + g'\left[\gamma_+(a,\nu,\beta)\varepsilon + \gamma_+(a,\beta,\beta)g\right]\right\} = \\ = a_1a_2\left[s_3\dot{\nu}_3 - \nu_3\gamma_-(s,\nu)\varepsilon - \nu_3\gamma_-(s,\beta)g\right] - \nu_3\varepsilon^2\left[(a_2 - a_1)\nu_1\nu_2\varepsilon + \gamma_-(\beta,a\nu)g\right],\end{gathered} \tag{2.18}$$

$$\begin{gathered}\dot{\nu}_3\left[\gamma_+(a,\nu,\nu)\varepsilon' + \gamma_+(a,\nu,\beta)g'\right] = \frac{\dot{\nu}_3}{\nu_3}\left[\gamma_+(a,\nu,\nu)\varepsilon + \gamma_+(a,\nu,\beta)g\right] + \\ + a_1a_2\left[\nu_3\gamma_-(\nu,s) - \frac{k\dot{\nu}_3}{\nu_3}\right] + \dot{\nu}_3\nu_3(a_1 + a_2)\varepsilon + (a_1 - a_2)\nu_1\nu_2\nu_3\varepsilon^2\end{gathered} \tag{2.19}$$

Для удобства использования уравнений (2.18), (2.19) в них не подставлено значение

$$\dot{\nu}_3 = \gamma_-(\nu,\beta)g \tag{2.20}$$

Таким образом, справедливо утверждение.

Утверждение 1. Задача интегрирования уравнений движения тяжелого гиростата (2.1)–(2.4) на ИС (1.7), в которых функция $h(\nu_3)$ имеет вид (2.13), сведена к интегрированию уравнений (2.18), (2.19) и нахождению функции $\nu_3(t)$ путем обращения интеграла (2.17).

Замечание 1. Из метода получения уравнения (2.18) и из вида уравнения (2.7) следует, что на рассматриваемых ИС при условиях

$$g = g_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad a_2 = a_1, \quad s_3 = 0, \quad s_1 = \sigma_0\beta_1, \quad s_2 = \sigma_0\beta_2, \tag{2.21}$$

где $g_0, \varepsilon_0, \sigma_0$ – постоянные, уравнение (2.7) имеет первый интеграл

$$\frac{a_1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - s_3\nu_3 - \frac{\varepsilon_0}{2g_0}\sigma_0\nu_3^2 = c_* \tag{2.22}$$

Здесь c_* – произвольная постоянная. На основании условий из (2.21) можно сделать заключение, что распределение масс гиростата определяется обобщенными условиями Ковалевской ($a_3 = 2a_1$) и Горячева–Чаплыгина ($a_3 = 4a_1$). В силу первых двух равенств системы (2.21) и равенства (2.13), ИС (1.2) являются линейными функциями переменных ν_i ($i = \overline{1.3}$).

Для дальнейшего рассмотрения уравнений (2.18), (2.19) представим их в следующем виде:

$$\varepsilon' = H(\nu_3,\varepsilon,g), \quad g' = L(\nu_3,\varepsilon,g) \tag{2.23}$$

Данная система представляет, по-видимому, только теоретический интерес. Поэтому рассмотрим пример интегрирования системы (2.18), (2.19). Положим, что функции ε и g принимают постоянные значения

$$\varepsilon = \varepsilon_0, \quad g = g_0, \tag{2.24}$$

которые являются частью условий (2.21) (остальные равенства не используем). Вместо переменной ν_3 введем новую переменную ψ по формуле

$$\nu_3 = \frac{\mu_0}{\kappa_0}\sin\psi, \quad \mu_0 = \sqrt{\kappa_0^2 - c_0^2} \tag{2.25}$$

Тогда из третьего уравнения системы (2.14), в силу (2.15), (2.25), получим

$$\psi(t) = \kappa_0 g_0 t + \psi_0 \tag{2.26}$$

На основании (2.16), (2.25) запишем компоненты ν_1, ν_2:

$$\nu_i(\psi) = \frac{1}{\kappa_0^2}\left(c_0\beta_i - (-1)^i \mu_0\beta_{3-i}\cos\psi\right), \quad i = 1, 2 \tag{2.27}$$

Для исследования зависимости остальных переменных задачи от переменной ψ обратимся к соотношениям (1.7). На основании формул (2.13), (2.24), (2.25), (2.27) найдем

$$\begin{gathered} x_i(\psi) = \frac{1}{a_i\kappa_0^2}\left[\beta_i(c_0\varepsilon_0 + g_0\kappa_0^2) - (-1)^i \beta_{3-i}\varepsilon_0\mu_0\cos\psi\right], \quad i = 1, 2 \\ x_3(\psi) = \frac{\varepsilon_0\mu_0}{a_3\kappa_0}\sin\psi \end{gathered} \tag{2.28}$$

Используя равенства (2.25), (2.27), (2.28), потребуем, чтобы уравнения (2.18), (2.19) были тождествами по переменной ψ. Тогда получим следующие условия:

$$a_2 = a_1, \quad s_3 = 0, \quad s_1 = \sigma_0\beta_1, \quad s_2 = \sigma_0\beta_2 \tag{2.29}$$

$$k = \frac{1}{a_1}(c_0 g_0 + \varepsilon_0), \quad \sigma_0 = -\frac{\varepsilon_0 g_0}{a_1} \tag{2.30}$$

Условия (2.29) совпадают с условиями (2.21), при выполнении которых имеет место интеграл (2.22). Их характеристика дана выше. Отметим только, что в равенствах (2.29) параметр σ_0 принимает конкретное значение из (2.30).

Для рассмотрения свойств сил, действующих на несомое тело со стороны тела-носителя, обратимся к третьему уравнению из (1.10) при условии $i = 3$. Используя третье уравнение из (1.11), в силу

$$p_3(t) = \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\kappa_0}\sin(\kappa_0 g_0 t + \psi_0) + \dot\kappa_3(t), \quad \lambda_3(t) = \frac{\varepsilon_0\mu_0}{\kappa_0}\frac{a_3 - a_1}{a_1 a_3}\sin(\kappa_0 g_0 t + \psi_0), \tag{2.31}$$

получим

$$L_3(t) = \varepsilon_0\mu_0 g_0 \frac{a_3 - a_1}{a_1 a_3}\cos(\kappa_0 g_0 t + \psi_0) \tag{2.32}$$

Следовательно, проекция внутренних сил на ось вращения ротора S_3 равна значению (2.32).

Справедливо утверждение.

Утверждение 2. Необходимыми условиями существования у системы (2.18), (2.19) линейных инвариантных соотношений по основным переменным задачи (1.5), (1.6) являются равенства (2.29), (2.30), которые характеризуют динамически симметричный гиростат, распределение масс которого определяется обобщенными условиями Ковалевской и Горячева–Чаплыгина.

3. Случай движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Запишем уравнение (1.5) в скалярной форме, положив $\lambda_1(t) = 0$, $\lambda_2(t) = 0$:

$$\begin{gathered} a_2 x_2\lambda_3(t) = -\dot x_1 + (a_3 - a_2)x_2 x_3 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2 + \\ + a_2 B_3 x_2\nu_3 - a_3 B_2\nu_2 x_3 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3, \end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered} a_1 x_1\lambda_3(t) = \dot x_2 - (a_1 - a_3)x_3 x_1 - s_3\nu_1 + s_1\nu_3 - \\ - a_3 B_1 x_3\nu_1 + a_1 B_3\nu_3 x_1 - (C_1 - C_3)\nu_3\nu_1, \end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = -\dot{x}_3 + (a_2 - a_1)x_1x_2 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1 + \\ + a_1B_2x_1\nu_2 - a_2B_1\nu_1x_2 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 \tag{3.3}$$

К уравнениям (3.1)–(3.3) следует добавить уравнения Пуассона (2.4) и первые интегралы (1.12):

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + (x_3 + \lambda_3(t))\nu_3 - \frac{1}{2}\left(B_1\nu_1^2 + B_2\nu_2^2 + B_3\nu_3^2\right) = k, \tag{3.4}$$

так как в разд. 2 показано, что в этом частном случае можно провести полный анализ условий существования ИС (1.2). Используя подход, изложенный в п. 2, систему уравнений (3.1)–(3.3) редуцируем к системе уравнений

$$\left[\frac{1}{2}\gamma_+(a,x,x) - s_3\nu_3\right]^{\bullet} + a_3(a_2 - a_1)x_1x_2x_3 + \nu_3\gamma_-(s,ax) + \\ + a_3x_3\gamma_-(ax,B\nu) - \nu_3\left[\gamma_-(C\nu,x) - C_3\gamma_-(\nu,ax)\right] = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\dot{\nu}_3k}{\nu_3} = \frac{1}{\nu_3}\gamma_+(1,x,\nu)\dot{\nu}_3 - \gamma_+(1,\dot{x},\nu) + a_3x_3\gamma_-(\nu,x) + \nu_3\gamma_-(\nu,s) - \\ - \frac{\dot{\nu}_3}{2\nu_3}(B_1\nu_1^2 + B_2\nu_2^2 - B_3\nu_3^2) + \nu_1\nu_2\left[a_3(B_1 - B_2)x_3 + (C_1 - C_2)\nu_3\right] \tag{3.6}$$

Для получения замкнутой системы уравнений необходимо рассматривать систему (3.5), (3.6) совместно с уравнениями Пуассона

$$\dot{\nu}_1 = a_3x_3\nu_2 - a_2x_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = a_1x_1\nu_3 - a_3x_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = a_2x_2\nu_1 - a_1x_1\nu_2 \tag{3.7}$$

После интегрирования системы (3.5)–(3.7) функцию $\lambda_3(t)$ определяем из второго соотношения системы (3.4):

$$\lambda_3(t) = \frac{1}{\nu_3}\left[k - x_1\nu_1 - x_2\nu_2 - x_3\nu_3 + \frac{1}{2}\left(B_1\nu_1^2 + B_2\nu_2^2 + B_3\nu_3^2\right)\right] \tag{3.8}$$

Как уже было отмечено выше, в предположении $B = 0$, $C = 0$ рассмотрен случай [12], который в обозначениях данного раздела соответствует величинам: $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $a_2 = a_1$. Здесь рассмотрим более общий вариант, положив в (3.3), (3.5), (3.6) и (3.8)

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad a_2 = a_1, \quad B_2 = B_1, \quad C_2 = C_1 \tag{3.9}$$

Тогда из (3.3) следует первый интеграл

$$\lambda(t) + x_3 + B_1\nu_3 = b_1, \tag{3.10}$$

где b_1 – произвольная постоянная. При условиях (3.9) уравнение (3.5) принимает вид

$$\left[\frac{a_1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - s_3\nu_3 + \frac{1}{2}(C_3 - C_1)\nu_3^2\right]^{\bullet} = -B_1a_3x_3\dot{\nu}_3 \tag{3.11}$$

Если в (3.11) положить $B_1 = 0$, то получим дополнительный первый интеграл

$$\frac{a_1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) - s_3\nu_3 + \frac{1}{2}(C_3 - C_1)\nu_3^2 = b_2, \tag{3.12}$$

где b_2 – произвольная постоянная.

Замечание 2. Наличие у системы шести уравнений (3.3), (3.5), (3.6) трех первых интегралов (3.10)–(3.12) не позволяет выполнить интегрирование данной системы в квадратурах. Аналогичная проблема имела место и в исследованиях статьи [12]. Поэтому в [12] дополнительно предполагалось, что в соотношениях (2.6) $\lambda_3 = \mathrm{const}$. В изучаемом здесь случае данное предположение приводит, в силу соотношения (3.10), к решению [24], которое представляет собой обобщение решения Кирхгофа [22].

Данное замечание и итоги разд. 2 показывают, что целесообразно рассматривать уравнения (3.5)–(3.8) в случае существования у них инвариантных соотношений [25]

$$x_1(\nu_3) = \frac{1}{a_1}(\nu_1(\nu_3)\varepsilon + \beta_1 g), \quad x_2(\nu_3) = \frac{1}{a_2}(\nu_2(\nu_3)\varepsilon + \beta_2 g), \quad x_3(\nu_3) = \frac{1}{a_3}\nu_3\varepsilon \tag{3.13}$$

Подставим значения (3.13) в уравнения (3.5), (3.6) и воспользуемся уравнениями Пуассона (3.7):

$$\begin{gathered}\gamma_-(\nu,\beta)\{[\varepsilon\gamma_+(a,\nu,\nu) + g\gamma_+(a,\nu,\beta)]g\varepsilon' + [\varepsilon\gamma_+(a,\nu,\beta) + g\gamma_+(a,\beta,\beta)]gg'\} = \\ = -\nu_3\{(a_2 - a_1)\nu_1\nu_2\varepsilon + [\gamma_-(\beta, a\nu)g + a_1a_2(B_2 - B_1)\nu_1\nu_2]\}\varepsilon^2 + \\ + a_1a_2\{\nu_3[(C_1 - C_2)\nu_1\nu_2 - \gamma_-(\beta, B\nu)g - \gamma_-(s,\nu)]\varepsilon + \\ + [s_3\gamma_-(\nu,\beta) - \nu_3\gamma_-(s,\beta) + \beta_2(C_1 - C_3)\nu_1\nu_3 + \beta_1(C_3 - C_2)\nu_2\nu_3]g\},\end{gathered} \tag{3.14}$$

$$\begin{gathered}\frac{\dot\nu_3}{a_1a_2}[\gamma_+(a,\nu,\nu)\varepsilon' + \gamma_+(a,\nu,\beta)g'] = \frac{1}{a_1a_2}\Bigg\{\frac{\dot\nu_3}{\nu_3}[\gamma_+(a,\nu,\nu)\varepsilon + \gamma_+(a,\nu,\beta)g] + \\ + \nu_3\Big[(a_1 - a_2)\varepsilon^2\nu_1\nu_2 + (a_1 + a_2)\varepsilon\dot\nu_3 + a_1a_2\gamma_-(\nu,s)\Big]\Bigg\} - \\ - \frac{\dot\nu_3}{2\nu_3}\Big(B_1\nu_1^2 + B_2\nu_2^2 - B_3\nu_3^2 + 2k\Big) + \nu_1\nu_2[a_3(B_1 - B_2)x_3 + (C_1 - C_2)\nu_3],\end{gathered} \tag{3.15}$$

где $\dot\nu_3$ имеет значение (2.20). Для удобства исследования уравнения (3.15) выражение $\dot\nu_3$ не внесено в (3.15). В силу постановки задачи к уравнениям (3.14), (3.15) необходимо присоединить уравнения (2.14) и инвариантное соотношение (2.15). То есть в уравнениях (3.14), (3.15) функции $\nu_1(\nu_3)$, $\nu_2(\nu_3)$ имеют вид (2.16), а зависимость $\nu_3(t)$ устанавливается из (2.17). Отметим, что ИС (2.15) описывают прецессионные движения [28, 29] – движения, при которых постоянен угол между вектором $\boldsymbol\beta(\beta_1, \beta_2, 0)$ и вектором $\boldsymbol\nu$.

В общем случае задача интегрирования уравнений (3.14), (3.15) представляет весьма сложную проблему (см. п. 2 настоящей статьи). Поэтому рассмотрим вариант, когда ИС (3.13) являются линейными функциями, то есть компоненты вектора угловой скорости имеют вид

$$\omega_1 = \varepsilon_0\nu_1 + \beta_1 g_0, \quad \omega_2 = \varepsilon_0\nu_2 + \beta_2 g_0, \quad \omega_3 = \varepsilon_0\nu_3 \tag{3.16}$$

В силу равенств (3.16) прецессия тела-носителя относится к классу регулярных прецессий [28, 29].

Подставим значения (3.13) (в которых $\varepsilon(\nu_3) = \varepsilon_0$, $g(\nu_3) = g_0$) и значения (2.25), (2.27) в уравнения (3.14), (3.15) и потребуем, чтобы полученные равенства были тождествами по ψ:

$$(a_2 - a_1)\Big(2c_0\varepsilon_0 + g_0\kappa_0^2\Big) + c_0a_1a_2(B_2 - B_1) = 0 \tag{3.17}$$

$$\sigma_0 = \frac{g_0}{\kappa_0^2}\left\{-\frac{\varepsilon_0\left(a_1\beta_2^2 + a_2\beta_1^2\right)}{a_1a_2} + \frac{1}{2}\Big[\beta_1^2(B_3 - B_2) + \beta_2^2(B_3 - B_1)\Big]\right\} \tag{3.18}$$

$$\varepsilon_0^2(a_1 - a_2) + a_1a_2[\varepsilon_0(B_1 - B_2) + (C_1 - C_2)] = 0 \tag{3.19}$$

$$s_3 = 0, \quad s_1 = \sigma_0\beta_1, \quad s_2 = \sigma_0\beta_2 \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon_0^2 g_0\Big(a_2\beta_1^2 + a_1\beta_2^2\Big) + a_1a_2\Big\{\varepsilon_0\Big[\sigma_0\kappa_0^2 + g_0(B_2\beta_1^2 + B_1\beta_2^2)\Big] + \\ + g_0\Big[\beta_1^2(C_3 - C_2) + \beta_2^2(C_3 - C_1)\Big]\Big\} = 0,\end{gathered} \tag{3.21}$$

где σ_0 – параметр. Параметр k, входящий в равенство (3.8) при условиях (3.17)–(3.21), имеет значение

$$k = \frac{1}{2a_1 a_2 \kappa_0^4}\Big\{2\varepsilon_0\Big[\kappa_0^4(a_1 + a_2) - c_0^2\left(a_1\beta_1^2 + a_2\beta_2^2\right)\Big] - \\ - a_1 a_2\Big[B_3\kappa_0^4 + c_0^2\left(\beta_1^2(B_1 - B_3) + \beta_2^2(B_2 - B_3)\right)\Big]\Big\} \quad (3.22)$$

Функцию $\lambda_3(t)$ определим на основании равенств (2.25), (2.27), (3.16)–(3.21):

$$\lambda_3(t) = \frac{\mu_0}{2a_1 a_2 a_3 \kappa_0^3}\Big\{2\varepsilon_0\Big[a_3\left(a_1\beta_1^2 + a_2\beta_2^2\right) - \kappa_0^2 a_1 a_2\Big] - \\ - a_1 a_2 a_3\Big[\beta_1^2(B_2 - B_3) + \beta_2^2(B_1 - B_3)\Big]\Big\}\sin(\kappa_0 g_0 t + \psi_0) \quad (3.23)$$

Обсудим условия (3.17)–(3.23). Если в полученных условиях полагать, что $B_i = 0$, $C_i = 0$ $(i = \overline{1,3})$, то получим условия (2.29)–(2.31).

Положим в (3.17)–(3.21) $a_2 \neq a_1$. Тогда из (3.17) следует

$$c_0 = \frac{g_0\kappa_0^2(a_1 - a_2)}{2\varepsilon_0(a_2 - a_1) + a_1 a_2(B_2 - B_1)}$$

Из уравнения (3.19) можно определить параметр ε_0, если выполняется условие

$$a_1 a_2(B_1 - B_2)^2 + 4(a_2 - a_1)(C_1 - C_2) \geq 0$$

Равенство (3.21) можно рассматривать как условие на параметры C_i $(i = \overline{1,3})$.

Таким образом, доказано утверждение.

Утверждение 3. Построено новое решение (2.25)–(2.28) уравнений (3.5)–(3.7), которое описывает прецессионное движение тела-носителя в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Условиями существования данного решения являются равенства (3.17)–(3.22): в них, в отличие от случая (2.29), отсутствует требование динамической симметрии гиростата.

4. Линейные ИС уравнений движения неавтономного гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае непрецессионных движений. Ранее [25] было получено решение уравнений движения динамически симметричного твердого тела $(a_2 = a_1)$ в потенциальном поле сил:

$$x_1 = \frac{1}{a_1}\left(-\frac{\mu_1}{3}\nu_1 + \beta_1\mu_2\right), \quad x_2 = \frac{1}{a_1}\left(-\frac{\mu_1}{3}\nu_2 + \beta_2\mu_2\right), \quad x_3 = \frac{\mu_1}{a_3}\nu_3 \quad (4.1)$$

$$\nu_1(\nu_3) = \frac{1}{3\mu_2\kappa_0^2}\left(\mu_1\beta_1(1 - 2\nu_3^2) - \beta_2\sqrt{F(\nu_3)}\right) \\ \nu_2(\nu_3) = \frac{1}{3\mu_2\kappa_0^2}\left(\mu_1\beta_2(1 - 2\nu_3^2) + \beta_1\sqrt{F(\nu_3)}\right), \quad (4.2)$$

где

$$F(\nu_3) = -\varepsilon_2^2\nu_3^4 + \varepsilon_1\nu_3^2 + \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = 9\kappa_0^2\mu_2^2 - \mu_1^2, \quad \varepsilon_1 = 4\mu_1^2 - 9\kappa_0^2\mu_2^2, \quad \varepsilon_2 = 2\mu_1 \quad (4.3)$$

Подчеркнем, что в равенствах (4.1), (4.2) свойство динамической симметрии гиростата

$$a_2 = a_1 \quad (4.4)$$

сохраняется. В формулах (4.1)–(4.3) μ_1, μ_2 – постоянные параметры, κ_0^2 – параметр, имеющий значение $\beta_1^2 + \beta_2^2$. Зависимость $\nu_3(t)$ находится путем обращения интеграла [27]:

$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\sqrt{F(\nu_3)}} = -\frac{1}{3}(t - t_0) \tag{4.5}$$

Величины (4.2) получены из ИС

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \quad \beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 = \frac{\mu_1}{3\mu_2}\left(1 - 2\nu_3^2\right), \tag{4.6}$$

которые допускают уравнение Пуассона (1.1) на ИС (4.1). Так как второе ИС из (4.6) отличается от ИС (2.15), то движение гиростата не является прецессионным [28].

Дополнительно к условию (4.4) предположим, что имеют место равенства

$$s_1 = \sigma_0\beta_1, \quad s_2 = \sigma_0\beta_2, \tag{4.7}$$

т.е. рассмотрим условия существования ИС (4.1), (4.2), (4.6) уравнений (3.5), (3.6) при наличии ограничений на параметры (4.4), (4.7). Отличие ИС (4.6) от ИС п. 3 состоит в том, что второе ИС из (4.6) является **нелинейным.**

Для получения наглядных результатов будем считать, что выполняются равенства

$$B_2 = B_1, \quad C_2 = C_1 \quad (i = \overline{1, 3}) \tag{4.8}$$

Подствим значения (4.1), (4.2) в уравнения (3.5), (3.6). Учитывая в редуцированных уравнениях ИС (4.6) равенства (4.7). (4.8), потребуем, чтобы они были тождествами по переменной ν_3. Тогда найдем условия

$$s_3 = 0, \quad k = -\frac{1}{2}B_{11}, \quad \sigma_0 = -\frac{\mu_2}{6a_1}\left[2\mu_1 + 3a_1(B_1 + B_3)\right] \tag{4.9}$$

$$4\mu_1^2 - 3a_1\mu_1(B_3 + 7B_1) + 18a_1(C_1 - C_3) = 0 \tag{4.10}$$

Из первого равенства системы (4.9) следует, что центр масс гиростата лежит в плоскости кругового сечения эллипсоида инерции гиростата. Третье условие из (4.9) служит для нахождения параметра σ_0, из равенства (4.10) при выполнении неравенства $C_3 > C_1$ можно получить значение параметра μ_1.

Функцию гиростатического момента $\lambda_3(\nu_3)$ в данном решении определим с помощью равенства (3.8):

$$\lambda_3(\nu_3) = \frac{1}{6a_1a_3}\left[2\mu_1(a_3 - 3a_1) + 3a_1a_3(B_3 - B_1)\right]\nu_3, \tag{4.11}$$

где функция $\nu_3(t)$ удовлетворяет интегральному соотношению (4.5), которое изучено ранее [27].

Приведем пример исследования интеграла (4.5). Следуя [27], положим, что параметры из (4.3) подчинены условию $\mu_1^2 = 9\kappa_0^2\mu_2^2$. Тогда интеграл (4.5) принимает вид

$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\nu_3\sqrt{\lambda_0^2 - \nu_3^2}} = -\frac{2\mu_1}{3}(t - t_0), \tag{4.12}$$

т.е. переменная ν_3 изменяется на отрезке

$$-\lambda_0 \le \nu_3 \le \lambda_0 \quad \left(\lambda_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \tag{4.13}$$

где $\nu_3^{(0)} \neq 0$. Интеграл (4.12) вычисляется в элементарных функциях

$$\nu_3(t) = \frac{\sqrt{3}}{2\,\mathrm{ch}\,w(t)}, \quad w(t) = \frac{\mu_1(t - t_0)}{\sqrt{3}} \tag{4.14}$$

В силу (4.1), (4.2), (4.13), (4.14), движение тела-носителя при $t \to \infty$ стремится к состоянию покоя [27]. Значение гиростатического момента $\lambda_3(t)$ находим из (4.11). Таким образом, справедливо утверждение.

Утверждение 4. Построен класс решений уравнений движения динамически симметричного гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которое *не является прецессионным*. Для него движение тела-носителя обладает свойством асимптотичности к состоянию покоя. Центр масс гиростата лежит в плоскости равных главных моментов инерции.

Заключение. В статье построены новые решения уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом в двух задачах динамики: в задаче о движении тяжелого гиростата и в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thomson W.* On the motion of rigid solids in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or in any fixed solid // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1872. V. 7. P. 668–674.
2. *Volterra V.* Sur la théorie des variations des latitudes // Acta. Math. 1899. V. 22. P. 201–358.
3. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. Т. 1. М., 1949. С. 31–152.
4. *Gray A.* A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion. Theory and Applications. New York: Dover Publ., 1959. 530 p.
5. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2, ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
6. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. 1970. № 2. С. 83–96.
7. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. 1972. Вып. 4. С. 52–73.
8. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
9. *Kane T.R., Fowler R.C.* Equivalence of two gyrostatic stability problems // J. Appl. Mech. V. 37 (4). 1970. P. 1146–1147.
10. *Roberson R.E.* The equivalence of two classical problems of free spinning gyrostats // J. Appl. Mech. V. 38 (3). 1971. P. 1146–1147.
11. *Асланов В.С., Дорошин А.В.* Движение системы соосных тел переменной массы // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 6. С. 999–1009.
12. *Асланов В.С., Дорошин А.В.* О двух случаях движения неуравновешенного гиростата // Изв. РАН. МТТ. № 4. 2006. С. 42–55.
13. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А.* Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. Донецк: Изд-е ГУ “Институт прикладной математики и механики”, 2017. 250 с.
14. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. 1974. Вып. 6. С. 15–24.
15. *Ковалев А.М., Горр Г.В., Неспирный В.Н.* Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике // Механика твердого тела. 2013. Вып. 43. С. 3–19.
16. *Ольшанский В.Ю.* Линейные инвариантные соотношения уравнений Пуанкаре–Жуковского // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 1. С. 29–45.
17. *Ольшанский В.Ю.* Об одном новом линейном инвариантном соотношении уравнений Пуанкаре–Жуковского // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 6. С. 883–894.

18. *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Тр. Москов. мат. об-ва. 1980. Т. 41. С. 287–303.
19. *Козлов В.В., Онищенко Д.А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 6. С. 1298–1300.
20. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. Киев: Наук. думка, 1978. 294 с.
21. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 384 с.
22. *Kirchhoff G.R.* Über die Bewegung eines Rotationkörpers in einer Flüssigkeit // J. für die reine und angew. Math. 1870. Bd. 71. S. 237–262.
23. *Стеклов В.А.* О движении твердого тела в жидкости. Харьков, 1893. 234 с.
24. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // ПМТФ. 1963. № 4. С. 17–29.
25. *Горр Г.В.* О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил // ПММ. 2019. Т. 83. № 2. С. 202–214.
26. *Gorr G.V., Tkachenko D.N., Shchetinina E.K.* Research on the motion of a body in a potential force field in the case of three invariant relations // Russ. J. Nonlin. Dyn. 2019. V. 15. № 3. P. 327–342.
27. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010. 364 с.
28. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. Киев: Наук. думка, 2013. 408 с.
29. *Grioli G.* Questioni di dinamica del corpo rigido // Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. e Natur. 1963. V. 35. F. 1–2. P. 35–39.

On Solutions of Equations of Motion of a Gyrostat with Variable Gyrostatic Moment

G. V. Gorr[a,#] and T. V. Belokon[b,##]

[a] *Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Ukraine*
[b] *Tugan-Baranovsky National University of Economics and Trade, Donetsk, Ukraine*
[#]*e-mail: gvgorr@gmail.com*
[##]*e-mail: B.Tatyana13@mail.ru*

The problem on motion of a gyrostat with the variable gyrostatic moment under the action of potential and gyroscopic forces is considered. Three new solutions of the equations of motion are obtained, which are determined by three linear invariant relations for the components of the angular velocity vector of the gyrostat. In the case of a heavy gyrostat, a solution is found, when the gyrostat mass distribution is characterized by Kovalevskaya and Goryachev–Chaplygin generalized conditions. Next two solutions take place for equations of Kirchhoff–Poisson class. One of them exists in the case of dynamically symmetric gyrostates, and in the other solution the gyrostat mass distribution is arbitrary.

Keywords: gyrostatic moment, invariant relations, potential and gyroscopic forces, Kovalevskaya and Goryachev–Chaplygin generalized conditions

REFERENCES

1. *Thomson W.* On the motion of rigid solids in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or in any fixed solid // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1872, no. 7, pp. 668–674.
2. *Volterra V.* Sur la theorie des variations des latitudes // Acta Math., 1899, vol. 22, pp. 201–358.
3. *Zhukovsky N.E.* On the motion of a solid body having cavities filled with a homogeneous dropping liquid // in: Coll. works. Vol. 1. Moscow: 1949. pp. 31–152. (in Russian)
4. *Gray A.* A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion. Theory and Applications. N.Y.: Dover Publ., 1959. 530 p.
5. *Levy-Civita T., Amaldi W.* Course in Theoretical Mechanics. Vol. 2, part 2. Moscow: Inostr. Lit., 1951. 555 p. (in Russian)

6. *Rumyantsev V.V.* About orientation control and satellite stabilization by rotors // Moscow Univ. Mech. Bull. Math., 1970, iss. 2, pp. 83–96. (in Russian)
7. *Kharlamov P.V.* On the equations of motion of a system of solids // Mech. Rigid Body, 1972, vol. 4, pp. 52–73. (in Russian)
8. *Wittenburg J.* Dynamics of Systems of Rigid Bodies. Moscow: Mir, 1980. 292 p. (in Russian)
9. *Kane T.R., Fowler R.C.* Equivalence of two gyrostatic stability problems // J. Appl. Mech., 1970, vol. 37 (4), pp. 1146–1147.
10. *Roberson R.E.* The equivalence of two classical problems of free spinning gyrostats // J. Appl. Mech., 1971, vol. 38 (3), pp. 1146–1147.
11. *Aslanov V.S., Doroshin A.V.* The motion of a system of coaxial bodies of variable mass // JAMM, 2004, vol. 68, iss. 6, pp. 899–908.
12. *Aslanov V.S., Doroshin A.V.* Two cases of motion of an unbalanced gyrostat // Mech. Sol., 2006, vol. 41, iss. 4, pp. 29–39.
13. *Gorr G.V., Maznev A.V., Kotov G.A.* The Movement of the Gyrostat with a Variable Gyrostatic Moment. Donetsk: Pub. House Inst. Appl. Math.&Mech., 2017, 250 p. (in Russian)
14. *Kharlamov P.V.* On invariant relations of a system of differential equations // Mech. Rigid Body, 1974, iss. 6, pp. 15–24. (in Russian)
15. *Kovalev A.M., Gorr G.V., Nespirnyy V.N.* Invariant relations for nonautonomous systems of differential equations with application in mechanics // Mech. Rigid Body, 2013, iss. 43, pp. 3–18. (in Russian)
16. *Olshanskii V.Yu.* A new linear invariant relation of the Poincaré–Zhukovskii equations // JAMM, 2012, vol. 76, iss. 6, pp. 636–645.
17. *Olshanskii V.Yu.* Linear invariant relations of the Poincaré–Zhukovskii equations // JAMM, 2014, vol. 78, iss. 1, pp. 18–29.
18. *Sieglin S.L.* The splitting of separatrices, branching of solutions and non-existence of an integral in rigid body dynamics // Proc. Moscow Math. Soc., 1980, vol. 41, pp. 287–303. (in Russian)
19. *Kozlov V.V., Onishchenko D.A.* Non-integrability of Kirchhoff equations // Dokl. Acad. Nauk SSSR, 1982, vol. 266, no. 6, pp. 1298–1300. (in Russian)
20. *Gorr G.V., Kudryashova L.V., Stepanova L.A.* Classical Problems of the Dynamics of a Rigid Body. Development and Current Status. Kiev: Nauk. Dumka, 1978. 296 p. (in Russian)
21. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Dynamics of a Rigid Body. Izhevsk: R&C Dyn., 2001. 84 p. (in Russian)
22. *Kirchhoff G.R.* Über die Bewegung eines Rotationkörpers in einer Flüssigkeit // J. für die reine und angew. Math., 1870, Bd. 71, S. 237–262.
23. *Steklov V.A.* On Motion of a Solid Body in the Liquid. Kharkov: 1893, 234 p. (in Russian)
24. *Kharlamov P.V.* On motion in the fluid of a body bounded by a multiply connected surface // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 1963, no. 4, pp. 17–29. (in Russian)
25. *Gorr G.V.* On three invariant relation of the equations of motion of a body in an potential field of force // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 234–244.
26. *Gorr G.V., Tkachenko D.N., Shchetinina E.K.* Research on the motion of a body in a potential force field in the case of three invariant relations // Russ. J. Nonlin. Dyn., 2019, vol. 15, no. 3, pp. 327–342.
27. *Gorr G.V., Maznev A.V.* The Dynamics of a Gyrostat Having a Fixed Point. Donetsk: Donetsk Nat. Univ., 2010. 364 p. (in Russian)
28. *Gorr G.V., Kovalev A.M.* Motion of a Gyrostat. Kyev: Naukova Dumka, 2013. 408 p. (in Russian)
29. *Grioli G.* Questioni di dinamica del corpo rigido // Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis., Mat. e Natur., 1963, vol. 35, f. 1–2, pp. 35–39.