

УДК 539.3

**КОНТАКТ С МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ
ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СЛОЯ (САМОСОГЛАСОВАННЫЙ ПОДХОД):
АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРОЦЕССА ПОДВОДА/ОТВОДА ИНДЕНТОРА**

© 2021 г. И. А. Солдатенков^{1,*}

¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: iasoldat@hotmail.com*

Поступила в редакцию 25.05.2020 г.

После доработки 11.09.2020 г.

Принята к публикации 06.12.2020 г.

Рассматривается контакт бесконечно протяженного плоского индентора и вязкоупругого слоя в рамках самосогласованного по Дерягину подхода с поверхностным (традиционная постановка) и объемным (уточненная постановка) приложением сил межмолекулярного взаимодействия. Получены уравнения, описывающие изменение контактного зазора во времени при таком контакте. Сформулировано условие, при котором возможно скачкообразное изменение контактного зазора во времени. Выполнены расчеты, свидетельствующие о немонотонном характере зависимостей контактного зазора и давления от времени в режимах подвода и отвода индентора. Показано, что традиционная и уточненная постановки задачи могут приводить к существенно различным результатам расчета характеристик контакта индентора и вязкоупругого слоя.

Ключевые слова: контактная задача, вязкоупругость, слой, межмолекулярное взаимодействие

DOI: 10.31857/S0032823521010070

При изучении контакта деформируемых тел силы межмолекулярного взаимодействия впервые учитывались применительно к герцевскому контакту [1]. В дальнейшем был разработан ряд эффективных подходов к решению контактных задач такого типа, среди которых следует отметить подходы, использующие концепцию поверхностной энергии – модели JKR и DMT [2, 3]. Эти подходы также использовались для расчета адгезионного контакта слоистых [4–7] и вязкоупругих тел [8–11].

Строгая постановка контактной задачи, учитывающая межмолекулярное взаимодействие, предполагает существование некоторого зазора l^* между контактирующими телами. Величина этого зазора должна обеспечивать баланс сил, обусловленных контактной деформацией тел и их межмолекулярным взаимодействием (самосогласованный подход по Дерягину [12]). При таком подходе возможны постановки задачи с поверхностным (традиционная постановка [13–15]) и объемным (уточненная постановка [16–19]) приложением сил межмолекулярного взаимодействия.

Одной из характерных особенностей адгезионного контакта является возможность скачкообразного изменения его параметров. Впервые подобное изменение было теоретически описано применительно к подпружиненному контакту твердых тел при наличии сил Лондона–Ван-дер-Ваальса [20]. В дальнейшем скачкообразное изменение параметров адгезионного контакта упругих тел рассматривалось во многих исследова-

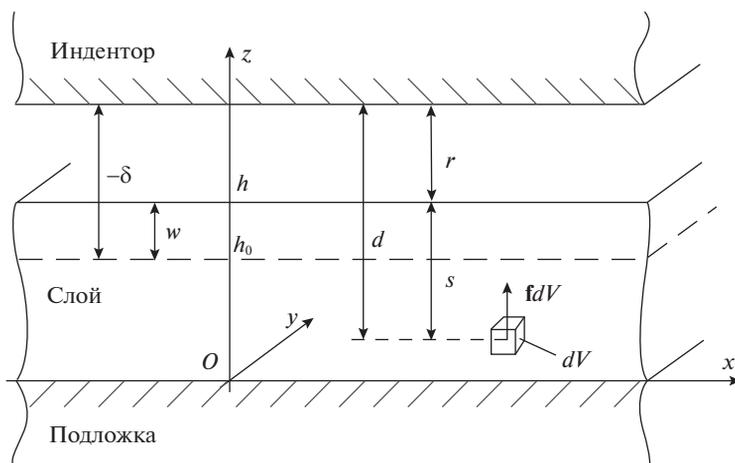


Рис. 1. Контактное взаимодействие индентора с основанием, состоящим из вязкоупругого слоя, связанного с абсолютно жесткой подложкой.

ниях, среди которых отметим работы [12–14, 21], использующие самосогласованный подход при постановке задачи.

В данной работе производится расчет контактного взаимодействия бесконечно протяженного плоского индентора с вязкоупругим слоем при наличии сил межмолекулярного взаимодействия (самосогласованный подход, традиционная и уточненная постановки задачи). Значительное внимание уделяется анализу скачкообразного изменения контактного зазора.

1. Постановка задачи. Рассмотрим контактное взаимодействие бесконечно протяженного плоского индентора и основания, состоящего из вязкоупругого слоя толщины h , связанного с подложкой (рис. 1), причем индентор и подложка являются абсолютно жесткими. Считается, что индентор и слой разделены контактным зазором r , обеспечивающим баланс сил вязкоупругого и межмолекулярного взаимодействий контактирующих тел (самосогласованный подход) [12]. Свяжем с основанием систему координат $Oxyz$, совместив ее плоскость Oxy с границей раздела слоя и подложки. Контакт индентора и слоя считается плоскопараллельным, что обуславливает зависимость всех контактных характеристик только от координаты z и времени t . Толщину слоя в недеформированном состоянии обозначим через h_0 .

Межмолекулярное взаимодействие индентора и основания определяется парными взаимодействиями их молекул (гипотеза Гамакера). Соответствующая сила F зависит от свойств пары молекул и расстояния l между ними. Существуют разные формы такой зависимости, и в дальнейшем будет использоваться известный закон Леннарда–Джонса [22]:

$$F(l) = \frac{a_1}{l^m} - \frac{a_2}{l^n}, \quad (1.1)$$

где a_1, a_2, m, n – параметры взаимодействия, причем обычно полагают $m = 7, n = 13$. Применительно к рассматриваемой задаче, обозначим через a_{1c}, a_{2c} параметры в законе (1.1), отвечающие взаимодействию молекул индентора и слоя, а через a_{1b}, a_{2b} – взаимодействию молекул индентора и подложки.

При определенных допущениях [14], [23, с. 205–220] суммирование парных взаимодействий молекул позволяет для каждой точки слоя рассчитать объемную силу \mathbf{f} , обусловленную межмолекулярным взаимодействием. Эта сила направлена вдоль оси z и зависит от расстояния $d = r + s = r + h - z$ между точкой ее приложения и индентором (рис. 1), причем толщину h слоя здесь можно заменить постоянным значением h_0 , что допустимо при малых деформациях. Таким образом, если обозначить через f_i , $i = 1, 2, 3$ компоненты объемной силы в системе координат $Ox_1x_2x_3$, то

$$f_1 = f_2 \equiv 0, \quad f_3(z, t) = f(r(t) + h_0 - z) \quad (1.2)$$

Кроме того, суммирование парных взаимодействий молекул позволяет определить силу p воздействия индентора на основание, приходящуюся на единицу площади его поверхности (верхней границы):

$$p(t) = \Phi(r(t)), \quad \Phi(r) = - \int_0^{\infty} f(r + s) ds, \quad (1.3)$$

которая в рамках самосогласованного подхода интерпретируется как контактное давление [12–14, 19].

В случае закона Леннард–Джонса функции f и Φ имеют вид [19]

$$f(d) = \frac{b_{1\#}}{d^{m-3}} - \frac{b_{2\#}}{d^{n-3}} = \frac{b_{1\#}}{d_{e\#}^{m-3}} \left[\left(\frac{d_{e\#}}{d} \right)^{m-3} - \left(\frac{d_{e\#}}{d} \right)^{n-3} \right] \quad (1.4)$$

$$\Phi(r) = - \frac{A_{1c}}{r_{ec}^k} \left\{ \left[\left(\frac{r_{ec}}{r} \right)^k - \left(\frac{r_{ec}}{H} \right)^k \right] - \left[\left(\frac{r_{ec}}{r} \right)^l - \left(\frac{r_{ec}}{H} \right)^l \right] \right\} - \frac{A_{1b}}{r_{eb}^k} \left[\left(\frac{r_{eb}}{H} \right)^k - \left(\frac{r_{eb}}{H} \right)^l \right], \quad (1.5)$$

где $k = m - 4$, $l = n - 4$, $H = h_0 + r$,

$$b_{1\#} = \frac{2\pi N_s N_{\#} a_{1\#}}{(m-1)(m-3)}, \quad b_{2\#} = \frac{2\pi N_s N_{\#} a_{2\#}}{(n-1)(n-3)}, \quad A_{1\#} = \frac{b_{1\#}}{k}, \quad A_{2\#} = \frac{b_{2\#}}{l}$$

$$r_{e\#} = \left(\frac{A_{1\#}}{A_{2\#}} \right)^{\frac{1}{m-n}}, \quad d_{e\#} = \left(\frac{b_{1\#}}{b_{2\#}} \right)^{\frac{1}{m-n}} = \left(\frac{k}{l} \right)^{\frac{1}{m-n}} r_{e\#}$$

N_s , N_c и N_b – концентрации молекул индентора, слоя и подложки, соответственно. Символ $\#$ подразумевает индекс b (подложка) или c (слой), причем в формуле (1.4) при $d \in [r, r + h_0]$ используется индекс c , а при $d > r + h_0$ – индекс b .

Традиционная постановка контактной задачи при наличии межмолекулярного взаимодействия подразумевает, что определяемое по формуле (1.3) контактное давление прикладывается к поверхности слоя, в результате чего он деформируется [12–15]. Ниже также рассматривается уточненная постановка, в которой естественным образом предполагается, что деформация слоя порождается объемными силами (1.2), распределенными по его глубине, тогда как поверхность слоя свободна от нагрузок [16–19]. В качестве параметра нагружения слоя в обеих постановках выступает зазор r , однозначно определяющий объемную силу f_i по формуле (1.2) и контактное давление p по формуле (1.3).

Отметим, что ввиду быстрого затухания объемные силы f сконцентрированы в подповерхностной области нанометровой толщины $\sim d_{ec} \sim d_{eb}$, причем, в силу соотношения (1.3), их равнодействующая, отнесенная к элементу поверхности слоя, с точностью до знака равна p . По принципу Сен-Венана, действие таких сил на расстояниях существенно превышающих d_{ec} эквивалентно приложению контактного давления p к

поверхности слоя, что как раз отвечает традиционной постановке задачи. Таким образом, можно заключить (и это подтверждается расчетами [18, 19]), что использование уточненной постановки задачи актуально на наноуровне (масштаб $\sim d_{ec}$). На микро- или макроуровне (масштаб $\gg d_{ec}$) допустимо использование более простой традиционной постановки задачи.

В качестве контактной характеристики будем использовать внедрение δ индентора в слой, отсчитываемое от поверхности слоя в недеформированном состоянии, т.е. от уровня $z = h_0$ (рис. 1). Отметим, что внедрение δ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, причем последний случай изображен на рис. 1. Имеет место условие контакта

$$r(t) + w(t) = -\delta(t), \quad (1.6)$$

связывающее внедрение δ с зазором r и перемещением $w = h - h_0$ поверхности слоя вдоль оси z .

Считается, что до момента времени $t = 0$ взаимодействие индентора с основанием является стационарным с постоянными во времени внедрением δ^s и зазором r^s , т.е.

$$\begin{aligned} \delta(t) = \delta^s, \quad r(t) = r^s, \quad f_3(z, t) = f^s(z) = f(r^s + h_0 - z) \\ p(t) = p^s = \Phi(r^s); \quad t \leq 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

при этом выражения для объемной силы f_3 и контактного давления p получаются здесь на основе формул (1.2) и (1.3). Здесь и далее верхним индексом s обозначается стационарное состояние слоя. Вопрос определения величины r^s по заданному начальному внедрению δ^s будет рассмотрен ниже.

В момент времени $t = 0$ внедрение δ начинает изменяться некоторым заданным образом, что приводит к изменению и зазора r . Согласно формулам (1.2) и (1.3), функция $r(t)$ полностью определяет эволюцию во времени объемной силы $f_3(z, t)$ и контактного давления $p(t)$.

Деформационные свойства слоя описываются линейным законом наследственного типа [24–26]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(z, t) = \delta_{ij}\lambda\theta(z, t) + 2\mu\varepsilon_{ij}(z, t) - \\ - \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \Lambda(t - \tau)\theta(z, \tau)d\tau - 2 \int_{-\infty}^t M(t - \tau)\varepsilon_{ij}(z, \tau)d\tau, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ – компоненты тензоров деформаций и напряжений в системе координат $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, \theta = \varepsilon_{kk}$, причем здесь и далее применяется правило суммирования по повторяющимся индексам. Величины λ и μ представляют собой мгновенные модули упругости (постоянные Ламе), а функции $\Lambda(t), M(t)$ характеризуют вязкие свойства материала слоя и выражаются через ядра сдвиговой R_1 и объемной R_2 релаксации:

$$\Lambda(t) = \lambda R_2(t) + \frac{2}{3}\mu(R_2(t) - R_1(t)), \quad M(t) = \mu R_1(t) \quad (1.9)$$

Для построения полной системы уравнений НДС слоя соотношение (1.8) следует дополнить формулой Коши: $\varepsilon_{ij}(z, t) = (u_{i,j}(z, t) + u_{j,i}(z, t))/2$ и уравнением равновесия [24, 25]:

$$\sigma_{ij,j}(z, t) + f_i(z, t) = 0, \quad (1.10)$$

в котором объемная сила f_i обусловлена межмолекулярным взаимодействием и определяется равенствами (1.2). Здесь и далее, u_i – компоненты вектора перемещений, и для записи частной производной функции используется общепринятое обозначение с запятой.

Располагая функцией $r(t)$ можно рассчитать эволюцию НДС слоя во времени [27]. В связи с этим ставится задача: при заданной зависимости внедрения δ от времени t определить изменение во времени контактного зазора r .

Далее будет рассматриваться непрерывная зависимость $\delta(t)$, отвечающая переходу слоя из начального стационарного состояния (1.7) в другое стационарное состояние, характеризуемое конечным внедрением δ_m индентора, т.е.

$$\delta(t) \in C(-\infty, \infty); \quad \delta(t) = \delta^s, \quad t \leq 0; \quad \delta(t) = \delta_m, \quad t \geq t_m, \quad (1.11)$$

где t_m – время перемещения индентора. Для такой зависимости будут рассмотрены режимы подвода индентора:

$$\dot{\delta}(t) > 0, \quad t \in (0, t_m); \quad \delta^s < \delta_m \quad (1.12)$$

и отвода индентора:

$$\dot{\delta}(t) < 0, \quad t \in (0, t_m); \quad \delta^s > \delta_m, \quad (1.13)$$

причем производная $\dot{\delta}(t)$ полагается кусочно-непрерывной при $t \in (-\infty, \infty)$.

Подобный характер изменения внедрения $\delta(t)$ позволяет допустить, что функция $r(t)$ ограничена снизу некоторой положительной величиной r_{\min} и непрерывна, кроме, быть может, некоторой точки $\hat{t} > 0$, в которой она имеет разрыв первого рода (т.е. является кусочно-непрерывной):

$$0 < r_{\min} \leq r(t), \quad t \in (-\infty, \infty); \quad r(t) \in C\{(-\infty, \infty) \setminus \hat{t}\} \quad (1.14)$$

Оговоренный разрыв функции $r(t)$ при непрерывном внедрении $\delta(t)$ учитывает возможность скачкообразного изменения параметров контакта при наличии межмолекулярного взаимодействия [12–14, 21].

Кроме того, последнее равенство (1.11) позволяет допустить, что

$$r(t) \rightarrow r_m, \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.15)$$

где r_m – значение контактного зазора в стационарном состоянии с внедрением δ_m . Вопрос определения величины r_m по заданному внедрению δ_m индентора будет рассмотрен ниже.

2. Основные уравнения. Для решения поставленной в предыдущем разделе задачи потребуются конкретизировать ядра интегральных операторов в соотношении (1.8). Не ограничивая общности рассмотрения, пренебрежем объемной ползучестью материала слоя и положим [26, с. 18]: $R_1(t) = R_0 e^{-\alpha t}$, $R_2(t) \equiv 0$, где $\alpha = 1/t_r$, t_r – время релаксации причем, из физических соображений: $0 < R_0 < \alpha$. Тогда, с учетом соотношений (1.9):

$$\begin{Bmatrix} \Lambda(t) \\ M(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Lambda_0 \\ M_0 \end{Bmatrix} e^{-\alpha t}, \quad \Lambda_0 = -\frac{2}{3} \mu R_0, \quad M_0 = \mu R_0 \quad (2.1)$$

Как указывалось выше, для рассматриваемого случая плоскопараллельного контакта индентора со слоем компоненты $u_i, \epsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ НДС слоя зависят только от координаты z и времени t , что приводит к равенству нулю всех этих компонент, кроме $u_3, \epsilon_{33}, \sigma_{11} = \sigma_{22}, \sigma_{33}$. При помощи равенств (1.8) и (2.1) компоненты $\sigma_{11} = \sigma_{22}, \sigma_{33}$ выражаются известным образом через поперечное (вдоль оси z) перемещение $u_3(z, t)$ слоя [27].

Подстановка таких выражений в уравнения равновесия (1.10) позволяет вывести уравнение для перемещения u_3 , из которого следует, что [27]

$$u_3(z, t) = \frac{BN_0}{\alpha} w^s(z) e^{-\beta t} - B \left[X(z, t) + BN_0 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} X(z, \tau) d\tau \right], \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

где

$$B = \frac{1}{\lambda + 2\mu}, \quad B^\infty = \frac{1}{\lambda^\infty + 2\mu^\infty} = \frac{\alpha}{\beta} B, \quad N_0 = \frac{4}{3} \mu R_0, \quad \beta = \alpha - BN_0 > 0 \quad (2.3)$$

$$w^s(z) = -B^\infty X^s(z), \quad X(z, t) = \left(\begin{array}{c} p(t)z \\ \mathcal{R}(f_3)(z, t) \end{array} \right), \quad X^s(z) = \left(\begin{array}{c} p^s z \\ \mathcal{R}(f^s)(z) \end{array} \right),$$

причем $\lambda^\infty, \mu^\infty$ – длительные (равновесные) модули упругости, B и B^∞ – мгновенный и длительный коэффициенты упругой податливости слоя, $w^s(z)$ – поперечное перемещение слоя в стационарном состоянии. В двух последних равенствах верхний/нижний вариант в круглых скобках отвечает традиционной/уточненной постановке задачи, а оператор \mathcal{R} для произвольной функции $g(z) \in C[0, h_0]$ определяется по формуле

$$\mathcal{R}(g)(z) = \int_0^z \Omega(\xi) d\xi - \Omega(h_0)z, \quad \Omega(\xi) = \int_0^\xi g(\eta) d\eta \quad (2.4)$$

Отметим, что перемещение (2.2), как положено, удовлетворяет условию сцепления слоя с абсолютно жесткой подложкой: $u_3(0, t) = 0$. Соответствующее напряжение σ_{33} при $z = h_0$ равно нулю для уточненной постановки задачи и совпадает с отрицательным значением контактного давления p для традиционной постановки задачи. При $t = 0$ перемещение u_3 совпадает с функцией $w^s(z)$.

Введем в рассмотрение функцию $\Psi(r)$ такую, что

$$\Psi(r(t)) = \frac{1}{h_0} \mathcal{R}(f_3)(h_0, t) \quad (2.5)$$

Причем неявная зависимость правой части равенства (2.5) от времени t через функцию $r(t)$ обуславливается выражением (1.2) для компоненты f_3 объемной силы. Согласно равенствам (1.2), (2.4) и (2.5), вид функции $\Psi(r)$ зависит от формы закона парного взаимодействия молекул. В случае закона Леннард–Джонса (1.1) [19]:

$$\Psi(r) = -\frac{A_c}{r_{ec}^k} \left\{ \left(\frac{r_{ec}}{r} \right)^k - \left(\frac{r_{ec}}{r} \right)^l - \frac{r_{ec}}{(k-1)h_0} \left[\left(\frac{r_{ec}}{r} \right)^{k-1} - \left(\frac{r_{ec}}{H} \right)^{k-1} \right] + \right. \\ \left. + \frac{r_{ec}}{(l-1)h_0} \left[\left(\frac{r_{ec}}{r} \right)^{l-1} - \left(\frac{r_{ec}}{H} \right)^{l-1} \right] \right\} \quad (2.6)$$

Введем обозначение:

$$Z(r) = \begin{pmatrix} \Phi(r) \\ \Psi(r) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

используя для него прежнее правило интерпретации верхнего и нижнего вариантов. Отметим следующие свойства функции $Z(r)$:

$$Z(r) \in C^\infty(0, \infty), \quad Z(r(t)) \in C\{(-\infty, \infty) \setminus \hat{r}\} \quad (2.8)$$

первое из которых является следствием выражений (1.5) и (2.6) для функций $\Phi(r)$ и $\Psi(r)$, а второе, означающее кусочную непрерывность $Z(r(t))$ как функция времени t , обеспечивается условиями (1.14) и первым свойством (2.8). Кроме того, принимая во внимание определение (2.3) функции $X(z, t)$ и учитывая равенства (1.3), (1.7) и (2.5), можно установить, что

$$X(h_0, t) = h_0 Z(r(t)), \quad X^s(h_0) = h_0 Z(r^s) \equiv h_0 Z^s \quad (2.9)$$

Используя равенства (2.9), положим в формуле (2.2) $z = h_0$ и получим выражение для граничного перемещения $w(t) = u_3(h_0, t)$. Подставив это выражение в условие контакта (1.6), придем к следующему интегральному уравнению относительно зазора $r(t)$:

$$Bh_0 Z(r(t)) - r(t) = \delta^*(t), \quad t \in [0, \infty) \quad (2.10)$$

в котором

$$\delta^*(t) = \delta(t) - BN_0 I_z(t) \in C[0, \infty) \quad (2.11)$$

$$I_z(t) = Bh_0 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} Z(r(\tau)) d\tau + \frac{Bh_0}{\beta} Z^s e^{-\beta t} \in C[0, \infty) \quad (2.12)$$

Указанная здесь непрерывность функции $\delta^*(t)$ обеспечивается условием (1.11) и свойством (2.12) непрерывности функции $I_z(t)$, причем это свойство является следствием допущения (2.8) [28].

Отметим некоторые свойства производной $\dot{I}_z(t)$. Дифференцирование правой части выражения (2.12) по времени t позволяет установить, что

$$\dot{I}_z(t) = Bh_0 Z(r(t)) - \beta I_z(t) = \frac{\beta}{BN_0} \left[B^\infty h_0 Z(r(t)) - r(t) - \delta(t) \right] \in C \{ [0, \infty) \setminus \hat{t} \} \quad (2.13)$$

при этом второе равенство получается из первого с учетом уравнения (2.10) и указанных выше соотношений $\alpha = \beta + BN_0$, $\alpha B = \beta B^\infty$. Если функция $r(t)$ является гладкой на отрезке $[0, t]$, то выполняя в выражении (2.12) интегрирование по частям и подставляя результат в первое равенство (2.13), можно получить еще одно выражение для производной функции $I_z(t)$:

$$\dot{I}_z(t) = Bh_0 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} Z'(r(\tau)) \dot{r}(\tau) d\tau, \quad \dot{r}(\tau) \in C[0, t] \quad (2.14)$$

На основе интегрального уравнения (2.10) можно вывести следующее дифференциальное уравнение относительно зазора $r(t)$:

$$\dot{r}(t) = F_z(t, r(t)), \quad t \in [0, \infty) \setminus \hat{t}, \quad (2.15)$$

в котором

$$F_z(t, r) = \frac{\dot{\delta}^*(t)}{Bh_0 Z'(r) - 1} = \frac{\dot{\delta}(t) - \beta \left[B^\infty h_0 Z(r) - r - \delta(t) \right]}{Bh_0 Z'(r) - 1} \quad (2.16)$$

Первое выражение (2.16) для функции $F_z(t, r)$ получается непосредственно из продифференцированного по времени t уравнения (2.10), тогда как для вывода второго выражения следует дополнительно воспользоваться выражением (2.11), предварительно исключив из него производную $\dot{I}_z(t)$ с помощью второго равенства (2.13).

Решение дифференциального уравнения (2.15) ищется при начальном условии:

$$r(0) = r^s, \quad (2.17)$$

причем для построения решения в окрестности точки \hat{t} разрыва используется специальная процедура, описанная ниже (раздел 4).

Уравнение (2.10) также позволяет получить соотношение, связывающее начальный r^s и конечный r_m зазоры с соответствующими внедрениями δ^s и δ_m в оговоренных выше стационарных состояниях слоя. Рассмотрим для определенности второе состояние, формирование которого, согласно допущениям (1.11) и (1.15), обуславливается асимптотиками вида $\delta(t) \rightarrow \delta_m$, $r(t) \rightarrow r_m$ при $t \rightarrow \infty$. При таком поведении функции $r(t)$ интеграл в правой части равенства (2.12) также обладает асимптотикой, которая позволяет установить, что $I_z(t) \rightarrow \beta^{-1} B h_0 Z(r_m)$ при $t \rightarrow \infty$. Осуществляя в уравнении (2.10) предельный переход $t \rightarrow \infty$ с учетом указанных асимптотик, приходим к следующему равенству:

$$r_m - B h_0 Z(r_m) = \frac{B N_0}{\beta} B h_0 Z(r_m) - \delta_m$$

Аналогичное равенство имеет место для исходного стационарного состояния с внедрением δ^s и зазором r^s . Учитывая это, а также выражение (2.3) для параметра B^∞ , получим искомое соотношение:

$$D^\infty \left(\begin{Bmatrix} r^s \\ r_m \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} \delta^s \\ \delta_m \end{Bmatrix}, \quad (2.18)$$

где $D^\infty(r) \equiv B^\infty h_0 Z(r) - r$. Это соотношение можно рассматривать как уравнение относительно начального r^s и конечного r_m значений контактного зазора при заданных параметрах δ^s и δ_m закона (1.11)–(1.13) внедрения индентора.

Интегральное уравнение (2.10) или эквивалентное ему дифференциальное уравнение (2.15) определяют изменение зазора r в процессе контактного взаимодействия индентора с основанием. Располагая функцией $r(t)$, можно с помощью равенства (1.6) определить граничное перемещение w , а по формулам (1.8), (2.2) и (2.3) рассчитать НДС слоя в любой момент времени t [27].

3. Общий анализ контактного взаимодействия индентора преследует своей целью выявление характерных особенностей функции $r(t)$ как решения интегрального (2.10) или дифференциального (2.15) уравнений. Эти особенности будут в дальнейшем (раздел 4) учитываться при построении численного решения дифференциального уравнения (2.15).

Укажем вначале некоторые:

3.1. *Особенности произведения $B h_0 Z(r)$* , присутствующего в уравнениях (2.10) и (2.15), как функции переменной r . Для этого отметим, что определяемые по формулам (1.5) и (2.6) функции $\Phi(r)$ и $\Psi(r)$ строятся на основе закона Леннарда–Джонса (1.1) и сохраняют присущие ему характерные особенности [22, 23] – в окрестности нуля они неограниченно возрастают, а при увеличении аргумента r проходят через локальный минимум и стремятся к нулю, оставаясь отрицательными. Очевидно, что аналогичным образом ведут себя и произведения $B h_0 \Phi(r)$ и $B h_0 \Psi(r)$. Функция $B h_0 Z(r)$, представляющая их на основе правила (2.7), схематично изображена на рис. 2.

Как будет показано ниже, поведение контактного зазора $r(t)$ в процессе взаимодействия индентора с основанием существенным образом зависит от того, какой из следующих случаев имеет место:

$$B h_0 Z'(r) \leq 1, \quad r \in (0, \infty) \quad (3.1)$$

или (рис. 2)

$$B h_0 Z'(r) < 1, \quad r \in (0, r_-) \cup (r_+, \infty); \quad B h_0 Z'(r) > 1, \quad r \in (r_-, r_+), \quad (3.2)$$

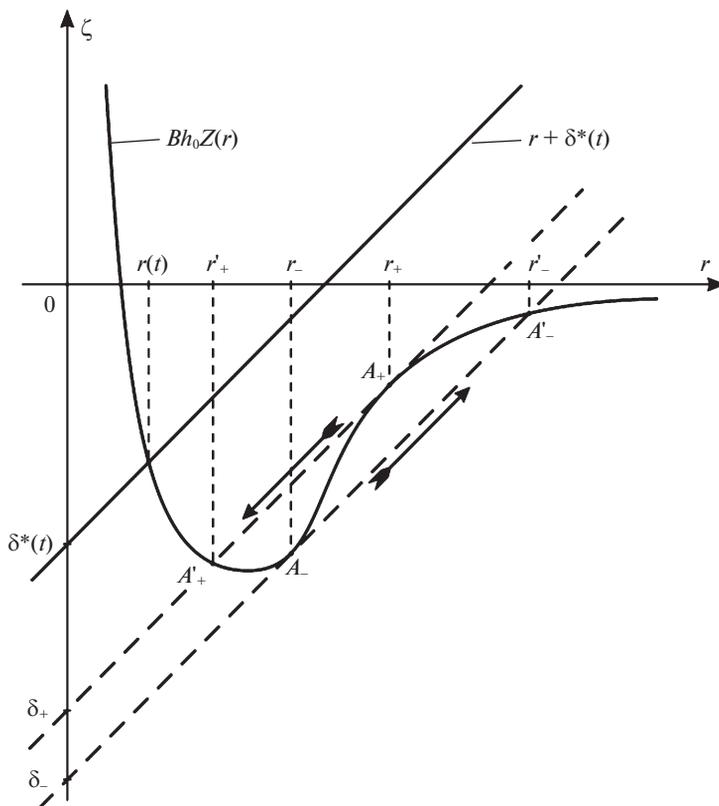


Рис. 2. Графическое представление решения уравнения (2.10).

причем в последнем случае величины r_+ , r_- определяются равенством

$$Bh_0 Z'(r_{\pm}) = 1 \quad (3.3)$$

Опишем некоторые геометрические свойства функции $Bh_0 Z(r)$ в случае (3.2).

В силу равенства (3.3), кривая $\zeta = Bh_0 Z(r)$ в точке A_{\pm} , имеющей координату r_{\pm} , касается прямой $\zeta = r + \delta_{\pm}$ (рис. 2), причем

$$\delta_{\pm} = D(r_{\pm}), \quad D(r) \equiv Bh_0 Z(r) - r \quad (3.4)$$

Кроме того, каждой точке A_{\pm} кривой $\zeta = Bh_0 Z(r)$ соответствует точка A'_{\pm} пересечения этой кривой с прямой $\zeta = r + \delta_{\pm}$ (рис. 2). Координата r'_{\pm} точки A'_{\pm} удовлетворяет равенству

$$D(r'_{\pm}) = D(r_{\pm}) \quad (3.5)$$

Принципиальное различие случаев (3.1) и (3.2) заключается в том, что в первом случае любая прямая $\zeta = r + \delta^*$ пересекает кривую $\zeta = Bh_0 Z(r)$ только в одной точке, тогда как во втором случае это имеет место только, если $\delta^* \in (-\infty, \delta_-) \cup (\delta_+, \infty)$ (рис. 2). При остальных значениях δ^* число точек пересечения может достигать трех.

Указанные свойства функции $Bh_0Z(r)$ остаются в силе и для функции $B^\infty h_0Z(r)$ при формальной замене B на B^∞ . Соответствующие формулы ниже будут помечаться символом “ ∞ ”. В частности, в случае (3.2) $^\infty$ по формулам (3.3) $^\infty$ и (3.4) $^\infty$ можно ввести рассмотрение величины r_\pm^∞ и δ_\pm^∞ . После этого можно установить, что любая прямая $\zeta = r + \delta^*$ пересекает кривую $\zeta = B^\infty h_0Z(r)$ только в одной точке, если (рис. 2)

$$\delta^* \in (-\infty, \delta_-^\infty) \cup (\delta_+^\infty, \infty) \quad (3.6)$$

В случае (3.1) $^\infty$ указанные линии всегда пересекаются в одной точке.

Применительно к уравнению (2.18), решение которого совпадает с координатой точки пересечения кривой $\zeta = B^\infty h_0Z(r)$ и прямой $\zeta = r + \delta^*$, $\delta^* = \begin{Bmatrix} \delta^s \\ \delta_m \end{Bmatrix}$, вышесказанное позволяет заключить, что в случае (3.1) $^\infty$ это уравнение однозначно разрешимо относительно величин r^s и r_m при любых значениях δ^s и δ_m . В случае (3.2) $^\infty$ также можно обеспечить существование однозначного решения уравнения (2.18), если воспользоваться результатом (3.6) и наложить на значения δ^s и δ_m соответствующие ограничения, а именно:

$$\begin{aligned} \delta^s < \delta_-^\infty, \quad \delta_+^\infty < \delta_m & - \text{подвод индентора} \\ \delta_+^\infty < \delta^s, \quad \delta_m < \delta_-^\infty & - \text{отвод индентора} \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2. *Анализ разрывов функции $r(t)$* . Рассмотрим уравнение (2.10), и заметим, что значение его решения $r(t)$ в каждый момент времени совпадает с координатой точки пересечения кривой $\zeta = Bh_0Z(r)$ и прямой $\zeta = r + \delta^*(t)$ (рис. 2). В случае (3.1) эта точка определяется однозначно, так что при непрерывном, согласно условию (2.11), изменении во времени величины $\delta^*(t)$ соответствующая величина $r(t)$ также изменяется непрерывно. Подобное поведение функции $r(t)$ согласуется с дифференциальным уравнением (2.15), правая часть которого не имеет особенностей при наличии неравенства (3.1). С точки зрения аналитического анализа, случай (3.1) представляется тривиальным и в данном разделе рассматриваться не будет.

Однако в случае (3.2) решение $r(t)$ уравнение (2.10) может иметь разрывы. Действительно, если величина $\delta^*(t)$, монотонно возрастая в некоторый момент времени t_+ проходит значение δ_+ , то в этот момент точка пересечения кривой $\zeta = Bh_0Z(r)$ и прямой $\zeta = r + \delta^*(t)$ должна мгновенно поменяться с A_+ на A'_+ , а соответствующее значение $r(t)$ – с r_+ на r'_+ (рис. 2). Аналогично, если величина $\delta^*(t)$, монотонно убывая в некоторый момент времени t_- проходит значение δ_- , то в этот момент точка пересечения кривой $\zeta = Bh_0Z(r)$ и прямой $\zeta = r + \delta^*(t)$ должна мгновенно поменяться с A_- на A'_- , а соответствующее значение $r(t)$ – с r_- на r'_- (рис. 2).

Таким образом, в случае (3.2) возможно скачкообразное изменение зазора $r(t)$:

$$r(t_+ - 0) = r_+, \quad r(t_+ + 0) = r'_+ - \text{скачок} \quad r_+ \rightarrow r'_+ \quad (3.8)$$

$$r(t_- - 0) = r_-, \quad r(t_- + 0) = r'_- - \text{скачок} \quad r_- \rightarrow r'_- \quad (3.9)$$

Момент времени t_{\pm} скачка удовлетворяет равенству $\delta^*(t_{\pm}) = \delta_{\pm}$ и представляет собой точку \hat{t} разрыва функции $r(t)$, оговоренную в условии (1.14). Здесь и далее используется общепринятая сокращенная запись пределов функции слева и справа:

$$f(a-0) \equiv \lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \quad f(a+0) \equiv \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

Описанное выше поведение функции $r(t)$ согласуется с дифференциальным уравнением (2.15), правая часть которого, в силу первого неравенства (3.2) и равенства (3.3), имеет сингулярные особенности при $r(t) \rightarrow r_{\pm} \pm 0$. Как будет показано ниже, скачок $r_+ \rightarrow r'_+$ реализуется при подводе индентора (условие (1.12)), тогда как скачок $r_- \rightarrow r'_-$ — при его отводе (условие (1.13)).

Отметим, что значения r_{\pm} и r'_{\pm} можно считать известными, т.к. они являются корнями алгебраических уравнений (3.4) и (3.5). Однако значение t_{\pm} заранее неизвестно и определяется в ходе решения уравнения (2.10) или (2.15) как момент достижения функцией $r(t)$ значения r_{\pm} .

Аналогичное рис. 2 графическое представление скачкообразного изменения контактного зазора встречается в работе [29] применительно к подпружиненному адгезионному контакту твердых тел.

Наличие скачка (3.8) или (3.9) в случае (3.2), очевидно, зависит от возможности достижения зазором $r(t)$ значения r_{\pm} с течением времени. Кроме того, предполагаемый выше монотонный характер функции $\delta^*(t)$ в окрестности ее значений δ_{\pm} , согласно равенствам (2.11) и (2.12), зависит от поведения функции $r(\tau)$ при $\tau \in [0, t]$. Таким образом, описанное выше скачкообразное изменение контактного зазора может быть установлено и проанализировано только путем построения соответствующей функции $r(t)$, как решения интегрального (2.10) или дифференциального (2.15) уравнения. Тем не менее, можно выявить ряд характерных особенностей скачкообразного изменения функции $r(t)$, исходя из некоторых общих допущений относительно ее свойств. Сделаем это, считая внедрение индентора гладким на отрезке $[0, t_m]$, т.е.

$$\delta(t) \in C[0, t_m] \quad (3.10)$$

при условии, что $\delta(0) = \delta(0+0)$, $\delta(t_m) = \delta(t_m-0)$.

Предположим, что в режиме (1.12) подвода индентора функция $r(t)$ монотонно убывает, достигая значения r_+ в момент времени t_+ , когда происходит скачок $r_+ \rightarrow r'_+$ (3.8). В этом случае, при $t \in [0, t_+)$: $r_+ < r(t)$ и, следовательно, в силу первого неравенства (3.2), $Bh_0 Z'(r(t)) - 1 < 0$. Последнее неравенство и свойства (1.14), (3.10) позволяют на основе уравнения (2.15) установить непрерывность производной $\dot{r}(t)$ на промежутке $[0, t_+)$. Вышесказанное позволяет записать следующие соотношения:

$$\dot{r}(t) < 0, \quad t \in [0, t_+); \quad \dot{r}(t) \in C[0, t_+) \quad (3.11)$$

В связи со сделанным предположением о монотонном убывании функции $r(t)$ заметим, что вначале процесса подвода индентора: $\dot{r}(t) < 0$, если дополнительно к условию (1.12) допустить неравенство $0 < \delta(0+0)$. Этот результат непосредственно следует из уравнения (2.15) с учетом уравнения (2.18) для r^s и первого неравенства (3.2) при $r = r^s > r_+$.

Аналогичным образом, предполагая, что в режиме (1.13) отвода индентора функция $r(t)$ монотонно возрастает до скачка $r_- \rightarrow r'_-$ (3.9), можно записать соотношения

$$0 < \dot{r}(t), \quad t \in [0, t_-); \quad \dot{r}(t) \in C[0, t_-) \quad (3.12)$$

Дальнейшие выкладки для краткости ограничим рассмотрением режима (1.12) подвода индентора, отметив, что они без труда переносятся на случай режима (1.13) отвода индентора.

Свойства (3.11) функции $r(t)$ позволяют использовать для производной $\dot{I}_z(t)$ на промежутке $[0, t_+)$ представление (2.14), подынтегральное выражение в котором принимает только отрицательные значения, т.к. $0 < Z'(r)$ при $r_+ < r$ (рис. 2). Таким образом, оказывается, что

$$\dot{I}_z(t) < 0, \quad t \in [0, t_+) \quad (3.13)$$

и, следовательно, с учетом выражения (2.11) и условия (1.12):

$$0 < \delta^*(t), \quad t \in [0, t_+) \quad (3.14)$$

Покажем, что неравенство (3.14) сохраняется некоторое время после скачка (3.8), т.е. имеет место предполагаемое монотонное возрастание функции $\delta^*(t)$ в окрестности ее значения δ_+ . Для этого воспользуемся выражением (2.13) и установим, что производная $\dot{I}_z(t)$ в точке $\hat{t} = t_+$ имеет конечные пределы слева и справа:

$$\dot{I}_z(t_+ - 0) = Bh_0Z(r_+) - \beta I_z(t_+), \quad \dot{I}_z(t_+ + 0) = Bh_0Z(r'_+) - \beta I_z(t_+) \quad (3.15)$$

При записи формул (3.15) учтены соответствующие пределы (3.8) функции $r(t)$ и принято во внимание свойство (2.12) непрерывности функции $I_z(t)$. Исключая из формул (3.15) величину $I_z(t_+)$, можно получить равенство

$$\dot{I}_z(t_+ + 0) = \dot{I}_z(t_+ - 0) + [Bh_0Z(r'_+) - Bh_0Z(r_+)]$$

правая часть которого отрицательна, т.к. $\dot{I}_z(t_+ - 0) \leq 0$ в силу неравенства (3.13) и отрицательной является разность в квадратных скобках – это с очевидностью следует из рис. 2. Таким образом, оказывается, что предел $\dot{I}_z(t_+ + 0)$ является отрицательным и, поэтому, по известной теореме об устойчивости знака непрерывной функции [28], этим свойством производная $\dot{I}_z(t)$ обладает в некоторой окрестности точки t_+ , т.е. $\dot{I}_z(t) < 0, t \in (t_+, t_+ + \varepsilon)$, где ε – сколь угодно малая положительная величина. Из последнего неравенства с учетом равенства (2.11) и условия (1.12) получается требуемый результат:

$$0 < \delta^*(t), \quad t \in (t_+, t_+ + \varepsilon) \quad (3.16)$$

Проведенные выкладки позволяют также установить существование положительных односторонних пределов функции $\delta^*(t)$ в точке t_+ :

$$0 < \delta^*(t_+ \pm 0) \quad (3.17)$$

Действительно, это непосредственно следует из равенства (2.11) при учете условия (3.10) и формул (3.15).

3.3. *Характер поведения функции $r(t)$ в окрестности точки разрыва*, т.е. при $t \rightarrow t_+ \pm 0$, можно определить с помощью дифференциального уравнения (2.15), используя в нем первое выражение (2.16) для функции $F_z(t, r)$. Осуществим в этом уравнении предельный переход $t \rightarrow t_+ + 0$, учитывая второй предел (3.8). В результате установим, что

$$\dot{r}(t_+ + 0) = \frac{\delta^*(t_+ + 0)}{Bh_0Z'(r'_+) - 1} < 0, \quad (3.18)$$

причем справедливость неравенства (3.18) обеспечивается неравенствами (3.17) и $Bh_0 Z'(r_+) - 1 < 0$, последнее из которых имеет место в силу первого неравенства (3.2) при том, что $r_+^1 < r_-$ (рис. 2). Таким образом, производная $\dot{r}(t)$, как и сама функция $r(t)$, имеет конечный предел при $t \rightarrow t_+ + 0$.

Однако получить аналогичное (3.18) выражение для $\dot{r}(t_+ - 0)$ не удастся, т.к., в силу первого предельного соотношения (3.8) и равенства (3.3), знаменатель в правой части уравнения (2.15) при $t \rightarrow t_+ - 0$ стремится к нулю слева, а сама правая часть, соответственно, к $-\infty$. Данное обстоятельство требует более детального анализа поведения функции $r(t)$ при $t \rightarrow t_+ - 0$.

Приступая к такому анализу, примем во внимание существование конечного предела $\delta^*(t_+ - 0)$ и положим по непрерывности $\delta^*(t_+) = \delta^*(t_+ - 0)$, так что

$$\delta^*(t) \in C[0, t_+]; \quad 0 < \delta^*(t), \quad t \in [0, t_+] \quad (3.19)$$

Указанная непрерывность функции $\delta^*(t)$ обуславливается свойствами (2.13) и (3.10) при наличии выражения (2.11), тогда как неравенство (3.19) является следствием неравенств (3.14) и (3.17).

Учитывая свойство (2.8) функции $Z(r)$, воспользуемся для ее производной формулой Тейлора [28]

$$Z'(r) = Z'(r_+) + Z''(\rho(r))(r - r_+), \quad r \in [r_+, \infty), \quad (3.20)$$

причем $\rho(r)$ некоторая функция, о которой известно только то, что $\rho(r) \in [r_+, r]$ и поэтому имеет место предельное соотношение $\rho(r_+ + 0) = r_+$. Принимая во внимание это соотношение и условие (1.14), положим по непрерывности

$$\rho(r_+) = \rho(r_+ + 0) = r_+, \quad r(t_+) = r(t_+ - 0) = r_+ \quad (3.21)$$

Отметим, что при втором допущении (3.21) и условии (1.14) функцию $r(t)$ можно считать непрерывной на отрезке $[0, t_+]$.

Введем в рассмотрение функции $Z_1(r)$ и $Z_2(t)$ такие, что

$$Z_1(r) = Z''(\rho(r)), \quad Z_2(t) = Z_1(r(t)) \quad (3.22)$$

$$Z_2(t_+) = Z_1(r_+) = Z''(\rho(r_+)) = Z''(r_+) < 0, \quad (3.23)$$

причем последние равенства имеют место в силу условий (3.21), а справедливость неравенства обуславливается выпуклостью функции $Z(r)$ в окрестности точки r_+ (рис. 2).

Определяемая равенством (3.22) функция $Z_1(r)$ непрерывна на интервале (r_+, ∞) — это следует из формулы (3.20) при условии (2.8) непрерывности производной $Z'(r)$. Кроме того, в силу равенств (3.21)–(3.23): $Z_1(r_+ + 0) = Z_1(r_+)$, т.е. функция $Z_1(r)$ непрерывна в точке r_+ справа. Таким образом, оказывается, что $Z_1(r) \in C[r_+, \infty)$.

Установленные выше свойства непрерывности функций $r(t)$ и $Z_1(r)$ обеспечивают непрерывность сложной функции $Z_1(r(t))$ при $t \in [0, t_+]$ [28], поэтому, на основе второго равенства (3.22):

$$Z_2(t) \in C[0, t_+] \quad (3.24)$$

Кроме того, согласно соотношениям (3.23): $Z_2(t_+) < 0$, так что, по известной теореме об устойчивости знака непрерывной функции [28]

$$Z_2(t) < 0, \quad t \in [t_+ - \varepsilon, t_+], \quad (3.25)$$

где ε — сколь угодно малая положительная величина.

Использование функции $Z_2(t) \equiv Z''(\rho(r(t)))$ и учет равенства (3.3) в формуле (3.20) позволяет записать выражение

$$Bh_0Z'(r(t)) = 1 + Bh_0Z_2(t)[r(t) - r_+],$$

с помощью которого дифференциальному уравнению (2.15) можно придать следующий вид:

$$\dot{r}(t) = \frac{K(t)}{r_+ - r(t)}, \quad (3.26)$$

где

$$K(t) \equiv \frac{-\dot{\delta}^*(t)}{Bh_0Z_2(t)} \in C[t_+ - \varepsilon, t_+]; \quad 0 < K(t) < \infty, \quad t \in [t_+ - \varepsilon, t_+] \quad (3.27)$$

Указанные свойства функции $K(t)$ обеспечиваются соотношениями (3.19), (3.24) и (3.25).

Интегрирование уравнения (3.26) позволяет установить, что

$$0 = \frac{1}{2}[r(t) - r_+]^2 + \int_{t_+}^t K(\xi)d\xi = \frac{1}{2}[r(t) - r_+]^2 + K(\tau(t))(t - t_+), \quad (3.28)$$

причем второе равенство (3.28) получается с помощью теоремы о среднем [28], $\tau(t) \in [t, t_+]$, $\tau(t_+ - 0) = t_+$. Из этого равенства следует, что

$$r(t) = r_+ + \sqrt{2K(\tau(t))(t_+ - t)}, \quad t \in [t_+ - \varepsilon, t_+], \quad (3.29)$$

при этом существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow t_+ - 0} K(\tau(t)) = K(t_+) = \frac{-\dot{\delta}^*(t_+ - 0)}{Bh_0Z''(r_+)} \quad (3.30)$$

Справедливость равенств (3.30) обеспечивается соотношениями (3.23), (3.27) и предельным соотношением $\tau(t_+ - 0) = t_+$.

Поведение функции $r(t)$ в окрестности точки t_- в режиме (1.13) отвода индентора описывается аналогичными формулами:

$$\dot{r}(t_- + 0) = \frac{\dot{\delta}^*(t_- + 0)}{Bh_0Z'(r'_-) - 1} > 0 \quad (3.31)$$

$$r(t) = r_- - \sqrt{2K(\tau(t))(t_- - t)}, \quad t \in [t_- - \varepsilon, t_-], \quad (3.32)$$

причем

$$\lim_{t \rightarrow t_- - 0} K(\tau(t)) = K(t_-) = \frac{-\dot{\delta}^*(t_- - 0)}{Bh_0Z''(r_-)}$$

Таким образом, выражения (3.29) и (3.32) свидетельствуют о том, что перед скачком $r_{\pm} \rightarrow r'_{\pm}$ зазор $r(t)$ изменяется по корневому закону. Соответствующая скорость $\dot{r}(t)$ изменения зазора стремится к $\mp \infty$, что согласуется с описанным ранее поведением правой части дифференциального уравнения (2.15) при $t \rightarrow t_{\pm} - 0$. После скачка $r_{\pm} \rightarrow r'_{\pm}$, согласно выражениям (3.18) и (3.31), зазор $r(t)$ изменяется с конечной скоростью без каких-либо особенностей.

Выявленные особенности поведения функции $r(t)$ качественно сохраняются для объемной силы $f_3(z, t)$ и контактного давления $p(t)$, т.к. они определяются величиной зазора r через гладкие функции $f(d)$ и $\Phi(r)$ согласно формулам (1.2) и (1.3). Некоторые из этих особенностей будут продемонстрированы в следующем разделе на примерах численного решения дифференциального уравнения (2.15).

Замечание 1. Реализация случая (3.2) и, соответственно, возможность скачкообразного изменения зазора $r(t)$, зависит только от коэффициента B упругой податливости слоя, его толщины h_0 и физических параметров межмолекулярного взаимодействия, входящих в выражения (1.5), (2.6) для функции $\Phi(r)$, $\Psi(r)$. Только от этих величин, согласно уравнениям (3.4) и (3.5), зависят начальное r_{\pm} и конечное r_{\pm}' значения зазора r при скачке (3.8) или (3.9). Вязкие свойства материала слоя (— параметры ядер релаксации в законе (1.8)) не оказывают влияния на возможность скачка зазора r и на его параметры r_{\pm} и r_{\pm}' .

Замечание 2. Случай (3.1) имеет место при достаточно малых значениях коэффициента B упругой податливости слоя, отвечающих, согласно выражению (2.3), высоким значениям модулей λ, μ упругости. Напротив, случай (3.2), при котором возможны скачки (3.8) и (3.9), реализуется при достаточно малых значениях коэффициента B и низких модулях λ, μ , т.е. для мягкого слоя. Такой вывод согласуется с известным результатом о появлении скачков в адгезионном контакте упругих тел при больших значениях параметра Тейбора, характеризующего степень упругой деформации, вызванной межмолекулярным взаимодействием [12, 14, 21].

Замечание 3. При традиционной постановке задачи, используя уравнение (2.10), можно построить зависимость контактного давления p от величины $a = -\delta^*$, которая для упругого слоя (т.е. при $N_0 = 0$) совпадает с отрицательным значением внедрения δ и характеризует сближение индентора со слоем (рис. 3). В случае (3.2) эта зависимость является неоднозначной (S-образной), причем в режиме подвода и отвода индентора скачку (3.8) или (3.9) отвечает скачок $\alpha_+ \alpha'_+$ или $\alpha_- \alpha'_-$, показанный на рис. 3. Подобные зависимости контактной нагрузки от сближения тел встречается во многих исследованиях адгезионного контакта упругих тел, среди которых можно отметить работы [12, 14, 21].

4. Численный анализ контактного взаимодействия индентора с основанием выполнялся на основе решения дифференциального уравнения (2.15) относительно функции $r(t)$ с использованием численного метода Рунге—Кутты четвертого порядка точности [30]. В случае (3.1), когда правая часть уравнения (2.15) не имеет особенностей, применение этого метода не встречает затруднений. Однако в случае (3.2) при решении уравнения (2.15) возникают две проблемы, обусловленные наличием сингулярной особенности правой части этого уравнения в точке t_{\pm} . Укажем эти проблемы и способы их устранения на примере режима подвода индентора.

Первая проблема связана с асимптотикой $\dot{r}(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow t_+ - 0$ и $r(t) \rightarrow r_+ + 0$, которая имеет место согласно формуле (3.29). Подобное поведение функции $r(t)$, в частности, существенно осложняет расчет момента t_+ скачка $r_+ \rightarrow r_+'$ (3.8) этой функции. Устранить эту проблему можно, если в окрестности $t_+ - 0$ вместо искомой функции $r(t)$ использовать обратную к ней функцию $t(r)$, что допустимо при условии (3.11) монотонности функции $r(t)$. Дифференциальное уравнение для функции $t(r)$ получается непосредственно из уравнения (2.15) и имеет вид

$$t'(r) = [F_2(t(r), r)]^{-1} \quad (4.1)$$

Правая часть уравнения (4.1) не имеет особенностей в окрестности $r_+ + 0$ значений переменной r и само уравнение может быть решено методом Рунге—Кутты, например, на отрезке $[r_+, r^s]$ при начальном условии $t(r^s) = 0$. Найденное решение $t(r)$ определяет функцию $r(t)$ на отрезке $[0, t_+]$ и момент t_+ как значение $t(r_+)$.

Вторая проблема, возникающая при решении уравнения (2.15) в случае (3.2), связана с наличием скачка $r_+ \rightarrow r_+'$ (3.8) функции $r(t)$. Это не позволяет использовать единую процедуру численного решения уравнения (2.15) (или (4.1)) на всем промежутке

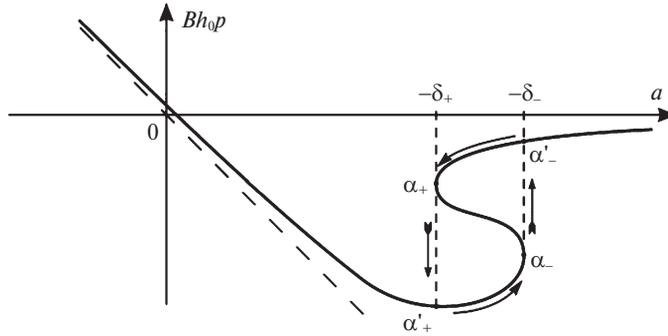


Рис. 3. Графическое представление зависимости контактного давления от сближения.

времени $[0, \infty)$ с начальным условием (2.17). Устранить проблему такого типа можно, если организовать новую процедуру численного решения уравнения (2.15) на промежутке времени $[t_+, \infty)$, т.е. после скачка $r_+ \rightarrow r'_+$, с начальным условием

$$r(t_+) = r'_+ \quad (4.2)$$

Отметим, что, согласно результатам предыдущего раздела, правая часть уравнения (2.15) не имеет особенностей в окрестности $t_+ + 0$, поэтому применение метода Рунге–Кутты для решения этого уравнения на промежутке $[t_+, \infty)$ при условии (4.2) не встречает затруднений.

Использование описанных выше процедур учета сингулярной особенности правой части дифференциального уравнения (2.15) позволяет применить к нему известную теорему существования и единственности решения [31].

Расчеты проводились при следующих значениях параметров задачи: $m = 7$, $n = 13$, $r_{ec} = 1$ нм, $r_{eb} = 0.5 r_{ec}$, $R_0 = 0.8 \text{ с}^{-1}$, $t_r = 1$ с, $h_0 = 2$ нм (тонкий слой) или $h_0 = 5$ нм (толстый слой). Кроме того, полагалось, что $A_{lc} = (6\pi)^{-1} A_H$ [12] и $A_{lb} = 10 A_{lc}$, где A_H – постоянная Гамакера, $A_H = 10^{-19}$ Дж. Были рассмотрены два варианта упругих свойств слоя: $\lambda = 1.0417$ МПа, $\mu = 1.5625$ МПа (мягкий слой) и $\lambda = 2.0833$ МПа, $\mu = 3.1250$ МПа (жесткий слой), которым отвечают значения $B = 0.24 \text{ МПа}^{-1}$ и $B = 0.12 \text{ МПа}^{-1}$ мгновенного коэффициента упругой податливости слоя.

Изменение внедрения индентора за время t_m от начального δ^s до конечного δ_m значений считалось линейным:

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta^s, & t \leq 0 \\ \delta^s + (\delta_m - \delta^s)t/t_m, & t \in (0, t_m), \\ \delta_m, & t \geq t_m \end{cases} \quad (4.3)$$

причем $\delta^s < \delta_m$ для режима подвода индентора и $\delta^s > \delta_m$ для режима отвода индентора. При расчетах полагалось, что $t_m = 2t_r$ (быстрое перемещение индентора) или $t_m = 40t_r$ (медленное перемещение индентора),

$$\begin{aligned} \delta^s = -4r_{ec}, \quad \delta_m = 0.1r_{ec} & - \text{подвод индентора} \\ \delta^s = 0.1r_{ec}, \quad \delta_m = -4r_{ec} & - \text{отвод индентора} \end{aligned} \quad (4.4)$$

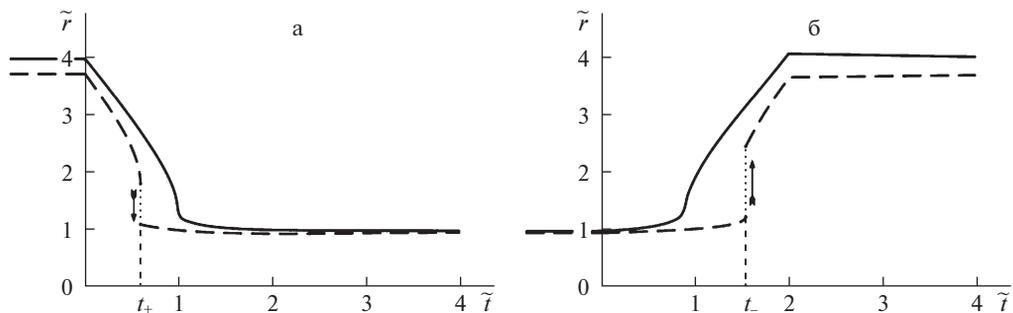


Рис. 4. Зависимости контактного зазора от времени в режиме подвода (а) и отвода (б) индентора (тонкий мягкий слой).

Выбор (4.4) значений δ^s и δ_m означает, что отвод индентора начинается из его конечного положения в режиме подвода, и за цикл “подвод—отвод” индентор возвращается в исходное положение. Кроме того, выбранные значения δ^s и δ_m удовлетворяют условию (3.7) существования однозначного решения уравнения (2.18), причем соответствующие значения r^s и r_m удовлетворяют неравенствам

$$r_+ < r^s, \quad r_m < r_+^* - \text{подвод индентора}$$

$$r^s < r_-, \quad r_-^* < r_m - \text{отвод индентора,}$$

которые обеспечивают наличие скачка (3.8) или (3.9) в случае (3.2) (рис. 2). Согласно уравнению (2.18), добиться выполнения этих неравенств можно, если использовать достаточно малые (большие) значения δ^s и достаточно большие (малые) значения δ_m при подводе (отводе) индентора.

Зависимость контактного давления p от времени t рассчитывалась с помощью формулы (1.3) по найденному решению $r(t)$ уравнения (2.15). Отметим, что, как указывалось выше, при уточненной постановке задачи поверхность слоя свободна от нагрузок, поэтому контактное давление в классическом смысле отсутствует. Определяемая по формуле (1.3) величина p в этом случае интерпретируется как контактное давление, т.к. представляет собой силу воздействия индентора на основание, приходящуюся на единицу площади его поверхности.

Для графического представления результатов расчетов ниже используются безразмерные величины $\tilde{t} = t/t_r$, $\tilde{r} = r/r_{ec}$, $\tilde{p} = p/E_*$, $E_* = 1$ МПа. Сплошные (штриховые) линии на графиках отвечают уточненной (традиционной) постановке задачи.

На рис. 4 и 5 показаны расчетные зависимости контактного зазора и давления от времени в режиме подвода (а) и отвода (б) индентора при $B = 0.24$ МПа⁻¹, $h_0 = 2$ нм (тонкий мягкий слой) и $t_m = 2t_r$ (быстрое перемещение индентора). При таких значениях параметров B, h_0 для уточненной постановки задачи выполняется неравенство (3.1), тогда как для традиционной постановки задачи имеет место случай (3.2), при котором возможны скачки (3.8) (или (3.9)) в режиме подвода (отвода) индентора. Этим объясняется показанный на рис. 4 и 5 непрерывный характер функций $r(t)$ и $p(t)$ при уточненной постановке задачи (сплошные линии) и наличие у этих функций скачков при традиционной постановке задачи (штриховые линии). Выполненные расчеты подтверждают предположение (3.11), (3.12) о монотонном характере изменения функции $r(t)$ на промежутке времени $[0, t_{\pm}]$.

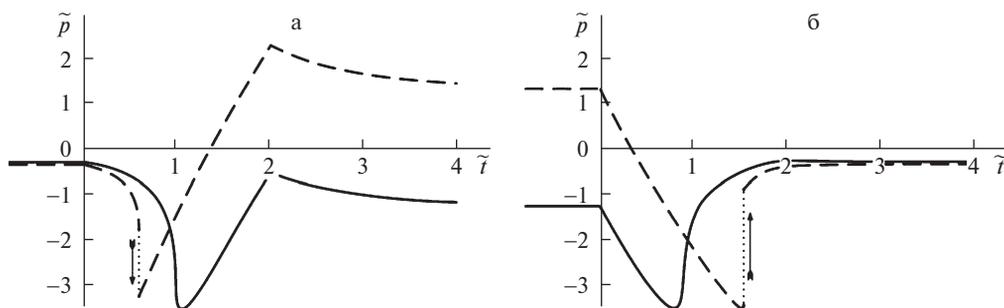


Рис. 5. Зависимости контактного давления от времени в режиме подвода (а) и отвода (б) индентора (тонкий мягкий слой).

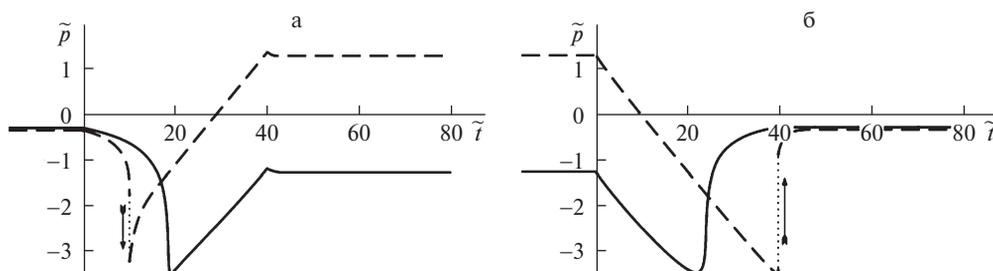


Рис. 6. Зависимости контактного давления от времени в режиме подвода (а) и отвода (б) индентора при медленном перемещении индентора (тонкий мягкий слой).

На рис. 6 показано поведение контактного давления при прежних значениях параметров B, h_0 (тонкий мягкий слой) и $t_m = 40t_r$ (медленное перемещение индентора). В данном случае, по причине медленного деформирования, слой ведет себя как упругое тело с длительными модулями $\lambda^\infty, \mu^\infty$ [24], что объясняет отсутствие на рис. 6 заметной релаксации контактного давления при $t > t_m$.

Если использовать слой той же толщины $h_0 = 2$ нм, но с более низким коэффициентом упругой податливости $B = 0.12$ МПа⁻¹ (тонкий жесткий слой), то для обеих постановок задачи выполняется неравенство (3.1). Соответствующие непрерывные зависимости контактного давления от времени в режимах подвода и отвода индентора при $t_m = 2t_r$ показаны на рис. 7 а и б.

Увеличение толщины слоя до значения $h_0 = 5$ нм при прежнем коэффициенте упругой податливости $B = 0.12$ МПа⁻¹ (толстый жесткий слой) приводит к нарушению неравенства (3.1) и реализации случая (3.2) как для уточненной, так и для традиционной постановки задачи. Соответствующие зависимости контактного давления от времени со скачком в режимах подвода (отвода) индентора при $t_m = 2t_r$ показаны на рис. 8 а и б.

Как и следовало ожидать при сделанном выборе (4.4) параметров закона (4.3) внедрения, на рисунках 4–8 начальные (конечные) значения функций $r(t)$ и $p(t)$ в режиме подвода индентора совпадают с их конечными (начальными) значениями в режиме отвода индентора.

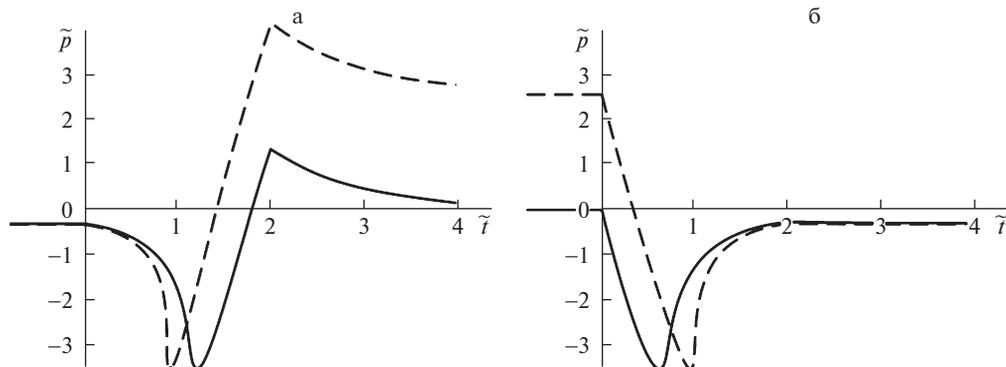


Рис. 7. Зависимости контактного давления от времени в режиме подвода (а) и отвода (б) индентора (тонкий жесткий слой).

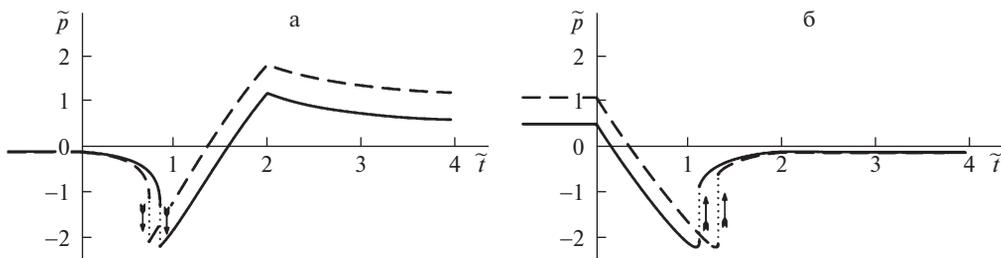


Рис. 8. Зависимости контактного давления от времени в режиме подвода (а) и отвода (б) индентора (толстый жесткий слой).

Рис. 4, 5, 7 и 8 иллюстрируют влияние параметров B и h_0 на скачкообразное поведение контактного зазора и давления. В частности, оказывается, что появлением или отсутствием скачков этих величин можно управлять путем изменения толщины h_0 слоя.

Представленные результаты свидетельствуют о том, что реализация скачкообразного поведения контактного зазора и давления зависит от используемой постановки задачи. Так, в случае тонкого мягкого слоя (рис. 4 и 5), при уточненной постановке задачи скачок функций $r(t)$ и $p(t)$ отсутствует, а при традиционной постановке задачи — присутствует.

Выводы.

1. Рассмотрен контакт бесконечно протяженного плоского индентора и вязкоупругого слоя в рамках самосогласованного по Дерягину подхода с поверхностным (традиционная постановка) и объемным (уточненная постановка) приложением сил межмолекулярного взаимодействия. Получены эквивалентные друг другу интегральное (2.10) и дифференциальное (2.15) уравнения, описывающие изменение контактного зазора r во времени при таком контакте.

2. Сформулировано условие в виде неравенств (3.2), при котором возможно скачкообразное изменение контактного зазора во времени. Реализация такого поведения зависит от используемой постановки задачи (уточненная или традиционная), упругих

свойств слоя, его толщины, параметров межмолекулярного взаимодействия, и не зависит от вязких свойств материала слоя.

3. Выявлены особенности скачкообразного поведения контактного зазора во времени. В частности, установлено, что перед скачком скорость изменения контактного зазора в режиме подвода/отвода индентора неограниченно убывает/возрастает.

4. Предложен и реализован алгоритм построения разрывного решения дифференциального уравнения (2.15), учитывающий выявленные особенности скачкообразного поведения контактного зазора во времени.

5. Выполненные расчеты свидетельствуют о немонотонном характере зависимостей контактного зазора и давления от времени в режимах подвода и отвода индентора. Показано, что традиционная и уточненная постановки задачи могут приводить к существенно различным результатам расчета характеристик контакта индентора и вязкоупругого слоя.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при финансовой поддержке РФФИ и БРФФИ в рамках научного проекта № 20-58-00007.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Derjaguin B.* Untersuchungen über die Reibung und Adhäsion, IV. Theorie des Anhaftens kleiner Teilchen // *Kolloid-Zeitschrift*. 1934. Bd.69. H.2. S.155–164.
2. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1971. V. 324. № 1558. P. 301–313.
3. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *J. Coll. Interface Sci.* 1975. V. 53. № 2. P. 314–326.
4. *Sridhar I., Johnson K.L., Fleck N.A.* Adhesion mechanics of the surface force apparatus // *J. Phys. D. Appl. Phys.* 1997. V. 30. № 12. P. 1710–1719.
5. *Sergici A.O., Adams G.G., Müftü S.* Adhesion in the contact of a spherical indenter with a layered elastic half-space // *J. Mech. Phys. Solids*. 2006. V. 54. № 9. P. 1843–1861.
6. *Reedy E.D.* Thin-coating contact mechanics with adhesion // *J. Mater. Res.* 2006. V. 21. № 10. P. 2660–2668.
7. *Borodich F.M., Galanov B.A., Perepelkin N.V., Prikazchikov D.A.* Adhesive contact problems for a thin elastic layer: Asymptotic analysis and the JKR theory // *Math.&Mech. Solids*. 2018. V. 24. № 5. P. 1405–1424.
8. *Greenwood J.A., Johnson K.L.* The mechanics of adhesion of viscoelastic solids // *Phil. Mag. A*. 1981. V. 43. № 3. P. 697–711.
9. *Горячева И.Г., Губенко М.М., Маховская Ю.Ю.* Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учетом сил молекулярного притяжения // *ПМТФ*. 2014. Т. 55. № 1. С. 99–107.
10. *Lin Y.Y., Hui C.Y.* Mechanics of contact and adhesion between viscoelastic spheres: An analysis of hysteresis during loading and unloading // *J. Polym. Sci. Part B: Polym. Phys.* 2002. V. 40. P. 772–793.
11. *Haiat G., Phan Huy M.C., Barthel E.* The adhesive contact of viscoelastic spheres // *J. Mech.&Phys. Solids*. 2003. V. 51. № 1. P. 69–99.
12. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // *J. Coll. Interface Sci.* 1980. V. 77. № 1. P. 91–101.
13. *Attard P., Parker J.L.* Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // *Phys. Rev. A*. 1992. V. 46. № 12. P. 7959–7971.
14. *Greenwood J.A.* Adhesion of elastic spheres // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1997. V. 453. № 1961. P. 1277–1297.
15. *Солдатенков И.А.* Применение метода последовательных приближений к расчету упругого контакта при наличии молекулярной адгезии // *ПММ*. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 734–743.
16. *McMeeking R.M.* A Maxwell stress for material interactions // *J. Coll. Interface Sci.* 1998. V. 199. № 2. P. 187–196.
17. *Sauer R.A., Li S.* A contact mechanics model for quasi-continua // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2007. V. 71. № 8. P. 931–962.

18. *He L.H.* Stress and deformation in soft elastic bodies due to intermolecular forces // *J. Mech. Phys. Solids*. 2013. V. 61. № 6. P. 1377–1390.
19. *Солдатенков И.А.* Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия (уточненная постановка) // *ПММ*. 2013. Т. 77. Вып. 6. С. 877–893.
20. *Overbeek J.T.G., Sparnaay M.J.* Classical coagulation. London-van der Waals attraction between macroscopic objects // *Discuss. Faraday Soc.* 1954. V. 18. P. 12–24.
21. *Wu J.-J.* The jump-to-contact distance in atomic force microscopy measurement // *J. Adhesion*. 2010. V. 86. № 11. P. 1071–1085.
22. *Kaplan I.G.* Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials. Chichester: Wiley, 2006. xii + 367 p.
23. *Israelachvili J.N.* Intermolecular and Surface Forces. London: Academic, 2011. xxx + 674 p.
24. *Кристенсен П.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
25. *Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин Б.П.* Механика полимеров. М.: Изд-во Московского ун-та, 1975. 528 с.
26. *Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
27. *Солдатенков И.А.* Контакт с межмолекулярным взаимодействием для вязкоупругого слоя (самосогласованный подход): расчет НДС и диссипации энергии // *ПММ*. 2020. Т. 84. № 1. С. 102–121.
28. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3-х тт.). М.: Физматлит, 2001. Т. 1. 616 с. Т. 2. 810 с.
29. *Chen Y.L., Helm C.A., Israelachvili J.N.* Molecular mechanisms associated with adhesion and contact angle hysteresis of monolayer surfaces // *J. Phys. Chem.* 1991. V. 95. № 26. P. 10736–10747.
30. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 586 с.
31. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М: ГИФМЛ, 1959. 468 с.

**Contact with Intermolecular Interaction Forces for a Viscoelastic Layer
(Self-Consistent Approach): Analysis of the Characteristics of the Indenter
Approach/Separation Process**

I. A. Soldatenkov^{a, #}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: iasoldat@hotmail.com*

The contact of an infinitely extended plane indenter and a viscoelastic layer is considered in the framework of the Derjaguin self-consistent approach with the surface (traditional formulation) and bulk (refined formulation) application of intermolecular interaction forces. Equations describing the change of the contact gap in time are obtained. A condition is formulated under which a jumping change in the contact gap in time is possible. Calculations have been performed that indicate a non-monotonic character of the dependence of the contact gap and pressure on time in the regimes of the indenter approach and separation. It is shown that the traditional and refined formulations of the problem can lead to significantly different results in calculating the characteristics of the contact between the indenter and the viscoelastic layer.

Keywords: contact problem, viscoelasticity, layer, intermolecular interaction

REFERENCES

1. *Derjaguin B.* Untersuchungen über die Reibung und Adhäsion, IV. Theorie des Anhaftens kleiner Teilchen // *Kolloid-Zeitschrift*, 1934, Bd. 69. H. 2, s. 155–164.
2. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, 1971, vol. 324, no. 1558, pp. 301–313.
3. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *J. Coll. Interface Sci.*, 1975, vol. 53, no. 2, pp. 314–326.

4. *Sridhar I., Johnson K.L., Fleck N.A.* Adhesion mechanics of the surface force apparatus // *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1997, vol. 30, no. 12, pp. 1710–1719.
5. *Sergici A.O., Adams G.G., Müftü S.* Adhesion in the contact of a spherical indenter with a layered elastic half-space // *J. Mech. Phys. Solids*, 2006, vol. 54, no. 9, pp. 1843–1861.
6. *Reedy E.D.* Thin-coating contact mechanics with adhesion // *J. Mater. Res.*, 2006, vol. 21, no. 10, pp. 2660–2668.
7. *Borodich F.M., Galanov B.A., Perepelkin N.V., Prikazchikov D.A.* Adhesive contact problems for a thin elastic layer: Asymptotic analysis and the JKR theory // *Math.&Mech. Solids*, 2018, vol. 24, no. 5, pp. 1405–1424.
8. *Greenwood J.A., Johnson K.L.* The mechanics of adhesion of viscoelastic solids // *Phil. Mag. A*, 1981, vol. 43, no. 3, pp. 697–711.
9. *Goryacheva I.G., Gubenko M.M., Makhovskaya Yu. Yu.* Sliding of a spherical indenter on a viscoelastic foundation with the forces of molecular attraction taken into account // *J. Appl. Mech.&Techn. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 1, pp. 81–88.
10. *Lin Y.Y., Hui C.Y.* Mechanics of contact and adhesion between viscoelastic spheres: An analysis of hysteresis during loading and unloading // *J. Polym. Sci. Part B: Polym. Phys.*, 2002, vol. 40, pp. 772–793.
11. *Haiat G., Phan Huy M.C., Barthel E.* The adhesive contact of viscoelastic spheres // *J. Mech.&Phys. Solids*, 2003, vol. 51, no. 1, pp. 69–99.
12. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // *J. Coll. Interface Sci.*, 1980, vol. 77, no. 1, pp. 91–101.
13. *Attard P., Parker J.L.* Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // *Phys. Rev. A*, 1992, vol. 46, no. 12, pp. 7959–7971.
14. *Greenwood J.A.* Adhesion of elastic spheres // *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1997, vol. 453, no. 1961, pp. 1277–1297.
15. *Soldatenkov I.A.* The use of the method of successive approximations to calculate an elastic contact in the presence of molecular adhesion // *JAMM*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 597–603.
16. *McMeeking R.M.* A Maxwell stress for material interactions // *J. Coll. Interface Sci.*, 1998, vol. 199, no. 2, pp. 187–196.
17. *Sauer R.A., Li S.* A contact mechanics model for quasi-continua // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2007, vol. 71, no. 8, pp. 931–962.
18. *He L.H.* Stress and deformation in soft elastic bodies due to intermolecular forces // *J. Mech. Phys. Solids*, 2013, vol. 61, no. 6, pp. 1377–1390.
19. *Soldatenkov I.A.* The contact problem with the bulk application of intermolecular interaction forces (a refined formulation) // *J. Appl. Math. Mech.*, 2013, vol. 77, no. 6, pp. 629–641.
20. *Overbeek J.T.G., Sparnaay M.J.* Classical coagulation. London-van der Waals attraction between macroscopic objects // *Discuss. Faraday Soc.*, 1954, vol. 18, pp. 12–24.
21. *Wu J.-J.* The Jump-to-contact distance in atomic force microscopy measurement // *J. Adhesion*, 2010, vol. 86, no. 11, pp. 1071–1085.
22. *Kaplan I.G.* Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials. Chichester: Wiley, 2006. xii + 367 p.
23. *Israelachvili J.N.* Intermolecular and Surface Forces. London: Academic, 2011. xxx + 674 p.
24. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. N.Y.: Academic Press, 1971.
25. *Ogibalov P.M., Lomakin V.A., Kishkin B.P.* Mechanics of Polymers. Moscow: Moscow Univ. Press, 1975. (in Russian)
26. *Adamov A.A., Matveenko V.P., Trufanov N.A., Shardakov I.N.* Methods of Applied Viscoelasticity. Ekaterinburg: Ural Branch RAS, 2003. (in Russian)
27. *Soldatenkov I.A.* Contact with intermolecular interaction forces for a viscoelastic layer (self-consistent approach): Calculation of the stress-strain state and energy dissipation // *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 7, pp. 159–174.
28. *Fikhtengolts G.M.* Course of Differential and Integral Calculus. Vol. 1, 2. Moscow: Fizmatlit, 2001. (in Russian)
29. *Chen Y.L., Helm C.A., Israelachvili J.N.* Molecular mechanisms associated with adhesion and contact angle hysteresis of monolayer surfaces // *J. Phys. Chem.*, 1991, vol. 95, no. 26, pp. 10736–10747.
30. *Kalitkin N.N.* Numerical Methods. Saint Petersburg: BHV-Petersburg, 2011. (in Russian)
31. *Stepanov V.V.* Course of Differential Equations. Moscow: GIFML, 1959. (in Russian)