

УДК 531.383

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2020 г. С. В. Нестеров¹, В. Г. Байдулов^{1,2,*}¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия² Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*e-mail: bayd@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.06.2020 г.

После доработки 18.08.2020 г.

Принята к публикации 25.09.2020 г.

Рассмотрена модель, обобщающая известные уравнения нелинейной теории колебаний (Ван дер Поля и Рэлея), предельные циклы которой — кривые фазовой плоскости, определяемые полной энергией колебаний в случае отсутствия диссипации/притока энергии в систему. Изменяя параметры системы и вид силового воздействия можно задавать устойчивые к возмущениям характеристики колебаний. Рассмотрены фазовые портреты системы, включая случай многосвязных предельных циклов.

Ключевые слова: автоколебания, уравнение Ван дер Поля, уравнение Рэлея, волновой твердотельный гироскоп

DOI: 10.31857/S0032823520060089

1. В монографии [1] описан волновой твердотельный гироскоп, физической основой которого является твердотельный резонатор, изготовленный из высококачественного кварца. В резонаторе возбуждаются незатухающие стоячие волны, которые и позволяют превратить этот резонатор в гироскоп. Подробное изложение принципа действия приведено также и в ряде других публикаций [2–4]. Волновые гироскопы широко используются в технике [5, 6]. Анализ свойств таких колебательных систем, вопросы определения их устойчивости и управления параметрами активно исследуются в настоящее время [7–10]. Для того чтобы гироскоп мог функционировать достаточно продолжительное время, колебания резонатора должны поддерживаться все время эксплуатации с постоянной амплитудой и частотой. Ранее [11] подробно рассмотрен автоколебательный режим резонатора. Имеются два детально изученных дифференциальных уравнения, описывающих возникновение и существование установившихся колебаний постоянной амплитуды и периода.

Уравнение Ван дер Поля [12]

$$\ddot{u} - \epsilon(1 - u^2)\dot{u} + u = 0 \quad (1.1)$$

Здесь u и $\dot{u}$ — смещение и скорость осциллятора, ϵ — создаваемый специальным устройством коэффициент обратной связи, обеспечивающий подачу энергии от внешнего постоянного источника.

Уравнение Рэлея [13]

$$\ddot{u} - \varepsilon(1 - \dot{u}^2)\dot{u} + u = 0, \quad (1.2)$$

где u , $\dot{u}$ и ε — имеют тот же смысл, как и в уравнении Ван дер Поля.

Основные математические результаты, относящиеся к уравнениям Ван дер Поля и Рэлея, состоят в том, что тривиальное решение $u = \dot{u} = 0$ неустойчиво, однако существует периодическое решение с постоянной амплитудой и периодом $T(\varepsilon)$. Это периодическое решение асимптотически устойчиво, однако оно не оказывается одночастотным. Для улучшения гироскопических свойств резонатора необходимо, чтобы колебания описывались устойчивыми одночастотными периодическими решениями. Академик В.Ф. Журавлев предложил объединить уравнения (1.1) и (1.2) следующим образом

$$\ddot{u} - \beta(1 - \dot{u}^2 - u^2)\dot{u} + u = 0 \quad (1.3)$$

Действительно, полагая $u = A \cos t$, при $A = 1$ получаем точное решение уравнения (1.3) с периодом $T = 2\pi$.

Для осциллятора, описываемого уравнением

$$\ddot{u} = -f(u), \quad f(-u) = -f(u) \quad (1.4)$$

которое имеет интеграл энергии

$$E = \frac{\dot{u}^2}{2} + \Pi, \quad \Pi = \int_0^u f(u) du \quad (1.5)$$

для систем с обратной связью (диссипацией) уравнение (1.3) может быть в случае потенциальной энергии Π обобщено в виде

$$\ddot{u} + 2\varepsilon(E - E_0)\dot{u} + f(u) = 0, \quad (1.6)$$

где ε — коэффициент обратной связи, E_0 — постоянная, которая показывает, до каких пор может расти энергия E осциллятора, чтобы отрицательное сопротивление уменьшилось до нуля.

Дифференцируя энергию (1.5), найдем

$$\frac{dE}{dt} = \dot{u}(\ddot{u} + f(u)) = -2\varepsilon(E - E_0)\dot{u}^2 \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) показывает, что если в начальный момент времени

$$E = E_0, \quad (1.8)$$

то энергия осциллятора с течением времени не меняется. Уравнение (1.7) можно переписать в интегральной форме

$$E = E_0 + H \exp\left(-2\varepsilon \int_0^t v^2 dt\right) = E_0 + H \exp(-2\varepsilon \int v du), \quad (1.9)$$

где $v = \dot{u}$, H — постоянная интегрирования. Если в начальный момент времени условие (1.8) не выполняется, то из уравнения (1.9) следует, что при $E(0) > E_0$ ($H > 0$) энергия будет невозрастающей функцией времени; а при $E(0) < E_0$ ($H < 0$) и E — убывающей. Если условие (1.8) рассматривать как функцию на фазовой плоскости (u, v) ,

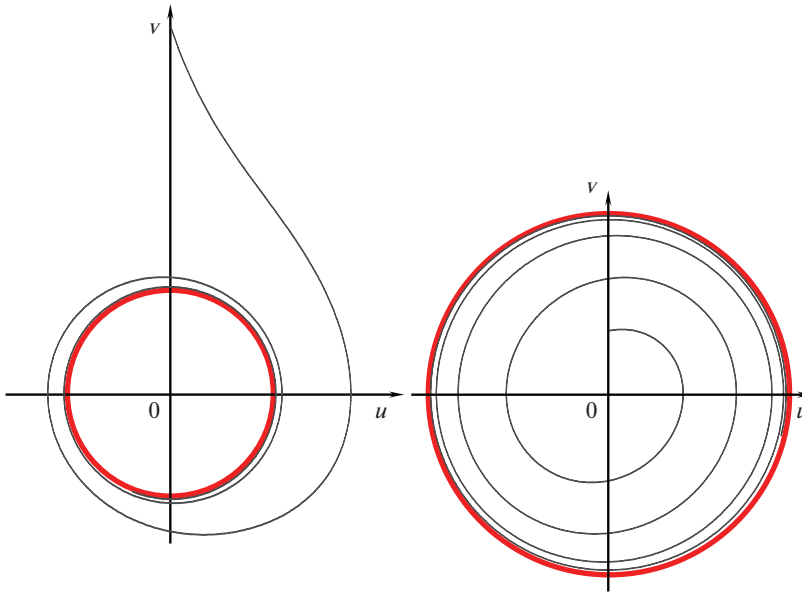


Рис. 1. Гармонический осциллятор.

график которой образует замкнутую кривую (набор замкнутых кривых — многосвязная область), то такая область будет предельным циклом уравнения (1.7). Запишем уравнение предельного цикла в явном виде

$$\frac{v^2}{2} + \Pi(u) = \frac{v^2}{2} + \int_0^u f(u) du = E_0$$

Если положить $v = 0$, то величина амплитуды определяется уравнением

$$\Pi = E_0 \quad (1.10)$$

Здесь по умолчанию предполагается, что при заданном значении E_0 существуют два конечных корня уравнения (1.10). Для определения периода колебаний воспользуемся уравнением (1.5), полагая $E = E_0$. Имеем

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{2(E_0 - \Pi(u))}} = \frac{T}{2} \quad (1.11)$$

Величина периода и другие свойства колебаний будут очевидно определяться значением энергетического параметра E_0 и видом функции $f(u)$, с точностью до знака совпадающей с силовой функцией

2. Примеры.

1. Фазовая картина автоколебательной системы гармонического осциллятора ($f(u) = -u$) приведена на рис. 1.

2. Пример автоколебательной системы с асимметричной силовой функцией вида

$$\ddot{u} + 2\varepsilon(E - E_0)\dot{u} + u \exp(bu) = 0; \quad E_0 = 1, \quad \varepsilon = 1/8, \quad b = 0.98$$

$$E = \frac{\dot{u}^2}{2} + \left(\frac{u}{b} - \frac{1}{b^2} \right) \exp(bu) + \frac{1}{b^2}$$

приведен на рис. 2.

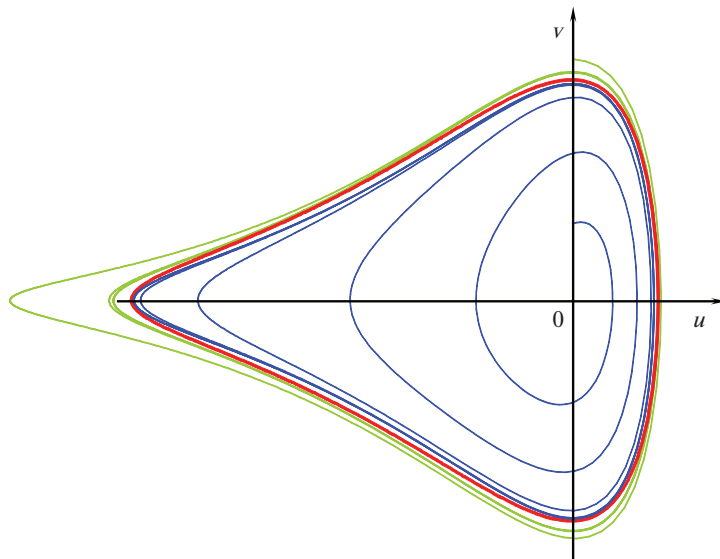


Рис. 2. Пример асимметричного предельного цикла.

3. В качестве примера многосвязного предельного цикла рассмотрим автоколебательную систему, состоящую из маятника и электромеханического устройства, обеспечивающего обратную связь между постоянным источником питания и маятником. Такая автоколебательная система при произвольных углах отклонения маятника от вертикального положения описывается уравнением (далее используются безразмерные переменные)

$$v' + 2\varepsilon(E - E_0)v + \sin u = 0 \quad (2.1)$$

Здесь $E = \frac{v^2}{2} + (1 - \cos u)$, $f = -\sin u$, далее принимается $E_0 = 1$ — коэффициент, ограничивающий рост отрицательного сопротивления.

Фазовые траектории задач с начальными данными $u(0) = u_0$, $v(0) = 0$ приведены в верхнем правом углу рис. 3. В этом случае фазовые траектории будут притягиваться к ближайшей к начальным данным замкнутой кривой многосвязного предельного цикла. В случае начальных данных вида $u(0) = 0$, $v(0) = v_0$ поведение траекторий более сложное. Если начальные данные таковы, что выполняется условие $E < E_0$, то траектории будут наматываться на центральный предельный цикл (рис. 3, кривая 1). При больших значениях коэффициента обратной связи (диссипации) ε и выполнении условия $E > E_0$ (рис. 3, кривая 2) траектории будут наматываться на ближайшую замкнутую область предельного цикла, причем их абсцисса не будет превышать некоторого предельного значения (для центральной области $|u| < \pi$). С уменьшением параметра ε траектории будут приближаться к вертикальной сепаратрисе между областями предельного цикла так, что вторая производная d^2v/du^2 будет обращаться в нуль. При достижении параметром ε критического значения траектория достигнет сепаратрисы (для центральной области в точке $(0, \pi)$), а в производной dv/du возникнет разрыв первого рода. При дальнейшем уменьшении ε область притяжения станет следу-

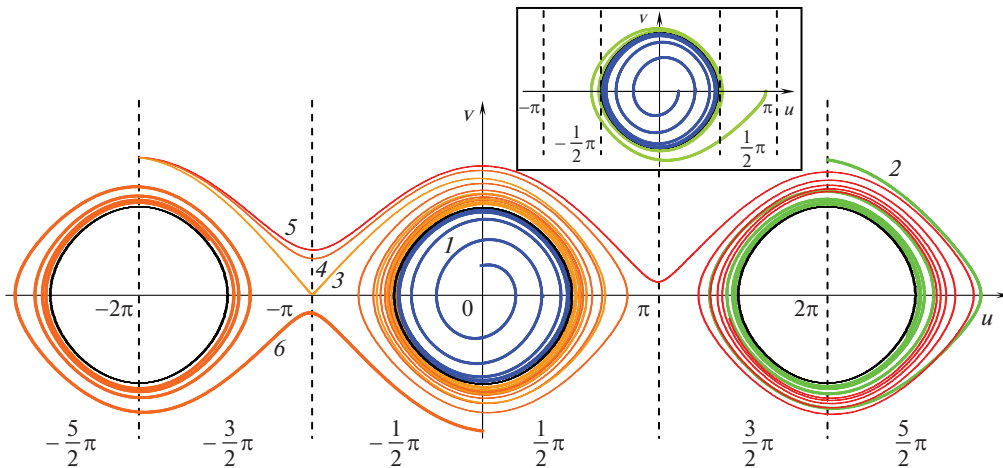


Рис. 3. Пример многосвязного предельного цикла.

ющая справа от начальной замкнутая область предельного цикла (рис. 3, кривые 3, 4). Такой сценарий будет повторяться и далее при уменьшении ε области притяжения траекторий будут сменяться на все более удаленные замкнутые области многосвязного предельного цикла (рис. 3, кривая 5). Можно показать, что поведение фазовых кривых для отрицательных значений начальных данных $u(0) = 0$, $v(0) = -v_0$ будут описываться траекториями антисимметричными по отношению к рассмотренным (рис. 3, кривая 6).

Заключение. Приведенные примеры показывают, что выделенный класс автоколебательных систем позволяет находить предельные циклы с помощью простых аналитических вычислений. При этом определяются амплитуды колебаний и их периоды. Если создать такие электромеханические устройства, которые обеспечивают обратную связь, описываемую нелинейным сопротивлением $2\varepsilon(E - E_0)\dot{u}$, то можно, например, сконструировать на основе примера 3 высокоточный маятниковый гравиметр.

Работа выполнена в рамках госзаданий АААА-А20-120011690138-6 и АААА-А20-120011690132-4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
2. Климов Д.М., Журавлёв В.Ф., Жбанов Ю.К. Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во Ким Л.А., 2017. 194 с.
3. Журавлёв В.Ф. Волновой твердотельный гироскоп: современное состояние, некоторые аспекты // Актуальные проблемы авиационных и аэрокосмических систем: процессы, модели, эксперимент. 2011. № 2 (33). С. 118–123.
4. Журавлёв В.Ф. Двумерный осциллятор Ван дер Поля с внешним управлением // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12. № 2. С. 211–222.
5. Yi T., Wu X.Z., Xiao D.B., Xi X., Tan Y.Q. A novel cupped solid-state wave gyroscope // Appl. Mech.&Mater. 2011. V. 110–116. P. 715–722.
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.110-116.715>

6. Негри С., Лабарр Э., Линьон К., Брунштейн Э., Салайн Э. Новое поколение инерциальных навигационных систем на основе ВТГ для аппаратов, обеспечивающих запуск спутников // Гиропскопия и навигация. 2016. Т. 24. № 1 (92). С. 49–59.
7. Трутнев Г.А. Модель конструкционного демпфирования твердотельного волнового гироскопа // Вестн. удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2019. Т. 29. Вып. 1. С. 84–91.
8. Yi G., Xie Y., Qi Z., Xi B. Modeling of acceleration influence on hemispherical resonator gyro forcing system // Math. Probl. in Engng. 2015. V. 2015. Article ID 104041. <https://doi.org/10.1155/2015/104041>
9. Серёгин С.В. Влияние несовершенств формы на колебания кольцевого резонатора волнового твердотельного гироскопа // Нелин. дин. 2017. Т. 13. № 3. С. 423–431. <https://doi.org/10.20537/nd1703009>
10. Мартыненко Ю.Г., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Управление нелинейными колебаниями вибрационного кольцевого микрогироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 77–89.
11. Журавлёв В.Ф. Пространственный осциллятор Ван-дер-Поля. Технические приложения // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 1. С. 158–164.
12. Van der Pol B. On relaxation-oscillations // The London, Edinburgh & Dublin Phil. Mag. & J. Sci. 1927. V. 2. № 7. P. 978–992.
13. Стратт Дж.В. (лорд Релей) Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 484 с.

On the One Class of Auto-Oscillating Systems

S. V. Nesterov^{a,#} and V. G. Baydulov^{a,b,#}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^b *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: bayd@ipmnet.ru*

It was proposed a model equation which generalizes the well-known equations of the theory of nonlinear oscillations (Van der Pol and Rayleigh). The limit cycles of proposed model are the curves on phase plane determined by the total energy of the oscillation in the adiabatic case. The stable due to perturbations characteristics of the oscillations can be set by varying of parameters of the system and the form of force action. The phase portraits of the system are considered, including the case of multiply connected limit cycles.

Keywords: self-oscillations, van der Pol equation, Rayleigh equation, wave solid-state gyroscope

REFERENCES

1. Klimov D.M., Zhuravlev V.Ph. Wave Solid-State Gyroscope. Moscow: Nauka, 1985. 125 p. (in Russian)
2. Klimov D.M., Zhuravlev V.Ph., Zhanov Yu.K. Quartz Hemispherical Resonator (Wave Solid-State Gyroscope). Moscow: Kim L.A., 2017. 194 p. (in Russian)
3. Zhuravlev V.Ph. Wave Solid-State Gyroscope: Modern State, Some Aspects// Actual Probl. Aviation & Aerospace Syst.: Processes, Models, Experiment, 2011, no. 2 (33), pp. 118–123.
4. Zhuravlev V.Ph. Van der Pol's Controlled 2D Oscillator // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2016, vol. 12, no. 2, pp. 211–222.
5. Yi T., Wu X.Z., Xiao D.B., Xi X., Tan Y.Q. A novel cupped solid-state wave gyroscope // Appl. Mech. & Mater., 2011, vol. 110–116, pp. 715–722. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.110-116.715>
6. Negri C., Labarre E., Lignon C., Brunstein E., Salaün E. A new generation of IRS with innovative architecture based on HRG for satellite launch vehicles // Gyrosc. & Navig., 2016, vol. 7, no. 3, pp. 223–230.

-
7. *Trutnev G.A.* Model of the hemispherical resonator gyroscope construction damping // *Vestn. Udmurt. Univ. Matem. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2019, vol. 29, iss. 1, pp. 84–91. (in Russian)
 8. *Yi G., Xie Y., Qi Z., Xi B.* Modeling of acceleration influence on hemispherical resonator gyro forcing system // *Math. Probl. in Engng.*, 2015, vol. 2015, Article ID 104041. <https://doi.org/10.1155/2015/104041>
 9. *Seregin S.V.* The influence of shape imperfections on the vibrations of a ring resonator of a wave solid-state gyroscope // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2017, vol. 13, no. 3, pp. 423–431. <https://doi.org/10.20537/nd1703009>
 10. *Martynenko Yu.G., Merkur'yev I.V., Podalkov V.V.* Control of nonlinear vibrations of vibrating ring microgyroscope // *Mech. Sol.*, 2008, vol. 43, pp. 379–398.
 11. *Zhuravlev V.Ph.* Van der Pol oscillator. Technical applications // *Mech. Sol.*, 2020, vol. 55, pp. 132–137.
 12. *Van der Pol B.* On relaxation-oscillations // *The London, Edinburgh & Dublin Phil. Mag. & J. Sci.* 1927. V. 2. № 7. P. 978–992.
 13. *Strutt J.W.* The Theory of Sound. Vol. 1. London: Macmillan and Co., 1894.