
УДК 539.3:534.26

ДИФРАКЦИЯ ЗВУКА НА ШАРЕ С НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ

© 2020 г. С. А. Скобельцын^{1,*}, Л. А. Толоконников^{1,**}

¹Тулский государственный университет, Тула, Россия

*e-mail: skbl@rambler.ru

**e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Поступила в редакцию 23.05.2020 г.

После доработки 23.06.2020 г.

Принята к публикации 11.07.2020 г.

Получено аналитическое решение задачи дифракции сферических звуковых волн на шаре с упругим радиально-неоднородным покрытием в плоском волноводе. Представлены результаты расчетов акустического поля в волноводе. Проведено сравнение результатов расчета с результатами моделирования дифракции в волноводе в системе компьютерного моделирования физических процессов COMSOL на основе метода конечных элементов.

Ключевые слова: дифракция звука, плоский волновод, шар с неоднородным упругим покрытием

DOI: 10.31857/S0032823520050112

Введение. Для обеспечения требуемых звукоотражающих свойств тела можно использовать неоднородное упругое покрытие при соответствующем подборе законов неоднородности для его механических параметров. В частности это было показано для упругого тела сферической формы [1], где на основе полученного [2] решения прямой задачи дифракции плоской звуковой волны на упругом шаре с непрерывно-неоднородным покрытием, найдены функциональные зависимости для плотности и модулей упругости материала покрытия, обеспечивающие наименьшее отражение звука в определенном угловом секторе и в заданном диапазоне частот. Была показана [3] возможность математического моделирования непрерывно-неоднородного покрытия упругого шара системой однородных упругих слоев. Решены задачи [4, 5] дифракции цилиндрических и сферических звуковых волн на упругом шаре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием в предположении, что тела находятся в безграничном пространстве.

Исследованию рассеяния звука телами, помещенными в плоский волновод, посвящен ряд работ. Изучено [6] рассеяние звуковых волн, излучаемых точечным источником, упругой сферической оболочкой в однородном волноводе с абсолютно жестким дном и акустически мягкой верхней границей. Решена [7] задача дифракции сферической волны на жесткой сфере в волноводе с жидким дном и мягкой верхней границей. Исследовано [8] акустическое рассеяние на упругой сферической оболочке, помещенной в волновод с жидким поглощающим дном и акустически мягкой верхней границей. Проведено моделирование акустического поля, рассеянного акустически жесткой или мягкой сферой, помещенной в однородный волновод с жидкими границами [9]. Исследована дифракция звука [10], излучаемого точечным источником, на жест-

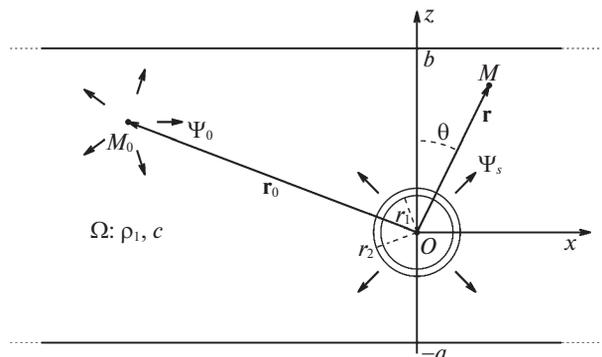


Рис. 1.

кой сфере, находящейся в однородном слое жидкости, граничащем со слоем, скорость звука в котором возрастает с глубиной. Рассмотрено [11–14] рассеяние звуковых волн на теле произвольной формы в плоскостом волноводе с учетом многократных преотражений.

В настоящей работе решается задача дифракции сферических звуковых волн на жестком шаре с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе.

1. Постановка задачи. Рассмотрим абсолютно жесткий шар радиуса r_1 с покрытием в виде непрерывно-неоднородного упругого сферического слоя, внешний радиус которого равен r_2 . Толщина слоя — $h = r_2 - r_1$. Шар помещен в плоский волновод, заполненный идеальной жидкостью с плотностью ρ_1 и скоростью звука c . Полагаем, что каждая граница волновода является либо абсолютно жесткой, либо акустически мягкой.

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z с началом в центре шара. Схема волноводной системы изображена на рис. 1. В системе координат x, y, z нижняя граница волновода определяется уравнением $z = -a$, верхняя граница — уравнением $z = b$. С прямоугольной системой координат свяжем сферическую и цилиндрическую системы координат r, θ, φ и R, φ, z .

Полагаем, что плотность материала покрытия ρ является непрерывной функцией радиальной координаты r , а модули упругости материала покрытия λ и μ — дифференцируемыми функциями координаты r .

В волноводе находится точечный источник, излучающий сферическую монохроматическую волну с круговой частотой ω и амплитудой A . Положение источника определяется точкой M_0 , имеющей декартовы, сферические и цилиндрические координаты $(x_0, 0, z_0)$, $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ и (R_0, φ_0, z_0) . При этом $\varphi_0 = 0$, если $x_0 > 0$ и $\varphi_0 = \pi$, если $x_0 < 0$. Точка наблюдения M имеет координаты (x, y, z) , (r, θ, φ) и (R, φ, z) .

Определим акустическое поле в волноводе.

2. Дифракция сферической звуковой волны на шаре с неоднородным покрытием в свободном пространстве. Вначале рассмотрим задачу о дифракции сферической звуковой волны на жестком шаре с радиально-неоднородным покрытием, находящемся в безграничном пространстве.

Потенциал скорости сферической волны в свободном пространстве представляется в виде

$$\Psi_0 = A \frac{e^{ikl}}{l} \exp(-i\omega t); \quad l = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|,$$

где $k = \omega/c$ – волновое число в жидкости, \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 – радиус-векторы точек M и M_0 соответственно, t – время. В дальнейшем временной множитель $\exp(-i\omega t)$ будем опускать.

Представим потенциал скорости падающей волны в сферических координатах в виде разложения [15]

$$\Psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \gamma_{mn} P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0) \begin{cases} j_n(kr) h_n(kr_0), & r_0 > r \\ j_n(kr_0) h_n(kr), & r > r_0 \end{cases}$$

где $\gamma_{mn} = Aik(2 - \delta_{0m})(2n + 1) \frac{(n - m)!}{(n + m)!} P_n^m(\cos \theta_0)$, $j_n(x)$ и $h_n(x)$ – сферические функции

Бесселя и Ганкеля порядка n ; $P_n^m(x)$ – присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка m ; δ_{0m} – символ Кронекера.

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [16]

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0,$$

где $\Psi = \Psi_0 + \Psi_s$ – потенциал скорости полного акустического поля во внешней области, Ψ_s – потенциал скорости рассеянной волны. При этом скорость частиц \mathbf{v} и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам $\mathbf{v} = \text{grad } \Psi$, $p = i\rho\omega\Psi$.

Учитывая условия излучения на бесконечности [16], потенциал скорости рассеянной волны будем искать в виде

$$\Psi_s(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{mn} h_n(kr) P_n^m(\cos \theta) \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (2.1)$$

где $h_n(x)$ – сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n .

Распространение упругих волн в неоднородном покрытии шара описывается общими уравнениями движения упругой среды [17], которые для установившегося режима движения в сферической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \text{ctg } \theta) &= -\rho(r)\omega^2 u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \text{ctg } \theta + 3\sigma_{r\theta}] &= -\rho(r)\omega^2 u_\theta, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \text{ctg } \theta) &= -\rho(r)\omega^2 u_\varphi, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где u_r , u_θ , u_φ и σ_{ij} – компоненты вектора смещения \mathbf{u} и тензора напряжений в покрытии шара.

Введем функции u_2 и u_3 с помощью соотношений

$$u_\theta = \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi}, \quad u_\varphi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_3}{\partial \theta}$$

и воспользуемся связью компонентов тензора напряжений с компонентами тензора деформаций (обобщенный закон Гука), а также выражениями компонентов тензора деформаций через компоненты вектора смещения [17]. В результате приходим от (2.2)

к системе уравнений, записанных относительно функций u_r , u_2 и u_3 , которая после преобразований, указанных в [4], принимает вид

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left[\lambda' + 2\mu' + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r} \right] \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} L[u_r] + \\
 & + \left[\frac{2}{r} \left(\lambda' - \frac{\lambda + 2\mu}{r} \right) + \rho\omega^2 \right] u_r + \frac{1}{r} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} + \lambda' - \frac{\lambda + 3\mu}{r} \right] L[u_2] = 0 \\
 & \frac{1}{r} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} + \mu' + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r} \right] L[u_r] + \\
 & + \left[\mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\mu' + \frac{2\mu}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu'}{r} + \rho\omega^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} L[1] \right] L[u_2] = 0 \\
 & \left[\mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\mu' + \frac{2\mu}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu'}{r} + \rho\omega^2 + \frac{\mu}{r^2} L[1] \right] L[u_3] = 0,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$L[1] = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Штрихами обозначено дифференцирование по радиальной координате r .

Функции u_r , u_2 , u_3 будем искать в виде

$$\begin{aligned}
 u_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n U_{1mn}(r) P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0) \\
 u_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n U_{2mn}(r) P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0) \\
 u_3 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n U_{3mn}(r) P_n^m(\cos \theta) \sin m(\varphi - \varphi_0)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Вид зависимостей от φ в этих разложениях определяется соображениями симметрии вектора смещения \mathbf{u} относительно плоскости $\varphi = \varphi_0$, $\varphi_0 + \pi$.

Подставим разложения (2.4) в уравнения системы (2.3). Воспользовавшись уравнением для присоединенных многочленов Лежандра и свойством ортогональности сферических гармоник [18], получим для каждой пары индексов m , n ($n = 0, 1, \dots$; $m \leq n$) систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{jmn}(r)$ ($j = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) U_{1mn}'' + b_{11} U_{1mn}' + b_{12} U_{2mn}' + c_{11} U_{1mn} + c_{12} U_{2mn} = 0 \\
 & \mu U_{2mn}'' + b_{21} U_{1mn}' + b_{22} U_{2mn}' + c_{21} U_{1mn} + c_{22} U_{2mn} = 0 \\
 & \mu U_{3mn}'' + b_{33} U_{3mn}' + c_{33} U_{3mn} = 0,
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= \lambda' + 2\mu' + 2(\lambda + 2\mu)/r, & b_{12} &= -n(n+1)(\lambda + \mu)/r \\
 b_{21} &= (\lambda + \mu)/r, & b_{22} &= b_{33} = (r\mu' + 2\mu)/r \\
 c_{11} &= \rho\omega^2 + [2\lambda' r - 2(\lambda + 2\mu) - n(n+1)\mu]/r^2
 \end{aligned}$$

$$c_{12} = n(n+1)(\lambda + 3\mu - r\lambda')/r^2$$

$$c_{21} = [r\mu' + 2(\lambda + 2\mu)]/r^2, \quad c_{22} = \rho\omega^2 - [r\mu' + n(n+1)(\lambda + 2\mu)]/r^2$$

$$c_{33} = \rho\omega^2 - [r\mu' + n(n+1)\mu]/r^2$$

Искомые функции Ψ_s , u_r , u_2 и u_3 должны удовлетворять граничным условиям. Граничные условия на внешней поверхности неоднородного покрытия шара (при $r = r_2$) заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$-i\omega u_r = v_{1r}, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0,$$

а на внутренней поверхности покрытия (при $r = r_1$) должен быть равен нулю вектор смещения частиц упругой среды

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0, \quad u_\varphi = 0$$

Из условия равенства нормальных скоростей при $r = r_2$ находим коэффициенты A_{mn} , выраженные через величины $U_{1mn}(r_1)$

$$A_{mn} = -\frac{\gamma_{mn} k h_n(kr_0) J_n'(kr_2) + i\omega U_{1mn}(r_2)}{k h_n'(kr_2)}$$

Из оставшихся неиспользованными граничных условий с применением преобразований, аналогичных [4], получим шесть краевых условий, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений (2.5).

$$(\lambda + 2\mu)U'_{1mn}(r_2) + \left[\frac{2\lambda(r_2)}{r_2} + \frac{\omega^2 \rho_1 h_n(kr_2)}{k h_n'(kr_2)} \right] U_{1mn}(r_2) - \frac{\lambda(r_2)}{r_2} n(n+1)U_{2mn}(r_2) = \frac{\omega \rho_1 \gamma_{mn} h_n(kr_0)}{(kr_2)^2 h_n'(kr_2)}$$

$$U'_{2mn}(r_2) + \frac{1}{r_2} [U_{1mn}(r_2) - U_{2mn}(r_2)] = 0$$

$$U'_{3mn}(r_2) + \frac{1}{r_2} U_{3mn}(r_2) = 0 \tag{2.6}$$

$$U_{1mn}(r_1) = 0, \quad U_{2mn}(r_1) = 0, \quad U_{3mn}(r_1) = 0$$

Анализ краевой задачи (2.5), (2.6) показывает, что функция $U_{3mn}(r)$ не связана с функциями $U_{1mn}(r)$ и $U_{2mn}(r)$ не только в уравнениях системы (2.5), но и в краевых условиях (2.6). Так как дифференциальное уравнение и краевое условие для нахождения функции $U_{3mn}(r)$ однородны, то можно утверждать, что $U_{3mn}(r) \equiv 0$. Поэтому $u_3(r, \theta, \varphi) \equiv 0$.

Все коэффициенты системы (2.5) и краевых условий (2.6) не зависят от индекса m . Индекс m присутствует только в правой части первого краевого условия (2.6), причем он входит в виде множителя γ_{mn} .

Введем новые неизвестные функции $U_{1n}(r)$ и $U_{2n}(r)$ по формулам

$$U_{1mn}(r) = \gamma_{mn} U_{1n}, \quad U_{2mn}(r) = \gamma_{mn} U_{2n}$$

Тогда для нахождения функций $U_{1n}(r)$ и $U_{2n}(r)$ при каждом значении $n = 0, 1, 2, \dots$ следует решить краевую задачу для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на отрезке $[r_1, r_2]$. При этом следует исключить множитель γ_{mn} из правой части первого краевого условия.

При проведении расчетов краевая задача (2.5), (2.6) решена методом сведения ее к задачам с начальными условиями [2].

После определения $U_{lmn}(r_2)$ вычисляем коэффициенты A_{mn} , и получаем согласно (2.2) аналитическое описание акустического поля, рассеянного шаром с радиально-неоднородным упругим покрытием в свободном пространстве.

3. Дифракция сферической звуковой волны на шаре с неоднородным покрытием в плоском волноводе. Теперь рассмотрим задачу дифракции сферических звуковых волн на жестком шаре с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе с идеальными границами, воспользовавшись методом, предложенным в [12].

Согласно методу потенциал скорости полного акустического поля в волноводе Ψ будем искать в виде суммы вклада от источника Ψ^0 и вклада от рассеивателя Ψ^s : $\Psi = \Psi^0 + \Psi^s$, где

$$\Psi^0 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^4 \Psi_{jm}^0, \quad \Psi^s = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^4 \Psi_{jm}^s \quad (3.1)$$

Оценим вклад от источника в акустическое поле, рассматривая слагаемые в первом выражении (3.1).

Слагаемое $\Psi_{01}^0 = \Psi_0$ характеризует вклад в акустическое поле при прямом распространении сферической волны в свободном пространстве от точки источника M_0 до точки наблюдения M .

Воспользуемся интегральным представлением сферической волны [12]

$$\Psi_0 = A \frac{e^{ikl}}{l} = Ai \int_0^{\xi} \frac{\xi}{\eta} J_0(\xi |\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|) e^{i\eta|z-z_0|} d\xi, \quad \eta = (k^2 - \xi^2)^{1/2}, \quad (3.2)$$

получаемым из разложения сферической волны по плоским волнам [19]. Направление распространения плоской волны задается горизонтальной ξ и вертикальной η компонентами падающего волнового вектора \mathbf{k} . Здесь J_0 – цилиндрическая функция Бесселя нулевого порядка, \mathbf{R} и \mathbf{R}_0 – радиус-векторы проекций точек M и M_0 на плоскость xOy соответственно.

Выполнение условия $\text{Im } \eta \geq 0$ обеспечивает ограниченность Ψ_0 . Таким образом, когда $\xi > k$ следует выбрать $\eta = i(\xi^2 - k^2)^{1/2}$.

Пусть точка наблюдения M имеет координаты $(x, 0, z)$, (r, θ, φ) и (R, φ, z) , где φ принимает значение 0 или π . Тогда $|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0| = |x - x_0|$.

Отраженная от границ волновода сферическая волна может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн, возникающих при отражении плоских волн, на которые раскладывается сферическая волна. При оценке вклада источника в акустическое поле будем учитывать многократное отражение плоских волн от границ волновода.

Пусть коэффициенты отражения плоской волны от нижней границы волновода и верхней границы равны V_a и V_b соответственно.

Сначала рассмотрим случай $z > z_0$. Слагаемое Ψ_{02}^0 учитывает единственное отражение от нижней границы волновода, что соответствует распространению волны от точки M_0 до точки нижней границы с последующим отражением и распространением до точки наблюдения M . При этом проекции пути, проходимой плоской волной, по осям координат x и z равны $(x - x_0)$ и $-(-a - z_0) + (z + a)$ соответственно. Будем иметь

$$\Psi_{02}^0 = Ai \int_0^{\xi} \frac{\xi}{\eta} J_0(\xi |x - x_0|) \left[e^{-i\eta(-a-z_0)} V_a e^{i\eta(z+a)} \right] d\xi$$

Слагаемое Ψ_{03}^0 описывает единственное отражение от верхней границы волновода, что соответствует распространению волны от точки M_0 до верхней границы с отражением от нее и распространением до точки M . Тогда

$$\Psi_{03}^0 = Ai \int_0^{\xi} \frac{\xi}{\eta} J_0(\xi|x-x_0|) \left[e^{i\eta(b-z_0)} V_b e^{-i\eta(z-b)} \right] d\xi$$

Для волны, распространяющейся по пути от точки M_0 до нижней границы, затем после отражения до верхней границы и, наконец, после повторного отражения до точки M , получаем следующее выражение

$$\Psi_{04}^0 = Ai \int_0^{\xi} \frac{\xi}{\eta} J_0(\xi|x-x_0|) \left[e^{-i\eta(-a-z_0)} V_a e^{i\eta(b+a)} V_b e^{-i\eta(z-b)} \right] d\xi$$

Вариант, когда волна сначала отражается от верхней границы, а затем от нижней, при $j=0$ не рассматривается, так как этот вариант будет учитываться при $j=1$ и $m=1$.

При $j=1, 2, \dots$ каждое слагаемое Ψ_{jm}^0 ($m=1, 2, 3, 4$) учитывает два дополнительных отражения от верхней и нижней границ волновода. Поэтому выражения для Ψ_{jm}^0 получаются из выражений для $\Psi_{j-1,m}^0$ умножением на коэффициент $V_a V_b e^{2i\eta(a+b)}$, т.к. дополнительный набег фазы составляет $2i\eta(a+b)$.

В результате после суммирования слагаемых Ψ_{jm}^0 выражение для Ψ^0 принимает вид геометрической прогрессии. Полагая, что $|V_a V_b| < 1$ и суммируя прогрессию, получаем

$$\Psi^0 = Ai \int_0^{\xi} \frac{\xi}{\eta} J_0(\xi|x-x_0|) \frac{1}{1 - V_a V_b e^{2i\eta(a+b)}} \times \\ \times \left(e^{i\eta(z-z_0)} + V_a e^{i\eta(z+z_0+2a)} + V_b e^{-i\eta(z+z_0-2b)} + V_a V_b e^{-i\eta((z-z_0-2(a+b)))} \right) d\xi \quad (3.3)$$

Будем считать, что условие $|V_a V_b| < 1$ выполняется даже в случае идеальных границ (для жесткой границы $V=1$, а для мягкой $V=-1$), так как всегда имеет место хотя бы малое отличие $|V_a|$ или $|V_b|$ от единицы.

В случае $z < z_0$ выражение для вклада от источника получаем из (3.3) перестановкой z и z_0 .

Рассмотрим вклад в акустическое поле от рассеивателя. Слагаемое Ψ_{01}^s в выражении (3.2) для Ψ^s описывает вклад прямого распространения рассеянной телом волны в свободном пространстве до точки наблюдения M , то есть $\Psi_{01}^s = \Psi_s$, где Ψ_s определяется выражением (2.1).

Воспользуемся интегральным представлением сферических базисных решений уравнения Гельмгольца через цилиндрические базисные решения [20]

$$h_n(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} = \frac{\alpha_{mn}}{k} i^{m-n} \int_0^{\xi} \frac{\xi}{\eta} P_n^m\left(\frac{\eta}{k}\right) J_m(\xi R) e^{i\eta|z|} e^{im\varphi} d\xi, \quad (3.4)$$

где $\alpha_{mn} = 1$ при $z > 0$ и $\alpha_{mn} = (-1)^{n+m}$ при $z < 0$, J_m — цилиндрическая функция Бесселя порядка m .

Тогда с учетом (3.4) для точек наблюдения, лежащих за пределами сферы радиуса r_2 , Ψ_{01}^s запишется в виде

$$\Psi_{01}^s = k^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{mn} \alpha_{mn} i^{m-n} \cos m(\varphi - \varphi_0) \int_0^{\xi} \frac{\xi}{\eta} P_n^m\left(\frac{\eta}{k}\right) J_m(\xi|x|) e^{i\eta|z|} d\xi$$

Волна Ψ_s , отраженная от плоской границы, может быть представлена в виде суперпозиции плоских волн, возникающих при отражении плоских волн, на которые раскладывается рассеянная шаром волна.

Рассматривая те же варианты отражения, что и при определении вклада от источника, получим выражения для слагаемых Ψ_{jm}^S . В результате суммирования выражение для Ψ^S принимает вид

$$\Psi^S = k^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_{mn} \alpha_{mn} i^{m-n} \cos m(\varphi - \varphi_0) \int_0^{\xi} \frac{\xi}{\eta} P_n^m \left(\frac{\eta}{k} \right) J_m(\xi|x|) e^{i\eta|z|} \times \\ \times \frac{1}{1 - V_a V_b e^{2i\eta(a+b)}} \left(e^{i\eta|z|} + V_a e^{i\eta(z+2a)} + V_b e^{-i\eta(z-2b)} + V_a V_b e^{-i\eta(|z|-2(a+b))} \right) d\xi \quad (3.5)$$

Отметим, что при рассмотрении вклада в акустическое поле от рассеивателя пренебрегаем рассеянием телом волн, отраженных от границ волновода, а учитываем только рассеяние шаром волны, идущей непосредственно от источника.

4. Результаты расчетов. На основе полученного аналитического решения задачи были проведены численные расчеты акустического поля в волноводе. Рассматривалась волноводная система с геометрическими параметрами: $a + b = 8r_2$, $h/r_1 = 0.2$. Положение источника фиксировалось в сечении $x_0 = -5r_2$. Полагалось, что частота излучения источника ω соответствует волновому размеру тела $kr_2 = 5$, а плотность и скорость звука в акустической среде, заполняющей волновод, равны $\rho_1 = 1000$ кг/м³, $c = 1485$ м/с (вода).

Плотность и модули упругости покрытия шара задавались соотношениями

$$\rho = \rho_0 f(r; \alpha), \quad \lambda = \lambda_0 f(r; \beta), \quad \mu = \mu_0 f(r; \beta), \quad (4.1)$$

где $f(r; q) = 1 + q((r - r_1)/h - 1/2)$ – линейная функция координаты r , коэффициент наклона которой равен q/h ; $\rho_0 = 1488$ кг/м³, $\lambda_0 = 7.695 \times 10^9$ Н/м², $\mu_0 = 2.918 \times 10^9$ Н/м² – средние значения плотности и модулей упругости по толщине покрытия (полиамид), например, $\lambda_0 = 1/h \int_{r_1}^{r_2} \lambda(r) dr$.

Акустическое поле рассчитывалось на двух множествах точек: L и C . Оба множества находятся в окрестности шара в плоскости $y = 0$, содержащей точки источника M_0 и центра шара O . Множество L – отрезок с координатами $x = -r_2 - h$, $y = 0$, $-a \leq z \leq b$. Множество C – окружность с центром в точке O и радиусом $r = r_2 + h$. Таким образом, отрезок L и окружность C отстоят от поверхности шара на толщину покрытия h . Иллюстрация положения источника M_0 и размещения точек расчета давления представлена на рис. 2. Множества точек L и C представлены тонкими штриховыми линиями.

Для точек множества C рассчитывалась зависимость $|\Psi'_s|$ от координаты θ , а для точек множества L рассчитывалась зависимость $|\Psi'|$ от безразмерной координаты $z' = z/r_2$, где величины $|\Psi'_s|$ и $|\Psi'|$ получены нормировкой соответствующих величин $|\Psi_s|$ и $|\Psi|$ значением амплитуды потенциала источника Ψ_0 в точке O .

При вычислении несобственных интегралов (3.3), (3.5) бесконечный верхний предел заменялся конечным ξ_{∞} таким, чтобы для всех значений координаты x , используемых в расчетах, выполнялось условие $\xi_{\infty}|x - x_0| \geq 1000$.

На рис. 3 и 4 представлены зависимости $|\Psi'(z')|$ и $|\Psi'_s(\theta)|$ для случая, когда обе поверхности волновода – акустически мягкие ($V_a = V_b = -0.99$), $b = a = 4r_2$, $z_0 = 0$.

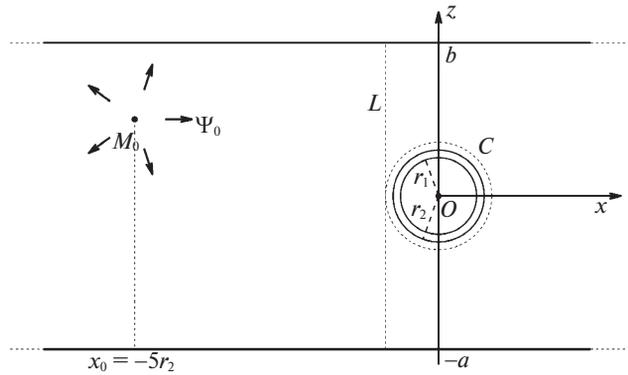


Рис. 2.

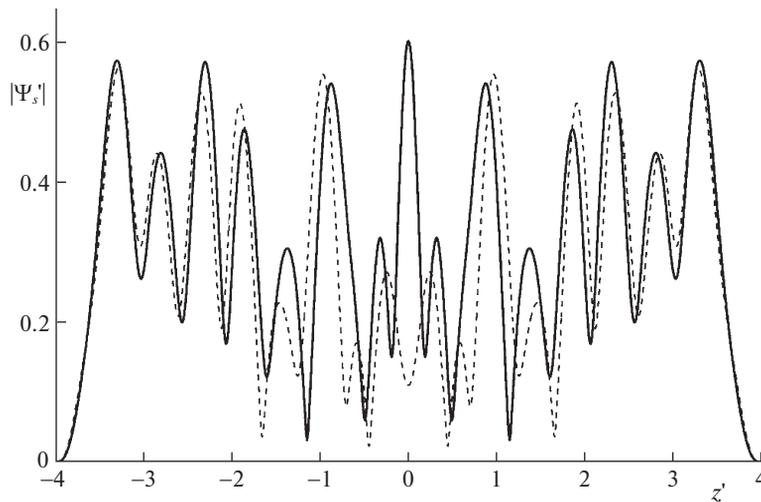


Рис. 3.

Штриховые линии соответствуют однородному покрытию ($\beta = \alpha = 0$), а сплошные – покрытию с неоднородными модулями упругости ($\alpha = 0, \beta = 1$). Окружность, изображенная тонкой линией на рис. 4, соответствует значению $|\Psi_0(O)|$.

Графики показывают, что неоднородность покрытия изменяет величину акустического давления в окрестности шара на 10–20%.

Результаты расчета $|\Psi'|, |\Psi'_s|$ показаны на рис. 5 и 6 для аналогичных условий, отличающихся только величиной β , которая в этом случае равна -1 (величина модулей упругости в покрытии убывает с ростом r); на рис. 7 и 8 – результаты расчета потенциалов акустического поля для случая, когда источник смещен к верхней поверхности волновода ($z_0 = r_2$) при неоднородности материала покрытия, задаваемой параметрами $\alpha = 0, \beta = 1$.

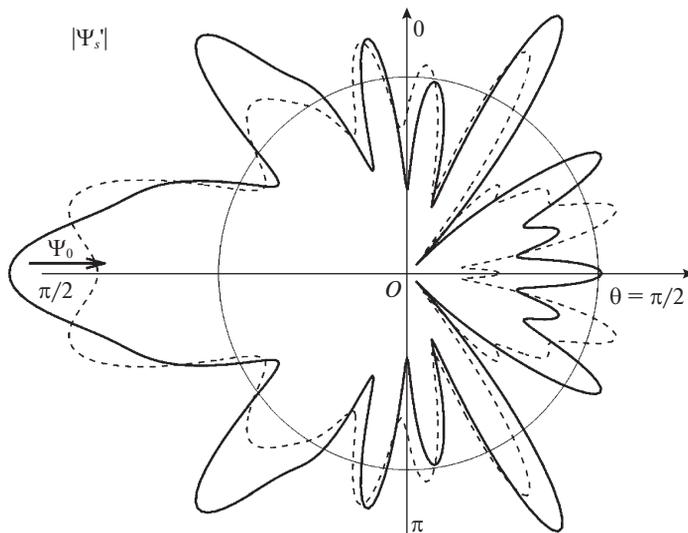


Рис. 4.

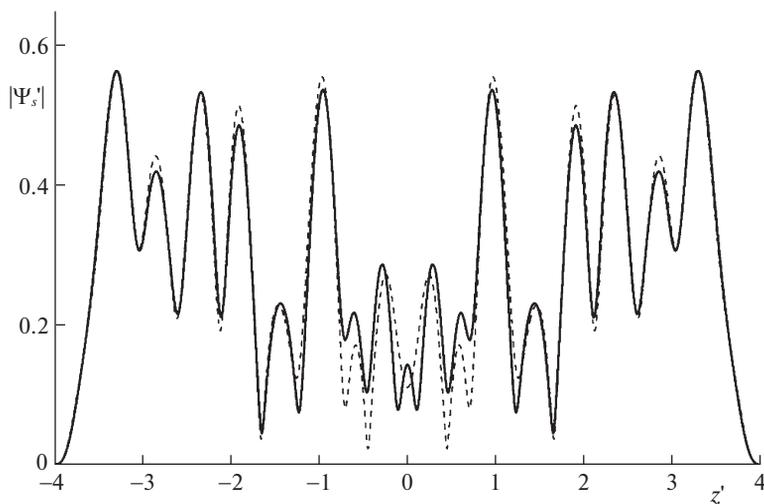


Рис. 5.

Видно, что смещение источника приводит к заметной асимметрии в распределении давления. Неоднородность материала покрытия и в этом случае изменяет давление в окрестности шара до 40% по сравнению со случаем однородного покрытия.

Было проведено сравнение результатов расчета на основе приближенного аналитического решения задачи с результатами моделирования дифракции в волноводе в системе компьютерного моделирования физических процессов COMSOL [21] на основе метода конечных элементов. Использовалась конечно-элементная модель участка волновода, включающего источник, препятствие и области в их окрестности с гори-

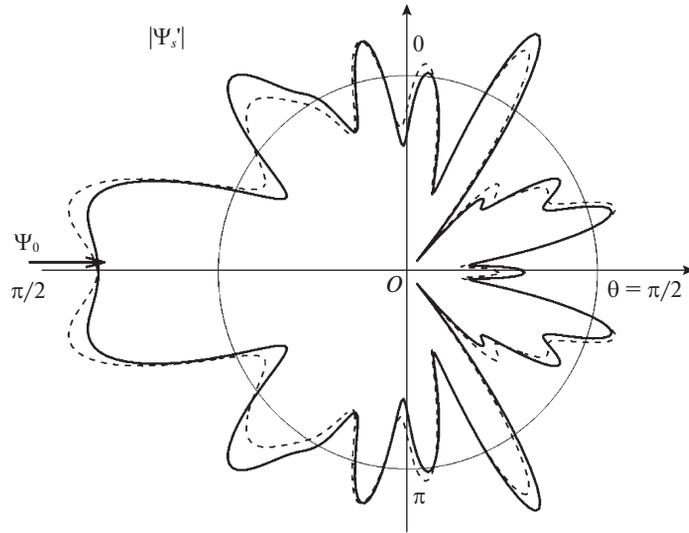


Рис. 6.

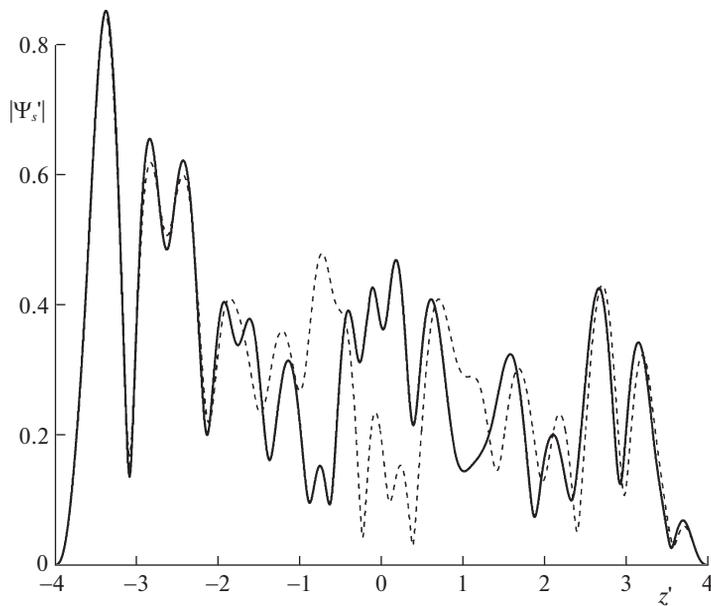


Рис. 7.

зонтальным размером, равным удвоенному расстоянию между ними. Условия излучения на боковых поверхностях участка обеспечивались так называемым идеально согласованным слоем (PML) [22]. Характерный размер тетраэдральных конечных элементов полагался равным 0.1λ , где λ – длина звуковой волны в жидкости, заполняющей волновод.

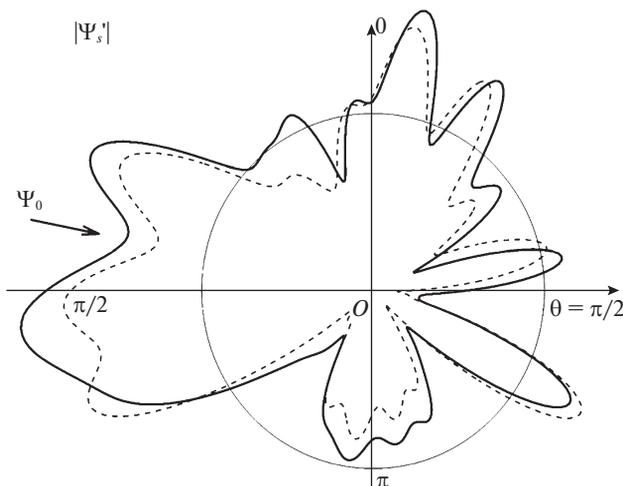


Рис. 8.

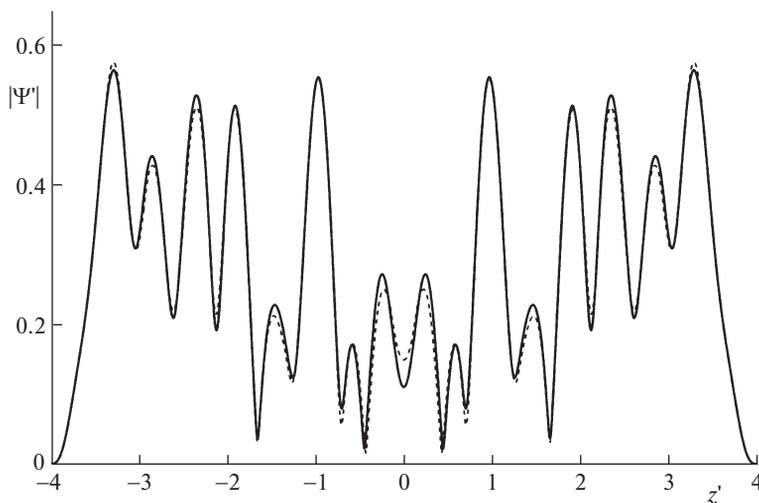


Рис. 9.

Результаты расчета давления в рассеянной волне для случая однородного покрытия, представленные на рис. 3 и 4 (сплошные линии), сопоставляются на рис. 9 и 10 с соответствующими зависимостями, полученными в COMSOL (штриховые линии).

Анализ полученных результатов показывает, что при рассматриваемых геометрических параметрах волновода и свойствах источника и препятствия различие в значениях потенциалов акустического поля, полученных по построенному в работе приближенному аналитическому решению и определенному по конечно-элементной модели, составляет 5–7%.

Полученное приближенное аналитическое решение задачи справедливо тогда, когда параметры a , b существенно превышают радиус шара r_2 . Проведенные исследова-

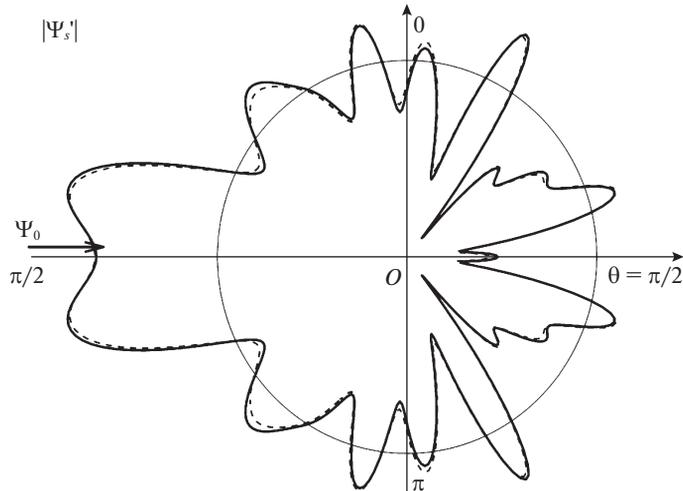


Рис. 10.

ния показали, что, например, при частоте источника, соответствующей волновому размеру шара $kr_2 \leq 5$, наблюдается хорошее совпадение аналитического решения с результатами моделирования, когда параметры a , b превышают радиус шара r_2 в 4 и более раз.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Толоконников Л.А., Ларин Н.В., Скобельцын С.А. Моделирование неоднородного покрытия упругого шара с требуемыми звукоотражающими свойствами // Матем. модел. 2017. Т. 29. № 11. С. 89–98.
2. Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим шаром с неоднородным покрытием // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 4. С. 519–526.
3. Толоконников Л.А. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого шара системой однородных упругих слоев в задаче рассеяния звука // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 6. С. 699–707.
4. Толоконников Л.А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругой сфере с неоднородным покрытием // ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 5. С. 663–673.
5. Толоконников Л.А., Родионова Г.А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. 2014. Вып. 3. С. 131–137.
6. Sammelman G.S., Hackman R.H. Acoustic scattering in a homogeneous waveguide // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 82. № 1. P. 324–336.
7. Ingenito F. Scattering from an object in a stratified medium // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. V. 82. № 6. P. 2051–2059.
8. Григорьева Н.С., Фридман Г.М. Рассеяние звука сферической оболочкой, помещенной в волновод с жидким дном // Акуст. ж. 2013. Т. 59. № 4. С. 424–432.
9. Григорьева Н.С., Михайлова Д.А., Островский Д.Б. Эхосигнал от рассеивателя, находящегося в покрытом льдом волноводе // Акуст. ж. 2015. Т. 61. № 2. С. 143–151.
10. Григорьева Н.С., Кадыров С.Г., Курянов М.С. Дифракция звуковых импульсов на сфере в плоскостойном волноводе с градиентным слоем // Акуст. ж. 2018. Т. 64. № 3. С. 275–282.

11. *Hackman R.H., Sammelman G.S.* Acoustic scattering in an inhomogeneous waveguide: Theory // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1986. V. 80. № 5. P. 1447–1458.
12. *Hackman R.H., Sammelman G.S.* Multiple-scattering analysis for a target in oceanic waveguide // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1988. V. 84. № 5. P. 1813–1825.
13. *Кузькин В.М.* Рассеяние звуковых волн на теле в плоскостойном волноводе // *Акуст. ж.* 2003. Т. 49. № 1. С. 77–84.
14. *Шарфарец Б.П.* Метод расчета поля излучателя и поля рассеяния неоднородного включения в плоскостойных волноводах // *Акуст. ж.* 2004. Т. 50. № 1. С. 123–128.
15. *Иванов Е.А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
16. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
17. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
18. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.
19. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
20. *Ерофеенко В.Т.* Решение одной краевой задачи для уравнения Гельмгольца в слоистом пространстве с шаровым включением // *Дифф. ур.* 1978. Т. 14. № 8. С. 1439–1447.
21. *Pryor R.W.* Multiphysics Modeling Using COMSOL: A First Principles Approach. Burlington: Jones & Bartlett Publishers, 2009. 852 p.
22. *Ihlenburg F.* Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer, 2013. 226 p.

Sound Diffraction on a Sphere with Inhomogeneous Covering in a Plane Waveguide

S. A. Skobel'tsyn^{a,#} and L. A. Tolokonnikov^{a,##}

^a*Tula State University, Tula, Russia*

[#]*e-mail: skbl@rambler.ru*

^{##}*e-mail: tolokonnikovla@mail.ru*

An analytical solution is obtained for the spherical sound waves diffraction problem in a plane waveguide. A scatterer is ball with an elastic radially inhomogeneous coating. The results of calculations of the acoustic field in the waveguide are presented. The calculation data are compared with the results of diffraction modeling based on the finite element method. The FEM-based solution was carried out in the computer simulation system of physical processes COMSOL.

Keywords: sound diffraction, plane waveguide, ball with elastic inhomogeneous covering

REFERENCES

1. *Tolokonnikov L.A., Larin N.V., Skobel'tsyn S.A.* Modeling an inhomogeneous coating of an elastic ball with the required sound-reflecting properties // *Math. Model.*, 2017, vol. 29, no. 3, pp. 89–98.
2. *Tolokonnikov L.A.* Scattering of a plane sound wave by an elastic ball with an inhomogeneous coating // *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 78, no. 4, pp. 519–526.
3. *Tolokonnikov L.A.* Modeling a continuously inhomogeneous coating of an elastic ball by a system of homogeneous elastic layers in the sound scattering problem // *JAMM*, 2017, vol. 81, no. 6, pp. 699–707.
4. *Tolokonnikov L.A.* Diffraction of cylindrical sound waves on an elastic sphere with an inhomogeneous coating // *JAMM*, 2015, vol. 79, no. 5, pp. 663–673.
5. *Tolokonnikov L.A., Rodionova G.A.* Diffraction of a spherical sound wave on an elastic ball with an inhomogeneous coating // *Izv. TulGU Yest. Nauki*, 2014, no. 3, pp. 131–137. (in Russian)
6. *Sammelman G.S., Hackman R.H.* Acoustic scattering in a homogeneous waveguide // *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1987, vol. 82, no. 1, pp. 324–336.
7. *Ingenito F.* Scattering from an object in a stratified medium // *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1987, vol. 82, no. 6, pp. 2051–2059.
8. *Grigoryeva N.S., Friedman G.M.* Sound scattering by a spherical shell placed in a liquid bottom waveguide // *Acoust. Phys.*, 2013, vol. 59, no. 4, pp. 424–432.

9. *Grigoryeva N.S., Mikhailova D.A., Ostrovsky D.B.* Echo from a scatterer located in an ice-covered waveguide // *Acoust. Phys.*, 2015, vol. 61, no. 2, pp. 143–151.
10. *Grigoryeva N.S., Kadyrov S.G., Kupriyanov M.S.* Diffraction of sound pulses on a sphere in a plane-layered waveguide with a gradient layer // *Acoust. Phys.*, 2018, vol. 64, no. 3, pp. 275–282.
11. *Hackman R.H., Sammelman G.S.* Acoustic scattering in an inhomogeneous waveguide: Theory // *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1986, vol. 80, no. 5, pp. 1447–1458.
12. *Hackman R.H., Sammelman G.S.* Multiple-scattering analysis for a target in oceanic waveguide // *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1988, vol. 84, no. 5, pp. 1813–1825.
13. *Kuzkin V.M.* Scattering of sound waves by a body in a plane-layered waveguide // *Acoust. Phys.*, 2003, vol. 49, no. 1, pp. 77–84.
14. *Sharfarets B.P.* Method for calculating the source field and the scattering field of an inhomogeneous inclusion in plane-layered waveguides // *Acoust. Phys.*, 2004, vol. 50, no. 1, pp. 123–128.
15. *Ivanov E.A.* Diffraction of Electromagnetic Waves on Two Bodies. Minsk: Science and Technology, 1988. (in Russian)
16. *Shenderov E.L.* Wave Problems of Hydroacoustics. Leningrad: Shipbuilding, 1972. (in Russian)
17. *Nowacki W.* Teoria sprzystosci. Warszawa: PWN, 1973.
18. *Lebedev N.N.* Special Functions and Their Applications. Moscow: Fizmatgiz, 1963. (in Russian)
19. *Brekhovskikh L.M., Godin O.A.* Acoustics of Layered Media. Moscow: Nauka, 1989. (in Russian)
20. *Erofeenko V.T.* Solution of a boundary value problem for the Helmholtz equation in a layered space with spherical inclusion // *Diff. Eqns.*, 1978, vol. 14, no. 8, pp. 1439–1447.
21. *Pryor R.W.* Multiphysics Modeling Using COMSOL: A First Principles Approach. Burlington: Jones & Bartlett Pub., 2009.
22. *Ihlenburg F.* Finite Element Analysis of Acoustic Scattering. N.Y.: Springer, 2013.