ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 4, с. 433–441

УДК 531.36

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДИНАМИКЕ ВОЛЧКА ТИП-ТОП

М. А. Муницына[1,2,*]

[1] *Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия*
[2] *Институт проблем управления РАН, Москва, Россия*
**e-mail: munitsyna@gmail.com*

Поступила в редакцию 02.03.2020 г.
После доработки 21.04.2020 г.
Принята к публикации 06.05.2020 г.

Простейшей моделью волчка тип-топ является неоднородный динамически симметричный шар, центр масс которого лежит на оси динамической симметрии, но не совпадает с геометрическим центром. Локальный анализ этой модели представлен в работах [1, 2], а глобальный качественный анализ – в работах [3–5]. Численные исследования проводились в рамках поликомпонентного сухого трения [6]. Сравнительный анализ различных моделей проведен в [7]. В работе [8] представлен метод обобщенных диаграмм Смейла [9, 10] в задаче о движении волчка тип-топ на вязкоупругой плоскости.

В настоящей работе для поликомпонентных моделей сухого и вязкого трения при некотором классе начальных условий приводятся приближенные уравнения, описывающие динамику волчка и позволяющие дополнить качественный анализ количественными оценками.

Ключевые слова: трения, тип-топ, диаграммы Смейла

DOI: 10.31857/S0032823520040086

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении неоднородного динамически симметричного шара на горизонтальной плоскости. Пусть r – радиус шара, s – расстояние между его геометрическим центром O и центром масс S $(s \neq 0)$. Будем считать, что прямая SO с единичным ортом $e = \overline{SO}/s$ является осью динамической симметрии шара, а A и C – его экваториальный и осевой моменты инерции.

Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента шара, условие постоянства вектора $\boldsymbol{\gamma}$ и условие безотрывности движения, отнесенные к главным центральным осям инерции шара, имеют соответственно вид

$$m\dot{\mathbf{v}} + [\boldsymbol{\omega}, m\mathbf{v}] = -mg\boldsymbol{\gamma} + N\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}, \quad \mathrm{J}\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathrm{J}\,\boldsymbol{\omega}] = [\mathbf{r}, N\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}] + \mathbf{M}$$
$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}[\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] = 0, \quad (\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь m – масса шара, $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ – векторы скорости его центра масс и угловой скорости, $\mathbf{r} = s\mathbf{e} - r\boldsymbol{\gamma}$ и $\mathbf{u} = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$ – радиус-вектор и скорость нижней точки шара соответственно, g – ускорение свободного падения, $N \geq 0$ – величина нормальной составляющей реакции опорной плоскости, $\mathrm{J} = \mathrm{diag}(A, A, C)$ – центральный тензор инерции шара, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}$ – сила и момент трения. При заданной модели трения

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, N), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, N) \tag{1.2}$$

система (1.1) замкнута относительно переменных $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и N.

Заметим, что в случае отрыва шара от плоскости ($N = 0$) для описания его динамики следует положить $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M} = 0$ в первых трех уравнениях (1.1), отбросив последнее уравнение. При этом для отслеживания возвращения на контакт следует рассматривать также уравнение

$$\dot{z} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}), \tag{1.3}$$

где z — высота над плоскостью нижней точки шара (в момент отрыва и при возвращении на контакт $z = 0$).

2. Плоскость с трением скольжения. Следуя [1, 4], рассмотрим случай $\mathbf{M} = 0$ и будем считать, что сила трения удовлетворяет условиям

$$\mathbf{F} = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{u} = 0; \quad (\mathbf{F}, \mathbf{u}) < 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{u} \neq 0 \tag{2.1}$$

Тогда система уравнений (1.1) имеет первый интеграл (интеграл Джелетта) вида

$$K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = -\frac{1}{Cr}(\mathrm{J}\,\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) = k = \mathrm{const}, \tag{2.2}$$

а для качественного анализа динамики предложенной модели волчка (неоднородного шара) явное выражение силы трения не требуется [4].

В рассматриваемом случае система уравнений (1.1) имеет решения вида

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \mathrm{const}, \quad N = mg, \quad \mathbf{v} = 0, \tag{2.3}$$

соответствующие равномерным вращениям вокруг вертикальной оси динамической симметрии шара, и

$$\begin{gathered} \omega_1 = \omega \sin\theta \sin\omega_0 t, \quad \omega_2 = \omega \sin\theta \cos\omega_0 t, \quad \omega_3 = \omega\cos\theta + \omega_0 \\ \gamma_1 = \sin\theta \sin\omega_0 t, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\omega_0 t, \quad \gamma_3 = \cos\theta, \quad N = mg, \quad \mathbf{v} = 0, \end{gathered} \tag{2.4}$$

соответствующие его регулярным прецессиям вокруг неподвижного центра масс. Параметры регулярной прецессии (2.4) определяются постоянной интеграла Джелетта

$$k^2 = c\frac{\left(a(1 - y^2) + (y - b)^2\right)^2}{b - (1 - a)y}, \quad \omega = \frac{k}{a(1 - y^2) + (y - b)^2}, \quad \omega_0 = -b\omega \tag{2.5}$$

и справедливо равенство

$$\omega_3^2 = \frac{(b - y)^2 c}{(a - 1)y + b} \tag{2.6}$$

Здесь $y = \cos\theta$ — косинус угла нутации шара, значение которого определяется первым равенством формулы (2.4), а a, b и c — параметры волчка

$$a = \frac{A}{C} \in [1/2, +\infty], \quad b = \frac{s}{r} \in (0, 1), \quad c = \frac{mgs}{C} \in (0, +\infty]$$

Указанные движения представляют собой множество всех возможных движений без проскальзывания ($\mathbf{u} = 0$), на которых полная механическая энергия

$$H(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}(\mathrm{J}\,\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r}) \tag{2.7}$$

сохраняется.

Полный параметрический анализ устойчивости этих решений и соответствующие диаграммы Смейла на плоскости (k^2, h), где h — начальное значений полной механической энергии представлен в работе [4]. Например, для волчка с параметрами

$$a = 1, \quad b = 0.3 \tag{2.8}$$

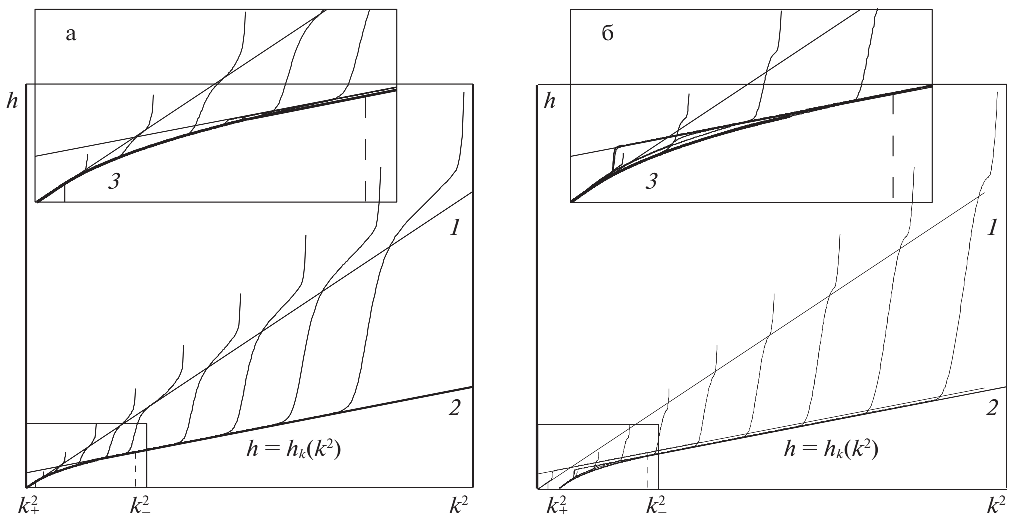

Рис. 1.

диаграмма Смейла имеет вид, представленый на рис. 1. Здесь решениям (2.3), устойчивым при $k^2 \le k_{\pm}^2$, соответствуют прямые *1* и *2*, решениям (2.4), (2.5) соответствует кривая *3*. Каждому значению k соответствует ровно одно устойчивое движение (жирная кривая), точные выражения для соответствующей зависимости $h = h(k^2)$ и значения $k_{\pm}^2$ представлены в [4].

Заметим, в случае абсолютно гладкой плоскости уравнения движения шара имеют еще один первый интеграл $\omega_3 = \mathrm{const}$ и допускают что те же решения (2.3), (2.4), параметры которых определяются значениями интегралов

$$\frac{((x-b)\,\omega_3 - k)\,\omega_3}{(1-x^2)a} + \frac{((x-b)\,\omega_3 - k)^2\,x}{(1-x^2)^2a} = c, \quad \omega = \frac{k-(x-b)\omega_3}{a(1-x^2)}, \quad \omega_0 = \omega_3 - \omega x \quad (2.9)$$

Здесь $x = \cos\theta$ – косинус угла нутации шара, значение которого определяется первым равенством формулы (2.9). Причем прецессии устойчивы при любых параметрах задачи [11].

3. Плоскость с трением скольжения, верчения и качения. Рассмотрим плоскость с трением скольжения, верчения и качения $\mathbf{F} \ne 0$, $\mathbf{M} \ne 0$. Тогда на решениях системы (1.1) спреведливы равенства

$$\dot{H} = (\mathbf{F},\mathbf{u}) + (\mathbf{M},\boldsymbol{\omega}), \quad \dot{K} = -\frac{1}{Cr}(\mathbf{M},\mathbf{r}) \quad (3.1)$$

Следуя [4] будем считать, что момент трения удовлетворяет условиям

$$0 < \frac{(\mathbf{M},\boldsymbol{\omega})}{(\mathbf{F},\mathbf{u})} \ll 1 \quad \text{при} \quad \mathbf{u} \ne 0; \quad \frac{(\mathbf{M},\mathbf{r})}{mgr^2} \ll 1 \quad \text{при} \quad \mathbf{u} \ne 0 \quad (3.2)$$

Эти условия позволяют провести качественный анализ динамики методом обобщенных диаграмм Смейла [9, 10]. Полная механическая энергия H убывает на движения без проскальзывания значительно медленнее, чем на движениях с проскальзыванием, а величина K медленно меняется на всех движениях. Следовательно [4], под действием фазового потока системы (1.1) те точки плоскости (K^2, H), которые не принадлежат соответствующим (2.3) и (2.4), (2.5) решениям движутся “быстро” в сторону уменьшения H, и “медленно” – вдоль оси K^2. Попадая таким образом на множество $H = h(K^2)$ точка продолжает движение “медленно” вдоль него до тех пор, пока не остановится в соответсвующей устойчивому равновесию точке.

Тогда, если в начальном положении ось шара с параметрами (2.8) почти вертикальна, центр масс близок к наинизшему положению, а начальная угловая скорость почти сонаправлена с осью и достаточно велика, то начальная точка на обобщенной диаграмме Смейла находится в окрестности прямой *1* (рис. 1) в области $K^2 > k_-^2$, и в процессе движения ось шара сначала перевернется к вертикальному положению с наивысшем расположением центра масс после чего на некоторое время останется в этом положении. Шар будет вращаться вокруг нее с медленно убывающей по модулю угловой скоростью, пока она не уменьшится о соответствующего равенству $K^2 = k_-^2$ значения. После этого ось шара будет переворачиваться к начальному положению, а шар будет совершать квазипрецессионные движения. Когда центр масс займет наинизшее положение, шар будет замедленно вращаться вокруг вертикали до полной остановки.

Для исследования первого переходного процесса к множеству $H = h(K^2)$ заметим, что из системы (1.1) следует, что

$$\dot{\omega}_3 = \frac{r}{C}([\mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma}], \mathbf{e}) + \frac{1}{C}(\mathbf{M}, e) \tag{3.3}$$

Отсюда в предположении о малости правой части следует, что ω_3 является медленной переменной, а приближенное уравнение, описывающие ее изменение, может быть получено подстановкой вместо быстрых переменных соответствующих периодических или почти периодических решений исходной системы, найденных в предположении о постоянстве медленной переменной [12, 13], т.е. соответствующих стационарным движениям шара на абсолютно гладкой плоскости – прецессии (2.4) с учетом (2.9). При движении вдоль соответствующих (2.3) множеств величина $\dot{\omega}_3$ может быть определена непосредственно из уравнений движения. На движении вдоль соответствующего (2.4), (2.5) множества, медленной величиной будет также полная механическая энергия, а почти периодическими решениями, найденными в предположении ее постоянстве, будут соответствующие этому множеству решения.

Таким образом, учитывая все высказанное при вязком трении вида

$$\mathbf{F} = -\kappa_f \mathbf{u}, \quad \mathbf{M} = -\kappa_m(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}, \quad \kappa_f = \text{const}, \quad \kappa_m = \text{const} \tag{3.4}$$

и считая малыми безразмерные параметры $k_f\sqrt{r/g}/m$ и $k_m\sqrt{r/g}/C$, получим

$$\dot{\omega}_3 = \begin{cases} -\dfrac{\kappa_f r^2}{A}\Phi(\omega_3) - \dfrac{\kappa_m}{A}\Psi(\omega_3)x, \quad H > h(K^2) \\ -\dfrac{\kappa_m}{C}\omega_3, \quad H = h(K^2), \quad K^2 \in [0, k_+^2] \cup [k_-^2, +\infty) \\ -\dfrac{\kappa_m c}{C}\dfrac{\varphi(y)(1-by)}{(a-1)y+b}\dfrac{y-b}{\omega_3}, \quad H = h(K^2), \quad K^2 \in (k_+^2, k_-^2), \end{cases} \tag{3.5}$$

где

$$\varphi(y) = \frac{(by-1)[(a-1)y + b(a+1)]}{(3[(a-1)y + b(a+1)]^2 + a(b^2-1) + a^2)}$$

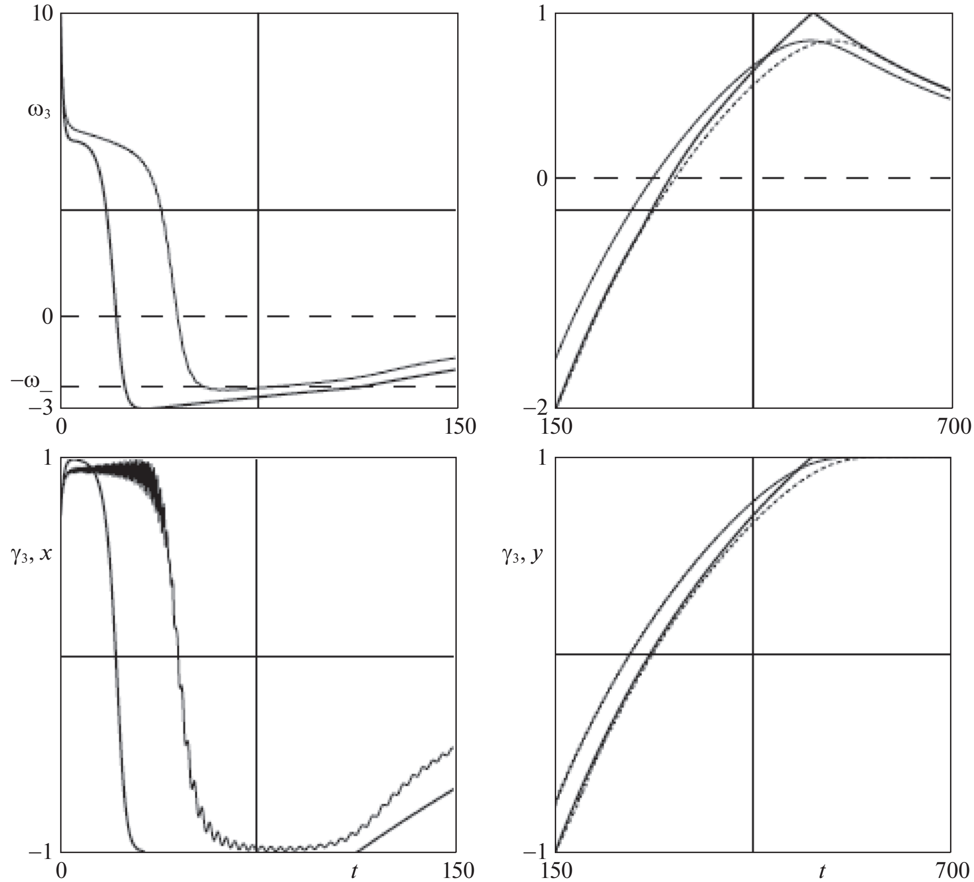

Рис. 2.

зависимости $x = x(\omega_3)$ и $y = y(\omega_3)$ определяются соответствующими равенствами (2.9) и (2.6), а зависимости $\Phi(\omega_3)$ и $\Psi(\omega_3)$ имеют вид

$$\Phi(\omega_3) = (b - x)K + (a(1 - x^2) + (b - x)^2)\omega_3, \quad \Psi(\omega_3) = K + (b + (a - 1)x(\omega_3))\,\omega_3$$

Введем такие масштабы измерения масс, длин и времени, что $m = 1$, $g = 1$ и $r = 1$, численные значения параметров волчка (2.8) и трения примем следующими: $c = 1$, $\kappa_f = 0.25$, $\kappa_m = 1\times 10^{-3}$. На рис. 2 тонкими кривыми представлены результаты численного интегрирования полных уравнений движения шара при начальных условиях

$$\mathbf{v}(0) = 0, \quad \gamma_3(0) = 0.7, \quad \gamma_1(0) = 0, \quad \omega_3(0) = 10, \quad \omega_1(0) = \omega_2(0) = 0 \qquad (3.6)$$

Жирным кривым на рис. 2 отмечены решение уравнения (3.5) и соответствующая ему зависимость косинуса угла нутации шара. Последние можно разделить на четыре этапа движения: на первом абсолютная величина ω_3 уменьшается и выполнено неравенство $x > -1$ – в этом случае интегрируется первая строчка уравнения (3.5) (этот этап соответствует первому перевороту волчка от положения с наинизшим расположением центра масс к наивысшему); на втором $\dot{\omega}_3$ меняет знак на противоположный, а величина x (y) полагается равной -1 — интегрируется вторая строчка уравнения (3.5) (соответствующая вращению волчка вокруг вертикали) до тех пор, пока не достигается равенство $\omega_3^2 = \omega_-^2$ ($K^2 = k_-^2$); затем интегрируется третья строчка (соответствующая второму перевороту волчка) и величина y меняется от -1 до 1; на финальном этапе (также соответствующем вращениям волчка вокруг вертикали) снова интегрируется вторая строчка уравнения (3.5) до тех пор, пока величина ω_3 не обратится в ноль.

При численном интегрировании уравнения (3.5) на первом этапе движения изменение величины K не учитывалось, вследствие чего наблюдается различие значений ω_3 в результате этого переходного процесса, а на следующих этапах решения отличаются сдвигом по времени (пунктиром обозначен сдвиг точного решения). При численном интегрировании уравнения (3.5) на третьем этапе учитывалось, что его правая часть имеет в точке $\omega_3 = 0$ ($y = b$) устранимую особенность. Заметим, что в начале этого этапа решение полной системы уравнений остается в окрестности $\gamma_3 = -1$, а затем быстро переходит в окрестность приближенного решения, т.е. при сходе с неустойчивых вращений наблюдается затягивание потери устойчивости ([14, 15]).

Рассмотрим модель трения вида

$$\mathbf{F} = -fN\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}| + 8\rho/(3\pi)|(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\gamma})|}, \quad \mathbf{M} = -\frac{3\pi\rho^2 f}{16}N\frac{(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}}{15\pi/(16\rho)|\mathbf{u}| + |(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\gamma})|}, \tag{3.7}$$

где f, ρ — постоянные коэффициенты. Равенства (19) соответствует аппроксимациям Паде первого порядка моделей трения [2, 10]. Тогда, считая малыми параметры f и ρ/r, получим

$$\dot{\omega}_3 = \begin{cases} -\dfrac{fc}{b}\dfrac{\Phi(\omega_3)\sqrt{1-x^2}}{\Phi(\omega_3)\operatorname{sign}K + \beta\Psi(\omega_3)\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{\mu}{C}\dfrac{\Psi(\omega_3)x\sqrt{1-x^2}}{\alpha\Phi(\omega_3)\operatorname{sign}K + \Psi(\omega_3)\sqrt{1-x^2}} \\ H > h(K^2) \\ -\dfrac{\kappa_m}{C}\operatorname{sign}\omega_3, \quad H = h(K^2), \quad K^2 \in [0, k_+^2] \cup [k_-^2, +\infty) \\ -\dfrac{\kappa_m}{C}\varphi(y), \quad H = h(K^2), \quad K^2 \in (k_+^2, k_-^2) \end{cases} \tag{3.8}$$

Результаты соответствующих численных экспериментов при следующих параметрах трения $f = 0.2$, $\rho = 0.04$, представлены на рис. 3. Качественно эти результаты совпадают с представленными на рис. 2. Параметры трения определялись из условия примерного совпадения длины временных интервалов каждого из этапов движения с аналогичными интервалами предыдущего эксперимента. В целом можно сказать, что при выбранных параметрах в рассматриваемых экспериментах качество приближения полученными уравнениями (3.5), (3.8) полной системы уравнений движения при двух рассмотренных моделях трения одинаково. К различиям можно отнести дольшее затягивание потери устойчивости при переходе с неустойчивых вращений к прецессиям в случае сухого трения.

Кривые, соответствующие численному интегрированию полных уравнений движения на обощенных диаграммах Смейла в случае моделей трения (3.4) и (3.7) представлены на рис. 1, а и рис. 1, б соответственно (начальные условия имели аналогичный (3.6) вид, начальная угловая скорость менялась от 1 до 10 с равным шагом в единицу).

Полученные уравнения (3.5), (3.8), определяют динамику шара при близких к виду (2.4) при соотношении (2.9) начальных условиях. Они интегрируются в квадратурах и аппроксимируют зависимость от времени проекции угловой скорости шара на ось его динамической симметрии, при этом равенства (2.3) или (2.4) с учетом (2.9) или (2.5) на соответствующих этапах движения описывают поведение всех остальных перемен-

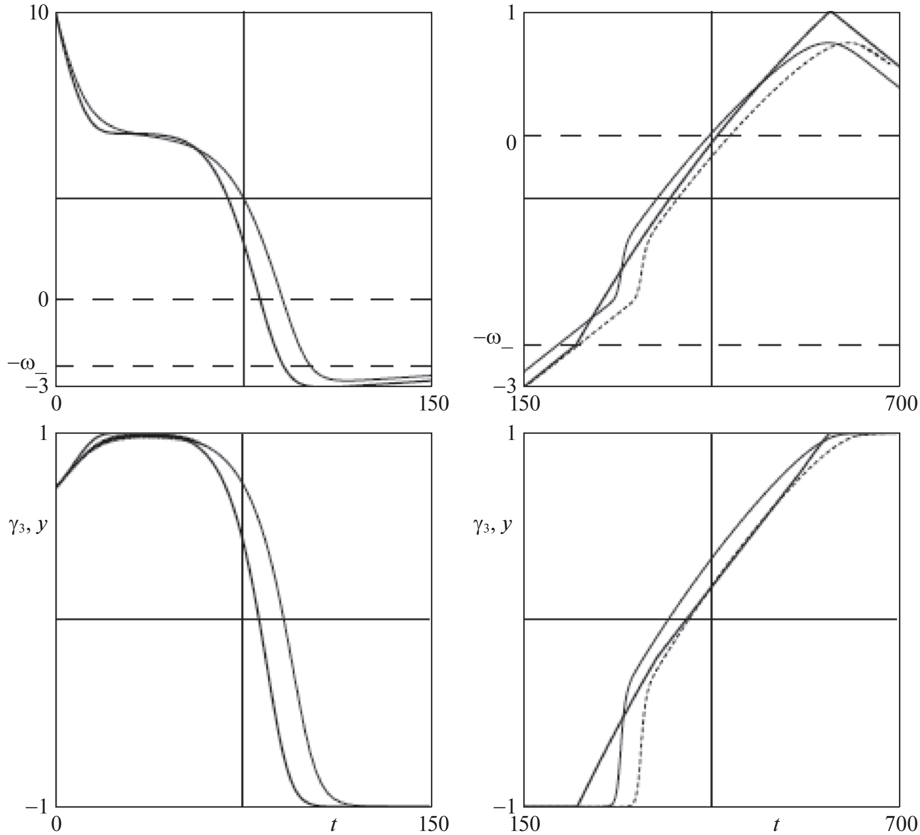

Рис. 3.

ных. Точные решения полной системы уравнений движения шара представляют собой сумму плавно меняющейся траектории усредненного движения и быстро осциллирующих слагаемых. В частности, сила реакции опорной плоскости, сохраняя в среднем равное весу шара значение, может существенно отклонятся от него, в том числе принимая нулевое значение. В таком случае происходит отрыв от плоскости. Но в силу быстрой осциляции всех переменных, а следовательно и правой части равенства (1.3), ему соответствует столь же быстрое возвращение на контакт. Этим объясняется тот факт, что в соответствующем натурном эксперименте видимого отрыва от плоскости не наблюдается, а движение сопровождается звуком серии микроударов.

Следует отметить, что при добавлении к любой из рассмотренных моделей трения перпендикулярной скорости скольжения компоненты силы или момента трения полученные уравнения (3.5), (3.8) не изменятся, т.е. в рассматриваемой задаче о движении неоднородного шара на неподвижной горизонтальной плоскости эти компоненты не оказывают качественного влияния на динамику. Заметим также, что предложенный подход к исследованию динамики волчка тип-топ и других задач подобного рода (например, динамики сфероида [18, 19]) может быть использован и при других моделях взаимодействия тела с опорной поверхностью.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-01-00140, 18-01-00335) и Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, № 7 “Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения в ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–77.
2. *Магнус К.* Гироскоп. теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
3. *Карапетян А.В.* Качественное исследование волчка на плоскости с трением // ПММ. 1991. Т. 55. № 4. С. 698–701.
4. *Карапетян А.В.* Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 33–41.
5. *Карапетян А.В.* Инвариантные множества механических систем с симметрией // Проблемы устойчивости и управления. Сб. научн. статей, посвященный 80-летию акад. В.М. Матросова. М.: Физматлит, 2013. С. 184–210.
6. *Климов Д.М., Журавлёв В.Ф.* О динамике волчка Томсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 6. С. 157.
7. *Зобова А.А.* Различные модели трения в динамике двусферического волчка // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 2. С. 21–28.
8. *Zobova A.A., Karapetyan A.V.* Tippe-top on visco-elastic plane: steady-state motions, generalized Smale diagrams and overturns // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38. P. 1007–1013.
9. *Карапетян А.В.* Качественный анализ динамики диссипативных систем с симметрией на основе метода обобщенных диаграмм Смейла // В сб.: Современные проблемы математики и механики. Т. 2. Механика. Вып. 2. М.: МГУ, 2009. С. 192–200.
10. *Карапетян А.В.* Обобщенные диаграммы Смейла и их применение к задачам динамики систем с трением // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Тр. 10-й междунар. Четаевской конф. Казань, 2012 Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. С. 247–258.
11. *Карапетян А.В.* Об устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 1981. Т.45. № 3. С. 504–511.
12. *Моргунов Б.И., Волосов В.М.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: МГУ, 1971. 508 с.
13. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 400 с.
14. *Нейштадт А.И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. I // Дифференц. уравн. 1987. Т. 23. № 12. С. 2060–2067.
15. *Нейштадт А.И.* О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. II // Дифференц. уравн. 1988. Т. 24. № 2. С. 226–233.
16. *Карапетян А.В.* Двухпараметрическая модель трения и ее свойства // ПММ. 2009. Т. 73. № 5. С. 515–519.
17. *Журавлев В.Ф.* О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. №. 5. С. 762–767.
18. *Муницына М.А.* Динамика сфероида на плоскости с трением // ПММ. 2018. Т. 82. №. 1. С. 16–24.
19. *Муницына М.А.* О переходных процессах в динамике эллипсоида вращения на плоскости с трением // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 3. С. 69–75.

Transition Processes in Tippe Top Dynamics

M. A. Munitsyna[a,b,#]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*
[b] *Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS, Moscow, Russia*
[#] *e-mail: munitsyna@gmail.com*

The simplest model of a tippe-top is an nonhomogeneous dynamically symmetric ball, the center of mass of which lies on the axis of dynamic symmetry, but does not coincide with the geometric center. A local analysis of this model is presented in the works [1, 2], and global qualitative analysis is in the works [3–5]. Numerical studies for multicomponent dry friction were carried out in [6]. A comparative analysis of various models was carried out in [7]. In this work, for multicomponent models of dry and viscous friction, for a certain class of initial conditions, approximate equations are described that describe the dynamics of the top. They allow you to complement the qualitative analysis with quantitative estimates.

Keywords: friction, tippe-top, Smale diagrams

REFERENCES

1. *Contensou P.* Couplage entre frottement de glissement et frottement de pivotement dans la théorie de la toupee // Kreiselprobleme. Gyrodym. Symp. Belin: Springer, 1963. pp. 201–216.
2. *Magnus K.* Kreisel. Theorie und Anwendungen. Berlin: Springer, 1971.
3. *Karapetyan A.V.* Qualitative investigation of the dynamics of a top on a plane with friction // JAMM, 1991, vol . 55, no. 4, pp. 563–565.
4. *Karapetyan A.V.* Global qualitative analysis of tippe top dynamics // Mech. Sol., 2008, vol. 43, no. 3, pp. 342–348.
5. *Karapetian A.V.* Invariantnye mnozhestva mehanicheskih sistem s simmetriej // Problemy ustojchivosti i upravleniia. Sbornik nauchnyh statej, posviashchennyj 80-letiyu akad. V.M. Matrosova. M.: Fizmatlit, 2013. pp. 184–210. (in Russian)
6. *Zhuravlev V.P., Klimov D.M.* On the dynamics of the thompson top (tippe top) on the plane with real dry friction // Mech. Sol., 2005, vol. 40, no. 6, pp. 117–127.
7. *Zobova A.A.* Various friction models in two-sphere top dynamics // Mech. Sol., 2013, vol. 48, no. 2, pp. 134–139.
8. *Zobova A.A., Karapetyan A.V.* Tippe-top on visco-elastic plane: steady-state motions, generalized Smale diagrams and overturns // Lobachevskii J. Math., 2017, vol. 38, pp. 1007–1013.
9. *Karapetian A.V.* Kachestvennyj analiz dinamiki dissipativnyh sistem s simmetriej na osnove metoda obobshchennyh diagramm Smejla // V sb.: Sovremennye problemy matematiki i mehaniki. vol. 2. Mekhanika. Iss. 2. M.: MGU, 2009. pp. 192–200. (in Russian)
10. *Karapetian A.V.* Obobshchennye diagrammy Cmejla i ih primenenie k zadacham dinamiki sistem s treniem // Analiticheskaia mehanika, ustojchivost' i upravlenie: Tr. 10-j mezhdunar. Chetaevskoj konf. T. 1. Sekc. 1. Analiticheskaia mehanika. Kazan, 2012. Kazan: Izd-vo Kazan. Gos. Tehn. un-ta, 2012, pp. 247–258. (in Russian)
11. *Karapetian A.V.* On stability of steady motions of a heavy solid body on an absolutely smooth horizontal plane // JAMM, 1981, vol. 45, no. 3, pp. 368–373.
12. *Morgunov B.I. Volosov V.M.* Metod osredneniia v teorii nelinejnyh kolebatel'nyh sistem. M.: MGU, 1971. 508 p. (in Russian)
13. *Blehman I.I.* Vibrational Mechanics (Vibracionnaia mehanika). M.: Fizmatlit, 1994. 400 p. (in Russian)
14. *Nejshtadt A.I.* Persistense of stability loss for dynamical bifurcations. I // Differ. Eq., 1987, vol. 23, pp. 1385–1391.
15. *Nejshtadt A.I.* Persistense of stability loss for dynamical bifurcations. II // Differ. Eq., 1988, vol. 24, pp. 171–176.
16. *Karapetyan A.V.* A two-parameter friction model // JAMM, 2009, vol. 73, no. 4, pp. 367–370.
17. *Zhuravlev V.F.* The Model of dry friction in the problem of the rolling of rigid bodies // JAMM, 1998, vol. 62, no. 5, pp. 705–710.
18. *Munitsyna M.A.* Spheroid dynamics on a horizontal plane with friction // Mech. Sol., 2018, vol. 53, pp. 60–67.
19. *Munitsyna M.A.* On transients in the dynamics of an ellipsoid of revolution on a plane with friction // Mech. Sol., 2019, vol. 54, no. 4, pp. 545–550.