ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 4, с. 481–499

*УДК 539.3*

*Светлой памяти Роберта Вениаминовича Гольдштейна*

# ДЛИННОВОЛНОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ


**Н. Ф. Морозов[1,2,*], П. Е. Товстик[1,2,**], Т. П. Товстик[2,***]**

[1] *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*
[2] *Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия*
**e-mail: morozov@nm1016.spb.edu*
***e-mail: peter.tovstik@mail.ru*
****e-mail: tovstik_t@mail.ru*

Поступила в редакцию 17.03.2020 г.
После доработки 15.05.2020 г.
Принята к публикации 22.05.2020 г.

В линейном приближении исследуются свободные колебания и плоские волны в тонкой упругой анизотропной бесконечной пластине постоянной толщины. Рассматривается анизотропия общего вида, описываемая 21 модулем упругости. Предполагается, что модули упругости и плотность не зависят от тангенциальных координат, но могут зависеть от координаты по толщине пластины. Многослойные и функционально градиентные пластины не исключаются из рассмотрения. В предположении, что длина волны существенно превосходит толщину пластины, построено асимптотическое разложение по степеням малого параметра толщины гармонического по тангенциальным координатам решения системы трехмерных уравнений теории упругости. При фиксированных значениях волновых чисел существуют только три длинноволновых решения: одно изгибное низкочастотное и два тангенциальных. С точностью до членов второго порядка малости по безразмерной толщине построены дисперсионные уравнения для этих решений. Для изгибных решений характерна сильная зависимость частоты от длины волны, а тангенциальные волны распространяются с малой дисперсией. Рассмотрены частные виды анизотропии.

*Ключевые слова:* анизотропная неоднородная пластина, гармонические колебания, плоские волны, дисперсионное уравнение

**DOI:** 10.31857/S0032823520040074

**1. Введение.** При рассмотрении длинных волн в пластине естественно использовать двухмерные модели, ибо напряженное состояние в ней близко к плоскому напряженному состоянию. Вывод двухмерных приближенных моделей тонких пластин и оболочек – это одна из классических задач механики. Классическая модель Кирхгофа–Лява (КЛ) может быть получена из трехмерных уравнений теории упругости с использованием гипотез о прямой нормали [1, 2]. Более сложная и в ряде случаев более точная модель Тимошенко–Рейсснера (ТР) для описания деформаций тонкостенных конструкций с учетом поперечного сдвига была предложена первоначально для балок [3] и оболочек [4], соответственно. Для пластин эта модель была впервые применена в работах [5, 6].

Ряд уточненных моделей основан на разложении неизвестных функций по полиномам Лежандра [7, 8]. В последнее время широко используются модели [9], связанные с разложением перемещений в ряд по степеням толщины $z$ с подлежащими определению коэффициентами. В результате получаются модели первого, второго, третьего и т.д. порядка. В частности, классическая модель КЛ имеет первый порядок, а модель ТР – третий. Кроме того, область применимости этих моделей ограничена однородными ортотропными пластинами. Для функционально градиентных и многослойных пластин эти модели напрямую неприменимы. Приходится вводить однородные пластины с эквивалентными упругими свойствами или (для многослойных пластин) осуществлять стыковку слоев [8].

Многочисленные исследования посвящены выводу двухмерных уравнений с использованием асимптотических разложений по степеням малого параметра толщины $\mu = h/L$, где $h$ – толщина, $L$ – характерная длина волны в тангенциальных направлениях (см. [10–14] и др.).

Асимптотическое разложение используется и в данной работе [15, 16]. Нулевое приближение соответствует гипотезам о прямой нормали и приводит к модели Кирхгофа–Лява. Первое приближение, появляется лишь для анизотропных пластин с наклонной анизотропией. В остальных случаях (для изотропных, ортотропных и моноклинных пластин, однородных и неоднородных по толщине) первое приближение отсутствует, и внимание было сосредоточено на построении второго приближения – на уточненных моделях второго порядка точности. Преимущество асимптотического разложения по сравнению с разложением по степеням $z$ заключается в том, что в одном приближении асимптотического разложения собираются члены одного порядка малости в то время, как в разложении по степеням $z$ члены различных порядков перемешаны. В то же время последние разложения приводят к более простым моделям.

Были построены уравнения второго порядка точности, как для изотропных однородных по толщине пластин [13, 14], так и для многослойных трансверсально изотропных пластин [16]. Найденный при этом эквивалентный модуль поперечного сдвига [17–19] был использован для построения обобщенной модели Тимошенко–Рейсснера и для решения частных задач [20, 21]. Для многослойной пластины из моноклинного материала построены модели второго порядка точности [22, 23]. Эффекты второго порядка малости для моноклинных материалов – это поперечный сдвиг и деформация растяжения (сжатия) нормальных волокон, а для задач динамики к ним добавляются силы инерции вращательного движения нормальных волокон и силы инерции их растяжения. Модель ТР для однородного материала учитывает эффект поперечного сдвига и инерцию вращательного движения, а (как правило, малые) эффекты, связанные с растяжением нормального волокна, моделью ТР не описываются.

Рассмотрен [24] пример анизотропного материала общего вида (с 21 модулем упругости). В нем изотропная матрица армирована системой жестких нитей, ориентированных под углом к плоскости пластины. Поэтому такую анизотропию называют наклонной. Асимптотическое интегрирование при такой анизотропии вызывает дополнительные трудности. Было построено [25] нулевое приближение, которое имеет ту же точность, а система уравнений имеет тот же порядок, что и в модели КЛ. Модель второго порядка точности [26, 27], завершает построение таких моделей для пластин из анизотропных неоднородных материалов. Она приводит к весьма громоздкой системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В данной работе модель [26, 27] используется для анализа длинноволновых колебаний и длинных плоских волн в анизотропной неоднородной бесконечной пластине. При этом задача существенно упрощается, ибо ищется гармоническое по тангенциальным координатам решение, в результате чего система дифференциальных уравнений сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Отдельно рассмотрены тенгенциальные и изгибные колебания и волны. Рассмотрены частные виды анизотропии.

Следует назвать монографии [28—31], в которых рассматриваются различные вопросы колебаний и распространения волн в пластинах, оболочках и трехмерных телах и которые способствовали написанию данной работы.

**2. Основные предположения и уравнения.** В линейном приближении динамические уравнения упругой анизотропной пластины постоянной толщины $h$ в декартовой системе координат $x_1$, $x_2$, $x_3$ имеют вид:

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}-\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=0,\quad i=1,2,3,\quad 0\le x_3=z\le h, \tag{2.1}$$

где $\sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3)$ — напряжения, $u_i(x_1,x_2,x_3)$ — проекции перемещения, $\rho(x_3)$ — плотность материала. Тензорные обозначения не используются. Деформации $\varepsilon_{ij}$ выражаются через перемещения по формулам:

$$\varepsilon_{ii}=\frac{\partial u_i}{\partial x_i},\quad \varepsilon_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i},\quad i\ne j,\quad i,j=1,2,3 \tag{2.2}$$

Деформации и напряжения будем записывать как 6-мерные векторы. Тогда соотношения упругости принимают вид [9]:

$$\begin{gathered}\sigma=\mathbf{E}\cdot\varepsilon,\quad \mathbf{E}=(E_{ij})_{i,j=1,\ldots,6},\quad E_{ij}=E_{ji}\\ \sigma=(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{23},\sigma_{13},\sigma_{12})^T,\quad \varepsilon=(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{23},\sigma_{13},\sigma_{12})^T\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь и в дальнейшем $^T$ означает транспонирование, для векторов и матриц используются жирные буквы, точкой $(\cdot)$ обозначается произведение векторов и матриц. Матрица $\mathbf{E}$ модулей упругости в рассматриваемом случае анизотропии общего вида содержит 21 независимый упругий модуль, она симметричная и положительно определенная. Предполагается, что модули упругости $E_{ij}$ и плотность $\rho$ не зависят от тангенциальных координат $x_1$, $x_2$, но могут зависеть от координаты $x_3=z$. Зависимость модулей упругости и плотности от координаты $z$ имеет место для функционально градиентных пластин, а для многослойных пластин эти величины являются кусочно-постоянными функциями $z$.

Лицевые поверхности пластины предполагаются свободными, что дает граничные условия

$$\sigma_{i3}=0,\quad i=1,2,3\quad \text{при}\quad z=0,\quad z=h \tag{2.4}$$

Удобно разделить напряжения и деформации на группы тангенциальных $\sigma_t$, $\varepsilon_t$ и трансверсальных $\sigma_n$, $\varepsilon_n$ напряжений и деформаций [18, 19]:

$$\begin{gathered}\sigma_t=(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12})^T,\quad \sigma_n=(\sigma_{13},\sigma_{23},\sigma_{33})^T\\ \varepsilon_t=(\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{12})^T,\quad \varepsilon_n=(\varepsilon_{13},\varepsilon_{23},\varepsilon_{33})^T\end{gathered} \tag{2.5}$$

Тогда соотношения упругости (2.3) запишутся в виде:

$$\sigma_t=\mathbf{A}\cdot\varepsilon_t+\mathbf{B}\cdot\varepsilon_n,\quad \sigma_n=\mathbf{B}^T\cdot\varepsilon_t+\mathbf{C}\cdot\varepsilon_n, \tag{2.6}$$

где

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}E_{11}&E_{12}&E_{16}\\E_{12}&E_{22}&E_{26}\\E_{16}&E_{26}&E_{66}\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}E_{15}&E_{14}&E_{13}\\E_{15}&E_{24}&E_{23}\\E_{56}&E_{46}&E_{36}\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}E_{55}&E_{45}&E_{35}\\E_{45}&E_{44}&E_{34}\\E_{35}&E_{34}&E_{33}\end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Как показывает последующий анализ, особого рассмотрения заслуживает моноклинный материал, для которого модули упругости сохраняют свое значение при замене $\tilde{z} = -z$ направления оси $z$. Для этого материала $E_{4i} = E_{5i} = 0$ при $i = 1, 2, 3, 6$.

Исключение трансверсальных деформаций $\varepsilon_n$ из соотношений (2.6) дает

$$\sigma_t = \mathbf{A}^* \cdot \varepsilon_t + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \sigma_n, \quad \varepsilon_n = \mathbf{C}^{-1} \cdot \sigma_n - \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \varepsilon_t, \tag{2.8}$$

где

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \tag{2.9}$$

Пренебрегая малыми напряжениями $\sigma_n$, получаем приближенные соотношения упругости

$$\sigma_t = \mathbf{A}^* \cdot \varepsilon_t, \tag{2.10}$$

связывающие тангенциальные напряжения и деформации. Эти соотношения соответствуют классической модели Кирхгофа–Лява. Матрицу $\mathbf{A}^*$ назовем матрицей тангенциальных упругих модулей.

**3. Уравнения распространения плоских волн и свободных колебаний.** При сделанных предположениях система уравнений (2.1)–(2.3) имеет решение вида

$$\mathbf{\Phi}(x_1, x_2, z, t) = \mathbf{\Phi}(z) \exp[i(q_1 x_1 + q_2 x_2 - \lambda t)], \quad \mathbf{\Phi} = \{\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i\}, \tag{3.1}$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\mathbf{\Phi}$ – любая из неизвестных функций системы, описывающей распространение плоской гармонической волны, движущейся со скоростью $v = \lambda/\sqrt{q_1^2 + q_2^2}$ в направлении, определяемом вектором $\mathbf{n} = q_1\mathbf{i}_1 + q_2\mathbf{i}_2$. Здесь $q_1$, $q_2$ – вещественные волновые числа, характерная длина волны равна $L = 2\pi/\sqrt{q_1^2 + q_2^2}$.

Введем безразмерные величины (со значком ˜) по формулам:

$$\begin{gathered}\{x_1, x_2, u_1, u_2, u_3\} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3\}/q, \quad q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad \{E_{ij}, \sigma_{ij}\} = E_*\{\tilde{E}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}\} \\ z = h\tilde{z}, \quad \mu = hq = \frac{2\pi h}{L}, \quad \{q_1, q_2\} = q\{\tilde{q}_1, \tilde{q}_2\}, \quad \rho = \rho_*\tilde{\rho}, \quad t = \sqrt{\frac{\rho_0}{E_* \nu^2}}\tilde{t},\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $E_*$, $\rho_*$ – характерные значения модулей упругости и плотности. Формулы (3.1) станут безразмерными

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{z}, \tilde{t}) = \tilde{\mathbf{\Phi}}(\tilde{z}) \exp[i(\tilde{q}_1\tilde{x}_1 + \tilde{q}_2\tilde{x}_2 - \tilde{\lambda}\tilde{t})], \quad \tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{\rho_0}{E_* \nu^2}}\lambda, \tag{3.3}$$

причем $\tilde{q}_1^2 + \tilde{q}_2^2 = 1$, $0 \le \tilde{z} \le 1$. В безразмерных переменных скорость волны равна $\tilde{v} = \tilde{\lambda}$, а ее длина равна $2\pi$. В дальнейшем значок ˜ опускаем.

Уравнения (2.1)–(2.3) в результате подстановки (3.1) приводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{dw}{dz} = \mu\varepsilon_{33}, \quad w = u_3 \\ \frac{du_k}{dz} = -\mu(p_k w - \varepsilon_{k3}), \quad p_k = \frac{\partial}{\partial x_k} = iq_k, \quad k = 1, 2 \\ \frac{d\sigma_{k3}}{dz} = -\mu(p_1\sigma_{1k} + p_2\sigma_{2k} + \lambda^2\rho(z)u_k), \quad k = 1, 2 \\ \frac{d\sigma_{33}}{dz} = -\mu(p_1\sigma_{13} + p_2\sigma_{23} + \lambda^2\rho(z)w)\end{gathered} \tag{3.4}$$

В системе (3.4) основные неизвестные функции – функции $w$, $u_1$, $u_2$, $\sigma_{13}$, $\sigma_{23}$, $\sigma_{33}$. При рассмотрении многослойных пластин предполагается, что имеется полный контакт между слоями, следовательно, основные неизвестные функции непрерывны. Деформации $\varepsilon_{k3}$, $k = 1, 2, 3$, и напряжения $\sigma_{ij}$, $i, j = 1, 2$, входящие в систему (3.4), выражаются через основные неизвестные по формулам (2.2) и (2.8).

Запишем краевую задачу (3.4), (2.4) в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{M}(z)\mathbf{\Phi} + \Lambda\rho(z)\mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{U} = \{u_1, u_2, u_3\}^T, \quad \Lambda = \lambda^2 \\ \sigma_{k3}(0) = \sigma_{k3}(1) = 0, \quad k = 1, 2, 3,\end{gathered} \tag{3.5}$$

где $\mathbf{M}(z)$ – дифференциальный оператор с комплексно-значными коэффициентами, определяемыми из системы (3.4).

Справедливо следующее утверждение (см. также [30]).

*При сделанных выше предположениях относительно матрицы модулей упругости* $\mathbf{E}(z)$ *для фиксированных волновых чисел* $q_1$, $q_2$ *краевая задача* (3.5) *является самосопряженной и имеет дискретный неотрицательный спектр* $\Lambda_1, \Lambda_2 \ldots$ *с точкой сгущения на бесконечности. Собственные функции* $\mathbf{\Phi}_n(z)$ *удовлетворяют условию ортогональности*

$$\int_0^1 \rho(z)\mathbf{U}_n^T(z) \cdot \overline{\mathbf{U}_m(z)} dz = 0, \quad \Lambda_m \neq \Lambda_n, \quad n, m = 1, 2, \ldots, \tag{3.6}$$

*где* $^T$ *означает транспонирование, а черта сверху – комплексное сопряжение.*

Для доказательства рассмотрим систему уравнений (3.5) при $\Lambda = \Lambda_n$ с собственными функциями $\mathbf{\Phi}_n(z)$, $\mathbf{U}_n(z)$. Третье уравнение (3.4) умножим на функции $\overline{u_{km}(z)}$, $k = 1, 2$, четвертое – на $\overline{w_m(z)}$, сложим и проинтегрируем по $z \in [0, 1]$. Тогда после интегрирования по частям и преобразований с использованием первых двух уравнений (3.4) получим

$$\Lambda_n \int_0^1 \rho(z)\mathbf{U}_n^T(z) \cdot \overline{\mathbf{U}_m(z)} dz = \int_0^1 \sigma_n^T(z) \cdot \overline{\varepsilon_m(z)} dz, \tag{3.7}$$

где $\sigma$ и $\varepsilon$ – шестимерные векторы (2.3). В силу равенства (2.3) $\sigma = \mathbf{E} \cdot \varepsilon$ при $m = n$ из соотношения (3.7) следует неотрицательность собственных значений (положительность, если исключить движения пластины как твердого тела):

$$\Lambda_n \int_0^1 \rho(z)|U_n(z)|^2 dz = \int_0^1 \varepsilon_n^T(z) \cdot \mathbf{E} \cdot \overline{\varepsilon_n(z)} dz, \tag{3.8}$$

а при $\Lambda_m \neq \Lambda_n$ – ортогональность собственных функций (3.6). В силу (3.8) собственное значение $\Lambda_n$ равно отношению плотностей потенциальной и кинетической энергии пластины.

Представим комплексные функции $\mathbf{\Phi}(z)$ в виде:

$$\mathbf{\Phi}(z) = \mathbf{\Phi}_a(z) \exp\left(i\mathbf{\Phi}_f(z)\right), \quad \mathbf{\Phi}_a(z) = |\mathbf{\Phi}(z)| \tag{3.9}$$

Тогда при фиксированных волновых числах $q_1$, $q_2$ для каждого номера $n$ функции (3.1) описывают две плоских волны

$$\mathbf{\Phi}^{(n)}(x_1, x_2, z, t) = \mathbf{\Phi}_a^{(n)}(z) \sin(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \mathbf{\Phi}_f^{(n)}(z) \pm \sqrt{\Lambda_n} t), \tag{3.10}$$

распространяющихся в направлении $\mathbf{n} = q_1\mathbf{i}_1 + q_2\mathbf{i}_2$ и в противоположном направлении $-\mathbf{n}$ с равными по модулю скоростями.

Рассмотрим свободные установившиеся колебания пластины.

*При фиксированных волновых числах* $q_1$, $q_2$ *спектр частот колебаний пластины суть* $\omega_n = \sqrt{\Lambda_n}$, *где* $\Lambda_n$ *— собственные числа задачи* (3.5).

Действительно, функции

$$\mathbf{\Phi}(x_1, x_2, z, t) = \mathbf{\Phi}(z)\exp[i(q_1x_1 + q_2x_2)\sin(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{\Lambda} \tag{3.11}$$

удовлетворяют той же системе уравнений (3.4) или (3.5).

Формы колебаний пластины

$$\mathbf{\Phi}_1^{(n)}(x_1, x_2, z) = C\mathbf{\Phi}_a^{(n)}(z)\sin(q_1x_1 + q_2x_2 + \mathbf{\Phi}_f^{(n)}(z) + \alpha), \tag{3.12}$$

где $C$ и $\alpha$ — произвольные постоянные, вытянуты в направлении, перпендикулярном $\mathbf{n}$, и имеют характер "стиральной доски". Привычные "шахматные" формы колебаний вида $w(x_1, x_2, z) = w(z)\sin(q_1x_1 + \alpha_1)\sin(q_2x_2 + \alpha_2)$ возможны лишь, если волновым числам $p$, $q$ и $p$, $-q$ отвечает одна и та же частота колебаний $\omega$. Последнее условие выполнено для ортотропных пластин.

**4. Преобразование системы (3.4).** В п. 3 рассмотрена общая задача о распространении плоских волн в пластине и о ее свободных колебаниях. Ниже рассматриваются длинные волны в тонкой пластине в предположении, что длина волны много больше ее толщины, т.е. $h \ll L$. Тогда $\mu$ (см. (3.2)) становится малым параметром, который будет использоваться для построения приближенного решения. Приводимое ниже исследование для пластин в определенном смысле дополняет исследование работы [30], посвященной анализу коротких волн в трехмерном упругом теле. Для длинных волн деформации охватывают всю толщину пластины и выпадают из рассмотрения волны Релея и волны Стоунли, локализующиеся, соответственно, вблизи поверхности пластины или вблизи плоскостей контакта слоев в многослойной пластине.

Для удобства последующего асимптотического анализа преобразуем систему (3.4), подставив в нее трансверсальные деформации $\varepsilon_{k3}$, $k = 1, 2, 3$, и тангенциальные напряжения $\sigma_{ij}$, $i, j = 1, 2$ по формулам (2.8) и (2.6), соответственно. Введем двухмерные векторы перемещений и трансверсальных деформаций и напряжений сдвига

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T, \quad \varepsilon_s = (\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23})^T, \quad \sigma_s = (\sigma_{13}, \sigma_{23})^T \tag{4.1}$$

и дифференциальные операторы

$$\mathbf{p} = (p_1, q_2)^T, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_2 \\ 0 & p_2 & p_1 \end{pmatrix}^T \tag{4.2}$$

Матрицы $\mathbf{C}^{-1} = \{G_{ij}\}$ и $\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T = \{S_{ij}\}$, входящие в формулы (2.8), разобьем на блоки

$$\begin{gathered}\mathbf{C}^{-1} = \{G_{ij}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{g} \\ \mathbf{g}^T & c_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = (G_{13}, G_{23})^T, \quad c_3 = G_{33} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \{S_{ij}\} = (\mathbf{S}\mathbf{s}), \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \\ S_{31} & S_{32} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} S_{13} \\ S_{23} \\ S_{33} \end{pmatrix}\end{gathered} \tag{4.3}$$

Для моноклинного материала будет $\mathbf{g} = \mathbf{0}$, $\mathbf{S} = \mathbf{0}$.

Теперь соотношения (2.8) дают

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{S} \cdot \sigma_s + \mathbf{s}\sigma_{33} \\ \varepsilon_s &= \mathbf{G} \cdot \sigma_s + \mathbf{g}\sigma_{33} - \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} \\ \varepsilon_{33} &= \mathbf{g}^T \cdot \sigma_s + c_3\sigma_{33} - \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \tag{4.4}$$

и уравнения (3.4) принимают вид

$$
\begin{gathered}
\frac{dw}{dz} = \mu(\mathbf{g}^T \cdot \sigma_s + c_3\sigma_{33} - \mathbf{s}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) \\
\frac{d\mathbf{u}}{dz} = -\mu(\mathbf{p}w - \mathbf{G} \cdot \sigma_s - \mathbf{g}\sigma_{33} + \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) \\
\frac{d\sigma_s}{dz} = -\mu(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \sigma_s + \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{s}\sigma_{33} + \Lambda\rho(z)\mathbf{u}) \equiv g_1(x_1, x_2, z) \\
\frac{d\sigma_{33}}{dz} = -\mu(\mathbf{p}^T \cdot \sigma_s + \Lambda\rho(z)w) \equiv g_2(x_1, x_2, z)
\end{gathered}
\tag{4.5}
$$

При рассмотрении длинных волн и длинноволновых колебаний параметр $\mu = 2\pi h/L$ является малым. Предположим, что все модули упругости имеют один и тот же порядок, а неизвестные функции сохраняют свой порядок при дифференцировании по $x_1$, $x_2$ (в безразмерном виде $E_{ij} \sim 1$, $\{\mathbf{P}, \mathbf{p}\} \sim 1$).

Асимптотическое решение системы (4.5) строим методом итераций. При интегрировании первых двух уравнений вводим произвольные, не зависящие от $z$, функции $w^{(0)}(x_1, x_2)$ и $\mathbf{u}^{(0)}(x_1, x_2)$, которые находим из условия совместности двух последних уравнений:

$$
\int_0^1 g_k(x_1, x_2, z)dz = 0, \quad k = 1, 2 \tag{4.6}
$$

Соотношение порядков неизвестных функций в системах (3.4) и (4.5) для тангенциальных и изгибных колебаний оказывается различным, поэтому рассматриваем их по отдельности.

**5. Тангенциальные колебания и волны.** Для тангенциальных колебаний примем $\mathbf{u} \sim 1$. Тогда порядки остальных неизвестных в системе (4.5) будут

$$
\{\mathbf{u}, \varepsilon_t, \sigma_t, \Lambda\} \sim 1, \quad \{w, \varepsilon_n, \sigma_s,\} \sim \mu, \quad \sigma_{33} \sim \mu^2 \tag{5.1}
$$

При фиксированных волновых числах $q_1$, $q_2$ ищем двоякопериодическое решение системы (4.5) в виде

$$
\mathbf{\Phi}(x_1, x_2, z, \mu) = \mathbf{\Phi}^{(k)}(z, \mu)e^{i(q_1x_1 + q_2x_2)}, \quad \mathbf{\Phi} = \{\mathbf{u}, w, \sigma_s, \sigma_{33}\}, \quad \Lambda = \Lambda^{(k)}, \tag{5.2}
$$

где $k = 0, 1, \ldots$ — номер итерации

$$
\frac{d\mathbf{\Phi}^{(k+1)}}{dz} = \mathbf{N}(\mathbf{\Phi}^{(k)}) \tag{5.3}
$$

Здесь $\mathbf{N}$ — оператор правых частей системы (4.5).

Введем интегральный оператор $\mathbf{I}$ и оператор осреднения $\mathbf{I}_a$ по формулам

$$
\mathbf{I}(Z) = \int_0^z Z(z)dz, \quad \mathbf{I}_a(Z) = \int_0^1 Z(z)dz \tag{5.4}
$$

Положим в системе (4.5) $\mathbf{P} = i\mathbf{Q}$, $\mathbf{p} = i\mathbf{q}$ и перепишем ее в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{dw}{dz} = \mu(-i\mathbf{s}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{g}^T \cdot \sigma_s + c_3\sigma_{33}) \\
\frac{d\mathbf{u}}{dz} = \mu(-i\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u} - i\mathbf{q}w + \mathbf{G} \cdot \sigma_s + \mathbf{g}\sigma_{33}) \\
\frac{d\sigma_s}{dz} = \mu(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u} - i\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \sigma_s - i\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{s}\sigma_{33} - \Lambda\rho(z)\mathbf{u}) \\
\frac{d\sigma_{33}}{dz} = -\mu\left(i\mathbf{q}^T \cdot \sigma_s + \Lambda\rho(z)w\right)
\end{gathered}
\tag{5.5}
$$

В нулевом приближении имеем $\mathbf{u}^{(0)}(z) = \mathbf{u}_0$, а остальные неизвестные равны нулю. Условие совместности (4.6) третьего уравнения (5.5) дает

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(A^*) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_0 - \Lambda^{(0)}\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}, \tag{5.6}$$

откуда следует квадратное уравнение для $\Lambda^{(0)}$

$$|\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{A}^*) \cdot \mathbf{Q} - \Lambda^{(0)}\mathbf{E}| = 0, \tag{5.7}$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица второго порядка. Два корня $\Lambda_k^{(0)}$, $k = 1, 2$ уравнения (5.7) дают две тангенциальных волны (или формы колебаний) и им соответствуют амплитудные векторы $\mathbf{u}_{0k}$, $|\mathbf{u}_{0k}| = 1$, $k = 1, 2$. Последующие вычисления проводятся для каждого из них, причем индекс $k$ опускаем.

В первом приближении из уравнений (5.5), считая $\mathbf{u}_0$ и $\Lambda^{(0)}$ известными, находим

$$\begin{gathered}
w^{(1)} = i\mu\hat{w}^{(1)}, \quad \hat{w}_1^{(1)} = w_1 - \mathbf{I}(\mathbf{s}^T) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_0 \\
\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}_0 + \mu\mathbf{u}_1 + i\mu\hat{\mathbf{u}}^{(1)}, \quad \hat{\mathbf{u}}^{(1)} = -\mathbf{I}(\mathbf{S}^T) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_0 \\
\sigma_s^{(1)} = \mu\sigma_s^{(1)}, \quad \sigma_s^{(1)} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}(\mathbf{A}^*) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_0 - \Lambda^{(0)}\mathbf{I}(\rho)\mathbf{u}_0 \\
\sigma_{33}^{(1)} = 0
\end{gathered} \tag{5.8}$$

Условие совместности четвертого уравнения (5.5) дает уравнение для величины $w_1$:

$$\Lambda^{(0)}w_1 = (\Lambda^{(0)}\mathbf{I}_a(\rho\mathbf{I}(\mathbf{s}^T)) \cdot \mathbf{Q} + \Lambda^{(0)}\mathbf{I}_a\mathbf{I}(\rho)\mathbf{q}^T - \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a\mathbf{I}(\mathbf{A}^*) \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{u}_0 \tag{5.9}$$

Для повторных интегралов типа $\mathbf{I}_a(Y(z)\mathbf{I}(Z(z)))$ имеют место тождества:

$$\mathbf{I}_a(Y(z)\mathbf{I}(Z(z))) = \mathbf{I}_a(Y(z))\mathbf{I}_a(Z(z)) - \mathbf{I}_a(Z(z)\mathbf{I}(Y(z))), \quad \mathbf{I}_a\mathbf{I}(Z(z)) = \mathbf{I}_a((1-z)Z(z)) \tag{5.10}$$

В частности, если функция $Z(z) = Z$ постоянна, то $\mathbf{I}_a\mathbf{I}(Z) = Z/2$.

Функция $w^{(1)}(z)$ описывает в первом приближении распределение нормальных перемещений по толщине пластины. В частности, для однородной по толщине пластины будет $w^{(1)}(1/2) = 0$ (что может служить для контроля приведенных выше формул). Функция $\mathbf{u}^{(1)}(z)$ описывает в первом приближении изгиб нормального волокна. Для моноклинного материала ($\mathbf{S} = 0$) нормальное волокно остается прямым.

Величины $\mathbf{u}_1$ и $\Lambda^{(1)}$ определяются из условия совместности третьего уравнения (5.5) в первом приближении

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}^{(1)}) - i\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{S} \cdot \sigma_s^{(1)}) - \Lambda^{(1)}\mathbf{I}_a(\rho(z)\mathbf{u}^{(1)}) = 0 \tag{5.11}$$

С учетом (5.6) слагаемые порядка $\mu$ в уравнении (5.11) дают уравнение для вектора $\mathbf{u}_1$:

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(A^*) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1 - \Lambda^{(0)}\mathbf{u}_1 - \Lambda_1\mathbf{u}_0 + \mathbf{F}_1 = 0, \quad \Lambda^{(1)} = \Lambda^{(0)} + \mu\Lambda_1, \tag{5.12}$$

где

$$\begin{gathered}
F_1 = i(-\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{I}(\mathbf{S}^T) + \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}(\mathbf{A}^*)) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_0 + \\
+ \Lambda^{(0)}\mathbf{I}_a(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{S}\mathbf{I}(\rho) + \rho\mathbf{I}(\mathbf{S}^T) \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{u}_0
\end{gathered} \tag{5.13}$$

В силу (5.7) определитель системы (5.12) обращается в нуль, и из условия ее совместности

$$\Lambda_1 = \mathbf{u}_0^T \cdot \mathbf{F}_1 \tag{5.14}$$

находим величину $\Lambda_1$. Для моноклинного материала ($\mathbf{S} = \mathbf{0}$) отсюда сразу следует, что $\Lambda_1 = 0$. Однако и для анизотропного материала общего вида (при $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$) будет $\Lambda_1 = 0$, ибо имеет место равенство $\mathbf{u}_0^T \cdot \mathbf{F} = 0$, выполняющееся в силу соотношений (5.6) и (5.10). Кстати, мнимое значение $\Lambda_1$ противоречит установленной выше вещественности спектра.

Следовательно, для длинных ($\mu \ll 1$) плоских тангенциальных волн в анизотропных пластинах дисперсия проявляется лишь во втором приближении $\Lambda^{(2)} = \Lambda^{(0)} + \mu^2\Lambda_2$, $\Lambda_2 \neq 0$. Скорость распространения волны $v = \sqrt{\Lambda}$ в общем случае сильно зависит от направления ее распространения $\mathbf{n} = q_1\mathbf{i}_1 + q_2\mathbf{i}_2$, что следует из уравнения (5.7), и слабо зависит от ее длины $L = 2\pi h\mu^{-1}$. Для трансверсально изотропного материала скорость $v$ не зависит от направления $\mathbf{n}$. Для сравнения напомним (см. [30]), что в трехмерной анизотропной однородной упругой среде в каждом направлении без дисперсии могут распространяться три плоских волны, скорости которых зависят от направления.

Для вычисления $\Lambda_2$ построим второе приближение

$$\begin{gathered}\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}_0 + \mu\mathbf{u}_1 + \mu^2\mathbf{u}_2 + \mu^2\hat{\mathbf{u}}^{(2)}, \quad \hat{\mathbf{u}}^{(2)} = \mathbf{I}(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(1)}) + \mathbf{q}\mathbf{I}(\hat{w}^{(1)}) + \mathbf{I}(\mathbf{G} \cdot \sigma_s^{(1)}) \\ \sigma_s^{(2)} = i\mu^2\sigma_s^{(2)}, \quad \sigma_s^{(2)} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(1)}) - \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}(\mathbf{S} \cdot \sigma_s^{(1)}) - \Lambda^{(0)}\mathbf{I}(\rho\hat{\mathbf{u}}^{(1)}) \\ \sigma_{33}^{(2)} = i\mu^2\hat{\sigma}_{33}^{(2)}, \quad \hat{\sigma}_{33}^{(2)} = -\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{I}(\sigma_s^{(1)}) - \Lambda^{(0)}\mathbf{I}(\rho\hat{w}^{(1)})\end{gathered} \tag{5.15}$$

Теперь условие совместности третьего уравнения (5.5) во втором приближении имеет вид

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}^{(2)}) - i\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{S} \cdot \sigma_s^{(2)}) - i\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(\mathbf{s}\sigma_{33}^{(2)}) - (\Lambda^{(0)} + \mu^2\Lambda_2)\mathbf{I}_a(\rho\mathbf{u}^{(2)}) = 0 \tag{5.16}$$

Слагаемые порядка $\mu^2$ в уравнении (5.16) суть

$$(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{I}_a(A^*) \cdot \mathbf{Q} - \Lambda^{(0)}\mathbf{E}) \cdot \mathbf{u}_2 - \Lambda_2\mathbf{u}_0 + \mathbf{F}_2 = 0, \quad \Lambda^{(2)} = \Lambda^{(0)} + \mu^2\Lambda_2, \tag{5.17}$$

откуда, как и в (5.14), находим

$$\Lambda_2 = \mathbf{u}_0^T \cdot \mathbf{F}_2, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{I}_a(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{Q} \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(2)} + \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \sigma_s^{(2)} + \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{s} \cdot \hat{\sigma}_{33}^{(2)} - \Lambda^{(0)}\rho\hat{\mathbf{u}}^{(2)}) \tag{5.18}$$

Громоздкую величину $\mathbf{F}_2$ получаем в результате подстановок (5.15) и (5.8).

Для пластины из однородного изотропного материала корни уравнения (5.7) не зависят от направления распространения волны и равны

$$\Lambda_p^{(0)} = \frac{E}{(1-\nu^2)\rho}, \quad \Lambda_s^{(0)} = \frac{E}{2(1+\nu)\rho} \tag{5.19}$$

Им соответствуют волны растяжения и сдвига, а соответствующие собственные функции равны $(q_1, q_2)$ и $(q_2, -q_1)$. Скорость волны сдвига в пластине совпадает со скоростью плоской волны в однородном изотропном пространстве, а скорость продольной волны в пространстве больше и равна $v$, причем

$$v^2 = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho} = E_{11} = \frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}, \tag{5.20}$$

где $\lambda_0$, $\mu_0$ — параметры Ламе, $E$, $\nu$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Не трудно проверить, что $v^2 > \Lambda_p^{(0)}$ (за исключением случая $\nu = 0$).

Вычисление по формуле (5.18) дает поправку $\Lambda_2$ и

$$\Lambda_p = \Lambda_p^{(0)}\left(1 - \mu^2\frac{\nu^2}{12(1-\nu)^2} + O(\mu^4)\right), \quad \mu = \frac{2\pi h}{L}, \quad \Lambda_s = \Lambda_s^{(0)} \tag{5.21}$$

Иными словами, длинные волны растяжения (расширения) в пластине из однородного изотропного материала распространяются с малой дисперсией ($L$ – длина волны), а волны сдвига – без дисперсии (для них поправка $\Lambda_2 = 0$; и равенство $\Lambda_s = \Lambda_s^{(0)}$ является точным).

Для сравнения укажем, что первоначально была установлена малая дисперсия при распространении продольных волн в однородном изотропном цилиндрическом стержне [33, 34] (см. также [35]). В дальнейшем исследование было дополнено анализом дисперсионного уравнения для неоднородного аксиально-симметричного стержня [36].

**6. Изгибные колебания и волны.** Для изгибных колебаний примем $w \sim 1$. Тогда порядки остальных неизвестных функций в системе (4.5) будут:

$$w \sim 1, \quad \{u_i, \varepsilon_t, \varepsilon_n, \sigma_t\} \sim \mu, \quad \{\sigma_s, \Lambda\} \sim \mu^2, \quad \sigma_{33} \sim \mu^3 \tag{6.1}$$

Из оценки $\Lambda \sim \mu^2$ следует, что для длинных изгибных колебаний и волн (при $\mu \ll 1$) их частота и скорость распространения существенно меньше, чем для тангенциальных колебаний и волн.

В соответствии с оценками (6.1) проведем изменение масштаба неизвестных функций в системе (4.5), положив

$$\mathbf{u} = i\mu\hat{\mathbf{u}}, \quad \sigma_s = i\mu^2\sigma_s, \quad \sigma_{33} = \mu^3\hat{\sigma}_{33}, \quad \Lambda = \mu^2\hat{\Lambda} \tag{6.2}$$

Опуская значок ˆ, перепишем систему (4.5) в виде:

$$\begin{gathered}
\frac{dw}{dz} = \mu^2\mathbf{s}^T\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{u} + i\mu^3\mathbf{g}^T\cdot\sigma_s + \mu^4 c_3\sigma_{33}\\
\frac{d\mathbf{u}}{dz} = -\mathbf{q}w - i\mu\mathbf{S}^T\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{u} + \mu^2\mathbf{G}\cdot\sigma_s - i\mu^3\mathbf{g}\sigma_{33}\\
\frac{d\sigma_s}{dz} = \mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{A}^*\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{u} - i\mu\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{S}\cdot\sigma_s - \mu^2\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{s}\sigma_{33} - \mu^2\Lambda\rho(z)\mathbf{u}\\
\frac{d\sigma_{33}}{dz} = \mathbf{q}^T\cdot\sigma_s - \Lambda\rho(z)w\\
\sigma_{i3}(0) = \sigma_{i3}(1) = 0, \quad i = 1, 2, 3
\end{gathered} \tag{6.3}$$

Краевая задача (6.3) ранее неоднократно анализировалась [18, 19, 26, 27]. Приведем некоторые результаты. С учетом характера зависимости правых частей от малого параметра $\mu$ будем искать ее решение в виде рядов:

$$\begin{gathered}
\Phi(z,\mu) = \Phi^{(0)}(z) + \mu\Phi^{(1)}(z) + \mu^2\Phi^{(2)}(z) + \ldots, \quad \Phi = \{w, \mathbf{u}, \sigma_s, \sigma_{33}\}\\
\Lambda = \Lambda_0 + \mu\Lambda_1 + \mu^2\Lambda_2 + \ldots
\end{gathered} \tag{6.4}$$

В системе (6.3) все основные неизвестные функции имеют порядок единицы. Система (6.3) является точной и удобна для построения решения методом итераций. Ниже будет построена модель второго порядка точности по отношению к малому параметру $\mu$. Поэтому слагаемые с множителями $\mu^3$ и $\mu^4$ в первых двух уравнениях (6.3) могут быть опущены.

Нулевое приближение получаем, полагая $\mu = 0$ в системе (6.3). Находим последовательно (см. также [18, 19])

$$w^{(0)} = w_0 = \text{const}, \quad \mathbf{u}^{(0)}(z) = \mathbf{u}_0 - \mathbf{q}(z-a)w_0, \tag{6.5}$$

где $\mathbf{u}_0$ — перемещение слоя $z = a$. Для симметричной по толщине пластины при $a = 1/2$ будет $\mathbf{u}_0 = 0$. Это же равенство имеет место, если у пластины существует нейтральный слой $z = a$. В частности, нейтральный слой существует для пластины из неоднородного по толщине трансверсально изотропного материала [18]. В общем случае вектор $\mathbf{u}_0$ находим из условия совместности третьего уравнения (6.3) при $\mu = 0$:

$$\mathbf{I}_a(\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{u}^{(0)}) = \mathbf{I}_a(\mathbf{L}_0) \cdot \mathbf{u}_0 - \mathbf{I}_a((z-a)\mathbf{L}_0) \cdot \mathbf{q}w_0 = 0, \quad \mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(z) = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{A}_*(z) \cdot \mathbf{Q} \tag{6.6}$$

Далее находим

$$\sigma_s^{(0)}(z) = \mathbf{I}(\mathbf{L}_0(z) \cdot \mathbf{u}^{(0)}), \quad \sigma_{33}^{(0)}(z) = \mathbf{II}(\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{L}_0(z) \cdot \mathbf{u}^{(0)}) - \Lambda_0 \mathbf{I}(\rho(z))w_0 \tag{6.7}$$

Условие совместности четвертого уравнения (6.3) дает $\mathbf{I}_a\mathbf{I}(\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{L}_0(z) \cdot \mathbf{u}^{(0)}) - \Lambda_0 w^{(0)} = 0$, и после преобразований получаем систему для определения $\Lambda_0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_0 \cdot \mathbf{u}_0 - \mathbf{N}_1 w_0 &= 0 \\ -\mathbf{N}_1^T \cdot \mathbf{u}_0 + (Q_2 - \Lambda_0)w_0 &= 0, \end{aligned} \tag{6.8}$$

в которой

$$\tilde{\mathbf{L}}_0 = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{M}_0 \cdot \mathbf{Q}, \quad \mathbf{N}_1 = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}, \quad Q_2 = \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{q}, \tag{6.9}$$

а $\mathbf{M}_k = \mathbf{I}_a((z-a)^k \mathbf{A}_*(z))$, $k = 0, 1, 2,$ — моменты нулевого, первого и второго порядков матрицы $\mathbf{A}_*$ тангенциальных упругих модулей. Заметим, что нулевое приближение зависит только от них. Развернутые выражения операторов в (6.9) приведены в [25]. В частности,

$$Q_2 = a_{11}q_1^4 + a_{13}q_1^3 q_2 + 2(a_{12} + 2a_{33})q_1^2 q_2^2 + 4a_{23}q_1 q_2^3 + a_{22}q_2^4, \tag{6.10}$$

где $a_{ij}$ — элементы матрицы $\mathbf{M}_2 = \mathbf{I}_a((z-a)^2 \mathbf{A}_*(z))$.

Для симметричной по толщине пластины и для пластины из трансверсально изотропного материала $\mathbf{u}_0 = 0$ и $\Lambda_0 = Q_2$. В общем случае $\Lambda_0 = Q_2 - \mathbf{N}_1^T \cdot \tilde{\mathbf{L}}_0^T \cdot \mathbf{N}_1$.

Нулевое приближение в силу формул (6.5) соответствует гипотезам КЛ о прямой недеформируемой нормали. Некоторое обобщение по сравнению с однородным изотропным материалом заключается в том, что дополнительно учитывается зависимость нормальных напряжений $\sigma_{11}$ и $\sigma_{22}$ от деформаций сдвига $\varepsilon_{12}$ и зависимость напряжений сдвига $\sigma_{12}$ от нормальных деформаций $\varepsilon_{11}$ и $\varepsilon_{22}$.

Из нулевого приближения следует, что скорость распространения изгибной волны $v(\mu, q_1, q_2) = \mu\sqrt{\Lambda}$ по анизотропной пластине зависит как от ее длины $L$, так и от направления распространения, определяемого вектором $\mathbf{n} = (q_1, q_2)$, $|\mathbf{n}| = 1$ (см. формулу (6.10), а также работу [32], в которой приведен пример). В нулевом приближении скорость изгибной волны $v$ обратно пропорциональна ее длине $L$, ибо $\mu = 2\pi/L$.

Приближенные решения (6.4) сравнивались с точными решениями, полученными при численном интегрировании системы (6.3). Расчеты показали [18, 19], что если все элементы матрицы упругих модулей $\mathbf{E}$ (см. (2.3)) имеют один порядок, то нулевое приближение имеет удовлетворительную точность. Если же элементы матрицы $\mathbf{C}$, стоящей в формулах (4.3) в знаменателе, малы, точность нулевого приближения недостаточна, что стимулирует построение старших приближений. Как правило, поправки старших приближений связаны с учетом влияния поперечного сдвига, которое не учитывается нулевым приближением. В частности, анализ колебаний многослойных пластин с чередующимися мягкими и жесткими слоями приводит к необходимости рассмотрения старших приближений.

**7. Старшие приближения.** Первое приближение вносит поправку порядка $\mu$ в нулевое приближение. Отметим, что для моноклинного материала (при $\mathbf{S} = \mathbf{0}$) в системе (6.3) слагаемые порядка $\mu$ исчезают и можно сразу переходить ко второму приближению. Многослойную пластину, состоящую из системы ортотропных слоев с произвольно ориентированными направлениями ортотропии, можно рассматривать как моноклинную пластину с кусочно-постоянными модулями упругости [9, 23].

Построим первое приближение при $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$. Такую анизотропию будем называть наклонной, ибо она получается у композитной пластины, состоящей из ортотропной матрицы, подкрепленной системой нитей, наклоненных к плоскости пластины [24]. Слагаемые порядка $\mu$ в системе (6.3) дают:

$$\begin{gathered} w^{(1)} = 0 \\ \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}_1 - i\mathbf{I}(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}^{(0)}) \\ \sigma_s^{(1)} = \mathbf{I}(\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{u}^{(1)}) - i\mathbf{I}(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \sigma_s^{(0)}) \\ \sigma_{33}^{(1)} = \mathbf{I}(\mathbf{q}^T \cdot \sigma_s^{(1)}) - \Lambda_1 \mathbf{I}(\rho) w_0, \end{gathered} \tag{7.1}$$

где $\mathbf{S}_Q^T = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{Q}$, вектор $\mathbf{u}_1$ и величина $\Lambda_1$ определяются из условий совместности третьего и четвертого уравнений (7.1). Как и для тангенциальных колебаний и волн, имеем $\Lambda_1 = 0$, что следует из вещественности величины $\Lambda$, а также подтверждается вычислениями. Следовательно, для изгибных колебаний и волн величина $\Lambda$ в исходных обозначениях (см.(6.2)) представима в виде:

$$\Lambda = \mu^2(\Lambda_0 + \mu^2 \Lambda_2 + O(\mu^4)) \tag{7.2}$$

При построении второго приближения в рядах (6.4) ограничимся вычислением величины $\Lambda_2$. Последовательно находим

$$\begin{gathered} w^{(2)} = \mathbf{I}(\mathbf{s}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}^{(0)}) \\ \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{I}(\mathbf{q} w^{(2)}) - i\mathbf{I}(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}^{(1)}) + \mathbf{I}(\mathbf{G} \cdot \sigma_s^{(0)}) \\ \sigma_s^{(2)} = \mathbf{I}(\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{u}^{(2)}) - i\mathbf{I}(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \sigma_s^{(1)}) - \mathbf{I}(Q^T \cdot \mathbf{s}\sigma_{33}^{(0)}) - \Lambda_0 \mathbf{I}(\rho \mathbf{u}^{(0)}) \\ \sigma_{33}^{(2)} = \mathbf{I}(\mathbf{q}^T \cdot \sigma_s^{(2)}) - \Lambda_2 \mathbf{I}(\rho) w_0 \end{gathered} \tag{7.3}$$

Теперь граничное условие $\sigma_{33}^{(2)}(1) = 0$ дает ($\mathbf{I}_a(\rho) = 1$)

$$\Lambda_2 = F/w_0, \quad F = \mathbf{I}_a(\mathbf{q}^T \cdot \sigma_s^{(2)}) \tag{7.4}$$

Чтобы воспользоваться формулой (7.4), представим величину $F$ в виде $F = F_1 w_0$ (тогда будет $\Lambda_2 = F_1$). Для вычисления величины $F_1$ последовательно используем формулы (6.5), (6.7), (7.1) и (7.3) и выражаем неизвестные функции через ранее найденные вплоть до вычисления функции $\sigma_s^{(2)}$, входящей в уравнение (7.4). При интегрировании второго уравнения (6.3) вводятся постоянные векторы $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, которые определяются из условия совместности третьего уравнения (6.3) в соответствующем приближении:

$$\begin{gathered} \tilde{\mathbf{L}}_0 \cdot \mathbf{u}_0 - \mathbf{N}_1 w_0 = 0 \\ \tilde{\mathbf{L}}_0 \cdot \mathbf{u}_1 - i\mathbf{I}_a(\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{I}(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}^{(0)}) - i\mathbf{I}_a(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \sigma_s^{(0)}) = 0 \\ \tilde{\mathbf{L}}_0 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{I}_a(\mathbf{L}_0 \cdot [-\mathbf{I}(\mathbf{q} w^{(2)}) - i\mathbf{I}(\mathbf{S}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}^{(1)}) + \mathbf{I}(\mathbf{G} \cdot \sigma_s^{(0)})]) - \\ - i\mathbf{I}_a(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \sigma_s^{(1)}) - \mathbf{I}_a(Q^T \cdot \mathbf{s}\sigma_{33}^{(0)}) - \Lambda_0 \mathbf{I}_a(\rho \mathbf{u}^{(0)}) = 0 \end{gathered} \tag{7.5}$$

Развернутая запись формулы (7.4) весьма громоздка. В случае переменных по $z$ модулей упругости для определения коэффициентов нужно вычислять повторные интегралы. Для моноклинного материала формула (7.4) упрощается. Упрощения также имеют место, если у пластины при изгибе имеется нейтральный слой.

**8. Изгибные колебания и волны в многослойной пластине.** Рассмотрим многослойную пластину с чередующимися мягкими и жесткими слоями. Наиболее просто решается задача для трансверсально изотропного материала. В этом случае система уравнений (6.3) шестого порядка после введения вспомогательных неизвестных функций [18, 19]

$$u = q_1u_1 + q_2u_2, \quad v = q_1u_2 - q_2u_1, \quad \sigma = q_1\sigma_{13} + q_2\sigma_{23}, \quad \tau = q_1\sigma_{23} - q_2\sigma_{13} \tag{8.1}$$

приводится к системе четвертого порядка для неизвестных функций $u, w, \sigma, \sigma_{33}$:

$$\begin{gathered}\frac{dw}{dz} = -\mu^2 c_\nu(z)u + \mu^4 c_3(z)\sigma_{33}, \quad \frac{d\sigma}{dz} = E_0(z)u + \mu^2 c_\nu(z)\sigma_{33} - \mu^2\lambda\hat{\rho}(z)u \\ \frac{du}{dz} = w + \mu^2 c_g(z)\sigma, \quad \frac{d\sigma_{33}}{dz} = -\sigma - \lambda\hat{\rho}(z)w \\ \sigma = \sigma_{33} = 0, \quad z = 0,1\end{gathered} \tag{8.2}$$

Аналогичной системой описывается уравнение изгибных колебаний неоднородной по толщине балки-полоски из трансверсально изотропного материала [18].

Асимптотическое интегрирование, подобное изложенному в пп. 6, 7, дает формулу для параметра частоты $\Lambda$:

$$\Lambda = \frac{\rho_*\omega^2}{E_*q^2} = D\mu^2(1 - g\mu^2 + O(\mu^4)), \tag{8.3}$$

где величина $g = A_g + A_\nu + J + J_\nu$ учитывает эффекты второго порядка, причем слагаемые $A_g$, $A_\nu$, $J$, $J_\nu$ учитывают, соответственно, влияние поперечного сдвига, обжатие нормального волокна, инерцию его вращательного движения и инерцию, связанную с растяжением нормального волокна. В качестве характерного модуля упругости принята величина $E_* = \mathbf{I}_a(E_0(z))$, $E_0 = E/(1-\nu^2)$, где $E$, $\nu$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона. В формуле (8.3)

$$D = \mathbf{I}_a((z-a)^2E_0(z)), \quad A_g = \frac{1}{D}\mathbf{I}_a\left(\frac{\varphi^2(z)}{G_{13}(z)}\right), \quad \varphi(z) = \mathbf{I}((z-a)E_0(z)), \tag{8.4}$$

где $D$ — изгибная жесткость эквивалентной однородной пластины, $a$ — координата нейтрального слоя (который при изгибе неоднородных трансверсально изотропных пластин всегда существует), $G_{13}$ — модуль упругости поперечного сдвига. Использование формулы (8.3) для многослойных пластин с чередующимися жесткими и мягкими слоями показало [18, 19], что если слои незначительно различаются по жесткости, то все слагаемые второго порядка в сумме $g$ имеют одинаковый порядок, а сама формула (8.3) имеет высокую точность. Если же отношение $\eta$ модулей упругости слоев растет, то сдвиговой параметр $A_g$ также растет (ибо в знаменателе интеграла для $A_g$ стоит величина $G_{13}$, которая мала для мягких слоев), а остальные параметры второго порядка малости практически не меняются и ими можно пренебречь, т.е. из эффектов второго порядка малости можно учитывать только поперечный сдвиг и считать $g = A_g$. В результате приходим к эквивалентной однослойной пластине Тимошенко—Рейсснера. Расчеты [18, 19] показали, что при $\eta \le 1000$ погрешность этой модели имеет порядок 1%.

Формула (8.3) становится неприменимой при $g \geq 1$. Полученная ранее формула [19]

$$\Lambda = D\mu^2(1 + g\mu^2)^{-1}, \tag{8.5}$$

эквивалентная по точности формуле (8.3) при малых $g$ и достаточно точная при $g \sim 1$.

Как следует из (8.3), (8.5), для трансверсально изотропной пластины частотный параметр $\Lambda$ не зависит от волновых чисел $q_1$ и $q_2$ по отдельности, а зависит только от величины $q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$. Скорость распространения изгибной волны зависит от ее длины, но не зависит от направления распространения.

Ранее (см. [18, 19] и др.) для оценки погрешности асимптотических формул использовалось численное интегрирование уравнений (8.2), (6.3). При этом количество и расположение слоев является несущественным. Для трехслойной симметричной по толщине балки [37] построено точное аналитическое (весьма громоздкое) дисперсионное уравнение. Был дан исчерпывающий анализ дисперсионного уравнения без предположения о длинноволновом характере волн [38]. Этот анализ опирается на предыдущие исследования [37] и на упрощенные модели при частных предположениях о параметрах задачи.

Рассмотрим многослойную пластину симметричного по толщине строения с изотропными мягкими слоями и жесткими слоями из моноклинного материала. Из эффектов второго порядка малости будем учитывать только влияние поперечного сдвига, пренебрегая растяжением нормального волокна и силами инерции второго порядка малости. Тогда формула (8.4) для сдвигового параметра $A_g$ допускает обобщение

$$A_g = \frac{1}{D}\mathbf{I}_a(\mathbf{b}^T(z)\cdot\mathbf{G}(z)\cdot\mathbf{b}(z)), \quad \mathbf{b}(z) = \mathbf{I}((z-a)\mathbf{L}_0(z))\cdot\mathbf{q}, \tag{8.6}$$

где $D = Q_2$ — изгибная жесткость пластины, вычисляемая по формуле (6.10), $a = 1/2$ — координата нейтрального слоя, $\mathbf{G}$ — матрица упругих податливостей на поперечный сдвиг (с большими элементами для мягких слоев). Как главный член $\mu^2 Q_2$ параметра частоты, так и поправка $A_g$ зависят от волновых чисел $q_1$ и $q_2$.

Формула (8.3) для такой пластины допускает погрешность того же порядка, что и для пластины из трансверсально изотропного материала. Это обстоятельство было проверено [23] путем сравнения с точным решением трехмерной задачи. Рассмотрение более общего случая (несимметричной по толщине пластины либо пластины с наклонной анизотропией) приводит к существенно более громоздким формулам и здесь не приводится.

Заметим, что для многослойной пластины упругие модули и толщина являются кусочно-постоянными функциями, однако это обстоятельство не является препятствием при вычислении интегралов в (7.3), (8.3) и др. и при численном интегрировании системы (6.3).

**Обсуждение.** Исходя из трехмерных динамических уравнений теории упругости методом асимптотического интегрирования получены двухмерные модели для описания длинноволновых колебаний и длинных волн в тонкой анизотропной неоднородной по толщине пластине со свободными лицевыми плоскостями (предполагается, что упругие модули и плотность не зависят от тангенциальных координат, но могут зависеть от координаты в направлении нормали к пластине). В каждом из тангенциальных направлений длинноволновые модели описывают три плоских гармонических по тангенциальным направлениям волны: медленную (низкочастотную) изгибную волну и две тангенциальных волны. Для изгибной волны (подобно волнам в балке Бернулли—Эйлера) характерна сильная дисперсия (сильная зависимость скорости распространения волны или частоты колебаний от длины волны). Для тангенциальных волн характерна слабая дисперсия, убывающая пропорционально квадрату отношения $h/L$ (для продольных волн в круглом стержне слабая дисперсия была впервые установлена в [33, 34]). Для сравнения укажем, что в однородном анизотропном линейно упругом пространстве в каждом направлении могут распространяться без дисперсии три плоских (не обязательно гармонических) волны, скорости этих волн зависят от направления распространения (в изотропном пространстве — это продольная волна сжатия и две поперечных волны сдвига).

Данная статья в некотором смысле является дополнением к монографии [30], в которой рассматривается асимптотика коротких волн в трехмерном анизотропном упругом теле. Рассмотрены длинные волны в пластине со свободными лицевыми плоскостями, при этом предполагается, что деформации охватывают всю толщину пластины. В результате волны Релея, локализующиеся вблизи свободной поверхности, и волны Стоунли, локализующиеся вблизи плоскости раздела слоев в многослойной пластине, не описываются длинноволновой асимптотикой и хорошо описываются коротковолновой асимптотикой [30]. Что касается волны Лява для пластины, лежащей на упругом или жидком полупространстве, то для ее исследования вполне может быть использована и длинноволновая асимптотика. Для этого на одной из лицевых плоскостей пластины следует задать условия контакта с полупространством.

Обращаясь к задачам свободных колебаний, отметим, что для тангенциальных колебаний найденное выше при учете эффектов второго порядка малости уточнение спектра мало и не является существенным для приложений. Для изгибных колебаний неоднородных по толщине пластин (особенно для многослойных пластин с чередующимися мягкими и жесткими слоями) указанное уточнение весьма существенно. Для многослойных пластин из трансверсально изотропного материала возможно введение эквивалентной однородной пластины, и влияние эффектов второго порядка изучено достаточно полно [13, 16–21, 38]. В меньшей степени исследованы колебания ортотропных и моноклинных пластин [9, 22, 23], и практически отсутствуют численные результаты для анизотропных пластин с наклонной анизотропией [24]. Хотя общие формулы второго порядка точности здесь приведены, но они слишком громоздки. Желательно построить более простые модели для описания эффектов, связанных с наклонной анизотропией.

В работе рассмотрены свободные колебания и волны в бесконечной пластине. Исследование колебаний анизотропной неоднородной пластины конечных размеров (например, прямоугольной пластины) существенно сложнее, ибо гармоническое решение, как правило, недостаточно и приходится обращаться к интегрированию громоздкой системы дифференциальных уравнений (см. [26, 27]). Некоторые результаты были получены для частных вариантов граничных условий [9, 19, 21]. Как правило разделение переменных оказывается невозможным и трудности построения решений можно преодолеть, прибегая к вариационной постановке задачи [39–41].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 18-01-00884а, 19-01-00208а, 20-51-52001 МНТ-а.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kirchhoff G.* Vorlesungen über Matematische Physik. Mechanik. Leipzig: Teubner, 1876. 466 p.
2. *Love A.E.H.* A Treatise on the Mathematical Theory Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927.
3. *Timoshenko S.P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars // Philos. Mag. 1921. V. 41. Ser. 6. P. 744–746.
4. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // Trans. ASME, J. Appl. Mech. 1945. V. 12. P. 69–77.
5. *Уфлянд Я.С.* Распространение волн изгибных колебаний в стержнях и пластинах // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 3. С. 287–300.
6. *Mindlin R.D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // ASME. J. Appl. Mech. 1951. V. 18. P. 31–38.

7. *Векуа И.Н.* О методе расчета призматических оболочек // Тр. Тбил. мат. инст. 1955. Т. 21. С. 191–259.
8. *Родионова В.А., Титаев Б.Ф., Черных К.Ф.* Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. Изд. С.-Петерб. ун-та, СПб. 1996.
9. *Reddy J.N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Boca Raton: CRC Press, 2003. 858 p.
10. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
11. *Аголовян Л.А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
12. *Vetukov Y., Kuzin A., Krommer M.* Asymptotic splitting of the three-dimensional problem of elasticity for non-homogeneous piezoelectric plates // Int. J. Solids & Struct. 2011. V. 40. P. 12–23.
13. *Kienzler R., Shneider P.* Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second order approximation // Shell Struct.: Theory & Appl. Proc. 10th SSTA 2013 Conf. 2014. V. 3. P. 109–112.
14. *Schneider P., Kienzler R.* A Reissner-type plate theory for monoclinic material derived by extending the uniform-approximation technique by orthogonal tensor decompositions of nth-order gradients // Meccanica. 2017. V. 52. P. 2143–2167.
15. *Товстик П.Е.* Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2007. № 3. С. 49–54.
16. *Товстик П.Е., Товстик Т.П.* Уравнение изгиба тонкой пластины второго порядка точности // Докл. РАН. 2014. Т. 457. № 6. С. 660–663.
17. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П.* Обобщенная модель Тимошенко–Рейсснера сильно неоднородной по толщине пластины // Доклл. РАН. 2016. Т. 469. № 5. С. 562–566.
18. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Generalized Timoshenko–Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction // ZAMM. 2017. V. 97. № 3. P. 296–308.
19. *Tovstik P., Tovstik T.* An elastic plate bending equation of second-order accuracy // Acta Mech. 2017. V. 228. № 10. P. 3403–3419.
20. *Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П.* Континуальная модель многослойной нанопластины // Докл. РАН. 2016. Т. 471. № 3. С. 294–298.
21. *Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Free vibrations of a transversely isotropic plate with application to a multilayered nano-plate // Mech. Mater. & Technol. Springer. Intern. Publ. AG, Cham Adv. Struct. Mater. 2017. V. 46. P. 349–362.
22. *Морозов Н.Ф., Беляев А.К., Товстик П.Е., Товстик Т.П.* Двухмерные уравнения второго порядка точности для многослойной пластины с ортотропными слоями // Докл. РАН. 2018. Т. 483. № 1. С. 37–42.
23. *Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Two-dimensional linear model of multilayered anisotropic plate // Acta Mech. 2019. V. 230. P. 2891–2904.
24. *Товстик П.Е., Товстик Т.П.* Двухмерные модели пластин из анизотропного материала // Тр. семинара “Компьютерные методы в механике сплошной среды”. Вып. 3. СПб. Изд. С.-Петерб. ун-та. 2008. С. 4–16.
25. *Товстик П.Е., Товстик Т.П.* Двухмерная модель пластины из анизотропного неоднородного материала // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 2. С. 32–45.
26. *Товстик П.Е.* Двухмерная модель второго порядка точности для анизотропной пластины // Вестн. СПбГУ. Мат. Мех. Астрон. 2019. Т. 6(64). № 1. С. 157–169.
27. *Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P., Zelinskaya A.V.* Two-dimensional model of plate made of material with general anisotropy // В кн.: Recent Developments in the Theory of Shells. Cham: Springer, 2019. P. 91–108.
28. *Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V.* Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San Diego: Acad. Press, 1998. 226 p.
29. *Михасев Г.И., Товстик П.Е.* Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. М.: Физматлит, 2009. 292 с.
30. *Бабич В.М., Киселев В.П.* Упругие волны. Высокочастотная теория. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2014. 320 с.
31. *Mikhasev G.I., Tovstik P.E.* Localized Dynamics of Thin-Walled Shells. Boca-Raton: CRC Press, 2020. 350 p.

32. *Беляев А.К., Зелинская А.В., Иванов Д.Н., Морозов Н.Ф., Наумова Н.В., Товстик П.Е., Товстик Т.П.* Приближенная теория колебаний многослойных анизотропных пластин // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инфор. 2018. Т. 18. № 4. С. 397–411.
33. *Pochhammer L.* Uber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten Kleiner Schwingungen in Einem Unbegrenzten Isotropen Kreiscylinder // J. Reine & Angewandte Math. 1876. V. 81. P. 324–336.
34. *Chree C.* Longitudinal Vibrations of a Circular Bar // Quart. J. Pure & Appl. Math. 1886. V. 21. P. 287–291.
35. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // Arch. Appl. Mech. 2018. V. 88. № 8. P. 1385–1394.
36. *Ильяшенко А.В.* Продольные волны Похгаммера–Кри: аномальная поляризация // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 3. С. 136–146.
37. *Lee P., Chang N.* Harmonic waves in elastic sandwich plates // J. Elast. 1979. V. 9. № 1. P. 51–69.
38. *Kaplunov J.D., Prikazchikov D.A., Prikazchikova L.A.* Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate // Int. J. Solids & Struct. 2017. V. 113–114. P. 169–179.
39. *Паршина Л.В., Рябов В.М., Ярцев Б.А.* Энергия диссипации в неоднородных композитных структурах. 1. Постановка задачи // Вестн. СПбГУ. Мат. Мех. Астрон. 2018. Т. 5 (63). № 2. С. 300–309.
40. *Паршина Л.В., Рябов В.М., Ярцев Б.А.* Энергия диссипации в неоднородных композитных структурах. 2. Метод решения. // Вестн. СПбГУ. Мат. Мех. Астрон. 2018. Т. 5 (63). № 4. С. 678–688.
41. *Паршина Л.В., Рябов В.М., Ярцев Б.А.* Энергия диссипации в неоднородных композитных структурах. 3. Численный эксперимент // Вестн. СПбГУ. Мат. Мех. Астрон. 2019. Т. 6 (64). № 1. С. 144–156.

## Long-Wave Vibrations and Long Waves in an Anisotropic Plate

**N. F. Morozov[a,b,#], P. E. Tovstik[a,b,##], and T. P. Tovstik[b,###]**

[a] *St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia*
[b] *Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, St. Petersburg, Russia*
[#]*e-mail: morozov@nm1016.spb.edu*
[##]*e-mail: peter.tovstik@mail.ru*
[###]*e-mail: tovstik_t@mail.ru*

Free vibrations and plane waves are investigated in a linear approximation in a thin elastic anisotropic infinite plate of constant thickness. A general anisotropy described by 21 elastic moduli is considered. It is assumed that the moduli and the density do not depend on the tangential co-ordinates, and they may depend on the thickness co-ordinate. Multi-layered and functionally graded plates are not excluded from consideration. An asymptotic expansion in power series of a small thickness parameter, $\mu$, of a harmonic in tangential directions solution of 3D equations of the theory of elasticity is built in assumption that the length of wave essentially exceeds the plate thickness. For the fixed values of the wave numbers there exist only three long-wave solutions: one bending low-frequency solution, and two tangential solutions. The dispersion equations are built with the second order accuracy in $\mu$. For the bending solutions the strong dependence of the frequency on the length of wave is typical, and the tangential waves propagate with the small dispersion. Partial cases of anisotropy are considered.

*Keywords:* anisotropic heterogeneous plate, harmonic vibrations, plane waves, dispersion equation

## REFERENCES

*1. Kirchhoff G.* Vorlesungen über Matematische Physik. Mechanik. Leipzig: Teubner, 1876. 466 p.
2. *Love A.E.H.* A Treatise on the Mathematical Theory Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927.

3. *Timoshenko S.P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars // Philos. Mag., 1921. vol. 41, Ser. 6, pp. 744–746.
4. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1945, vol. 12, pp. 69–77.
5. *Ufland Ya.S.* Waves propagation at bending vibrations of rods and plates // JAMM, 1948, vol. 12, no. 3, pp. 287–300. (in Russian)
6. *Mindlin R.D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // ASME J. Appl. Mech., 1951, vol. 18, pp. 31–38.
7. *Vekua I.N.* On the method of prismatic shells design // Tr. Tbil. Math. Inst., 1955, vol. 21, pp. 191–259. (in Russian)
8. *Chernykh K.F., Rodionova V.A., Titaev B.F.* Applied theory of anisotropic plates and shells. St.Petersburg: Univ. Press, 1996. (in Russian)
9. *Reddy J.N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Boca Raton: CRC Press, 2003. 858 p.
10. *Goldenweizer A.L.* Theory of Elastic Thin Shells. N.Y.: Pergamon Press, 1961. 680 p.
11. *Agolovyan L.A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Moscow: Nauka, 1997. (in Russian)
12. *Vetukov Y., Kuzin A., Krommer M.* Asymptotic splitting of the three-dimensional problem of elasticity for non-homogeneous piezoelectric plates // Int. J. Solids & Struct, 2011, vol. 40, pp. 12–23.
13. *Kienzler R., Shneider P.* Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second order approximation // Shell Struct.: Theory & Appl. Proc. 10th SSTA 2013 Conf., 2014, vol. 3, pp. 109–112.
14. *Schneider P., Kienzler R.* A Reissner-type plate theory for monoclinic material derived by extending the uniform-approximation technique by orthogonal tensor decompositions of nth-order gradients // Meccanica, 2017, vol. 52, pp. 2143–2167.
15. *Tovstik P.E.* On the asymptotic character of approximate models of beams, plates and shells // Vestn. St. Petersburg Univ. Math., Mech., Astron., 2007, no. 3, pp. 49–54.
16. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* A thin-plate bending equation of second-order accuracy // Dokl. Phys., 2014, vol. 59, no. 8, pp. 389–392.
17. *Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P.* The Timoshenko–Reissner generalized model of a plate highly nonuniform in thickness // Dokl. Phys., 2016, vol. 61, pp. 394–398.
18. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Generalized Timoshenko–Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction // ZAMM, 2017, vol. 97, no. 3, pp. 296–308.
19. *Tovstik P., Tovstik T.* An elastic plate bending equation of second-order accuracy // Acta Mech., 2017, vol. 228, no. 10, pp. 3403–3419.
20. *Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Continuum model of a multi-layered nano-plate // Dokl. Phys., 2016, vol. 61, no. 11, pp. 567–570.
21. *Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Free vibrations of a transversely isotropic plate with application to a multilayered nano-plate // Mech. Mater. & Technol. Springer. Int. Publ. AG. Cham. Adv. Struct. Mater., 2017, vol. 46, pp. 349–362.
22. *Morozov N.F., Belyaev A.K., Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Two-dimensional equations of second order accuracy for a multilayered plate with orthotropic layers // Dokl. Phys., 2018, vol. 63, no. 11, pp. 471–475.
23. *Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Two-dimensional linear model of multilayered anisotropic plate // Acta Mech, 2019, vol. 230, pp. 2891–2904.
24. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Two-dimensional models of plates made of an anisotropic material // Comput. Meth. in Mech. Contin. Media. St. Petersburg Univ, 2008, vol. 3, pp. 4–16. (in Russian)
25. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Two-dimensional model of a plate made of an anisotropic inhomogeneous material // Mech. Solids, 2017, vol. 52, no. 2, pp. 144–154.
26. *Tovstik P.E.* Two-dimensional model of second-order accuracy for an anisotropic plate // Vestn. St. Petersburg Univ. Math., Mech., Astron., 2019, vol. 6(64), no. 1, pp. 157–169.
27. *Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P., Zelinskaya A.V.* Two-dimensional model of plate made of material with general anisotropy // In: Recent Developments in the Theory of Shells. Cham: Springer, 2019. pp. 91–108.

28. *Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V.* Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San Diego: Acad. Press, 1998. 226 p.
29. *Mikhasev G.I., Tovstik P.E.* Localized Vibrations and Waves in Thin Shells. Asymptotic methods. Moscow: Fizmatlit, 2009. 292 p. (in Russian)
30. *Babich V.M., Kiselev A.P.* Elastic Waves. High-Frequency Theory. Boca Raton: CRC Press, 2020. 286 p.
31. *Mikhasev G.I., Tovstik P.E.* Localized Dynamics of Thin-Walled Shells. Boca-Raton: CRC Press, 2020. 350 p.
32. *Belyaev A.K., Zelinskaya A.V., Ivanov D.N., Morozov N.F., Naumova N.V., Tovstik P.E., Tovstik T.P.* Approximate theory of a laminated anisotropic plate vibrations // Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2018, vol. 18, no. 4, pp. 397–411. (in Russian)
33. *Pochhammer L.* Uber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten Kleiner Schwingungen in Einem Unbegrenzten Isotropen Kreiscylinder // J. Reine & Angewandte Math., 1976, vol. 81, pp. 324–336.
34. *Chree C.* Longitudinal vibrations of a circular bar // Quart. J. Pure & Appl. Math., 1886, vol. 21, pp. 287–291.
35. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // Arch. Appl. Mech., 2018, vol. 88, no. 8, pp. 1385–1394.
36. *Ilyashenko A.V.* Longitudinal Pochhammer Chree waves: anormal polarization // Mech. Solids, 2019, no. 3, pp. 136–146.
37. *Lee P., Chang N.* Harmonic waves in elastic sandwich plates // J. Elast, 1979, vol. 9, no. 1, pp. 51–69.
38. *Kaplunov J.D., Prikazchikov D.A., Prikazchikova L.A.* Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate // Int. J. Solids & Struct., 2017, vol. 113–114, pp. 169–179.
39. *Parshina L.V., Ryabov V.M., Yartsev B.A.* Energy dissipation during vibrations of non-uniform composite structures. 1. Formulation of the problem // Vestn. St. Petersburg Univ. Math., Mech., Astron., 2018, vol. 5 (63), no. 2, pp. 300–309.
40. *Parshina L.V., Ryabov V.M., Yartsev B.A.* Energy dissipation during vibrations of non-uniform composite structures. 2. Method of solution // Vestn. St. Petersburg Univ. Math., Mech., Astron., 2018, vol. 5 (63), no. 4, pp. 678–688.
41. *Parshina L.V., Ryabov V.M., Yartsev B.A.* Energy dissipation during vibrations of non-uniform composite structures. 3. Numerical experiments // Vestn. St. Petersburg Univ. Math., Mech., Astron., 2018, vol. 6 (64), no. 1, pp. 144–156.