

---

---

УДК 531.011:521.1

## О СУБГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ В БЛИЗКОЙ К КРУГОВОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ СИТНИКОВА

© 2020 г. А. П. Маркеев<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

<sup>2</sup> *Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия*

*\*e-mail: anat-markeev@mail.ru*

Поступила в редакцию 03.04.2020 г.

После доработки 22.05.2020 г.

Принята к публикации 25.05.2020 г.

Рассматривается случай ограниченной задачи трех тел (материальных точек), когда массы двух основных притягивающих тел равны. Предполагается, что их орбиты представляют собой эллипсы. Задача о движении третьего тела пренебрежимо малой массы под действием гравитационного притяжения основных тел (ее называют задачей Ситникова) допускает частные решения, для которых третье тело движется вдоль прямой, проходящей через центр масс основных тел и перпендикулярной плоскости их орбит. В статье предполагается, что величина эксцентриситета орбит основных тел мала и исследуется нелинейная задача о существовании периодических движений третьего тела с периодом, кратным периоду обращения основных тел по их орбитам. Решается также вопрос об устойчивости этих периодических движений по Ляпунову при возмущениях, оставляющих траекторию третьего тела прямолинейной, а также при произвольных пространственных возмущениях.

*Ключевые слова:* ограниченная задача трех тел, субгармонические колебания, устойчивость

**DOI:** 10.31857/S0032823520040062

Исследование ограниченной задачи трех тел, притягивающихся по закону Ньютона, в случае, когда массы двух основных тел равны, началось более ста лет назад [1, 2]. Основные результаты [1, 2] изложены в монографиях [3, 4]. В последние десятилетия этой задаче уделялось очень большое внимание. Особенно много исследований появилось после публикации статьи [5], в которой рассматривался случай эллиптической ограниченной задачи, и было показано существование таких движений, в которых отклонение тела пренебрежимо малой массы от центра масс основных гравитирующих тел может принимать сколь угодно большие значения, но не имеет предела при неограниченном возрастании времени (осциллирующие движения). К настоящему времени довольно подробно исследована задача о существовании, устойчивости и бифуркациях периодических движений в круговой и эллиптической задачах, проведен анализ возможности хаотизации движения, даны обобщения классической задачи на случай, учитывающий световое давление, а также на случай, когда количество точек конечных масс больше двух. Большая библиография упомянутых исследований содержится в публикациях [6–14].

В статье численно-аналитическими методами исследуется задача о существовании и устойчивости прямолинейных движений третьего тела с периодом, кратным перио-

ду обращения двух основных притягивающих тел по их эллиптическим орбитам малого эксцентриситета.

**1. Введение.** Рассмотрим три тела (материальные точки)  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ , движущиеся под действием гравитационного притяжения по закону Ньютона. Считаем, что точки  $P_1$  и  $P_2$  имеют равные массы, а масса точки  $P_3$  пренебрежимо мала. Движение точек  $P_1$  и  $P_2$  определяется из задачи двух тел (материальных точек). Будем предполагать, что орбита точки  $P_2$  в ее движении относительно  $P_1$  является эллипсом с эксцентриситетом  $e$ . Через  $X, Y, Z$  обозначим координаты точки  $P_3$  в системе координат  $OXYZ$  с началом в центре масс тел  $P_1$  и  $P_2$  и осью  $OX$ , направленной по прямой  $P_1P_2$  в сторону точки  $P_2$ , направление кратчайшего поворота оси  $OX$  к оси  $OY$  совпадает с направлением вращения точки  $P_2$  относительно  $P_1$ . Пусть  $r$  – расстояние между точками  $P_1$  и  $P_2$ . Если ввести координаты Нехвилла  $x = X/r$ ,  $y = Y/r$ ,  $z = Z/r$  и в качестве независимой переменной принять истинную аномалию  $v$  в эллиптическом движении точки  $P_2$ , то дифференциальные уравнения движения точки  $P_3$  можно записать [15, 16] в форме уравнений Лагранжа второго рода с функцией  $L$  вида

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + (j\dot{x} - y\dot{x}) + \frac{x^2 + y^2}{2(1 + e \cos v)} - \frac{e \cos v}{2(1 + e \cos v)} z^2 - \frac{1}{1 + e \cos v} \Pi,$$

где точкой обозначено дифференцирование по  $v$ , а

$$\Pi = -\frac{1}{\sqrt{1 + 4x + 4(x^2 + y^2 + z^2)}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 4x + 4(x^2 + y^2 + z^2)}}$$

Введя обобщенные импульсы

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \dot{z}$$

уравнения движения можно записать в форме канонических уравнений с функцией Гамильтона вида

$$\Gamma = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + p_x y - p_y x + \frac{e \cos v}{2(1 + e \cos v)}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{1 + e \cos v} \Pi$$

Уравнения движения допускают решения, в которых  $x = y = p_x = p_y = 0$ , а изменение переменных  $z$ ,  $p_z$  описывается уравнениями с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} p_z^2 + \frac{e \cos v}{2(1 + e \cos v)} z^2 - \frac{2}{(1 + e \cos v) \sqrt{1 + 4z^2}} \quad (1.1)$$

Для этих частных решений точка  $P_3$  во все время движения остается на прямой  $x = y = 0$ , проходящей через центр масс точек  $P_1$  и  $P_2$  и перпендикулярной плоскости, в которых расположены орбиты этих точек.

В случае, когда орбиты точек  $P_1$  и  $P_2$  – окружности ( $e = 0$ ), упомянутые прямолинейные траектории точки  $P_3$  описываются уравнениями

$$\frac{dz}{dv} = p_z, \quad \frac{dp_z}{dv} = -\frac{8z}{(1 + 4z^2)^{3/2}}, \quad (1.2)$$

которым соответствует функция Гамильтона

$$H_0 = \frac{1}{2} p_z^2 - \frac{2}{\sqrt{1 + 4z^2}} \quad (1.3)$$

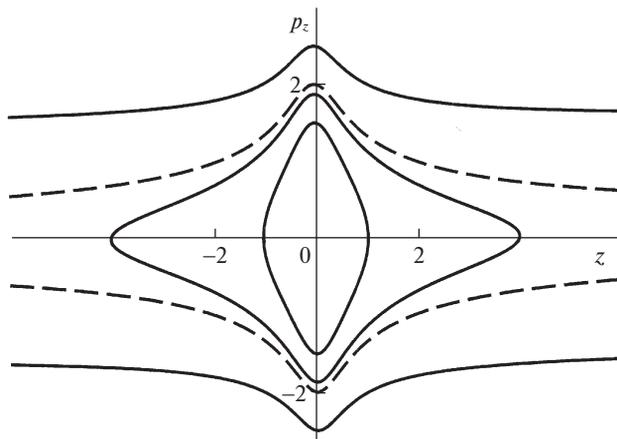


Рис. 1.

Система уравнений (1.2) является интегрируемой и довольно подробно изучена [1–4, 6]. Она допускает интеграл энергии

$$H_0 = h = \text{const} \quad (h \geq -2) \quad (1.4)$$

Фазовый портрет системы показан на рис. 1. При  $h = -2$  точка  $P_3$  находится в положении равновесия  $z = 0$ ; при  $-2 < h < 0$  — совершает периодические колебания в окрестности этого равновесия. При этом  $-z_{\max} < z < z_{\max}$ , где  $z_{\max}$  — максимальное отклонение точки  $P_3$  от положения равновесия,

$$z_{\max} = \frac{k\sqrt{1-k^2}}{1-2k^2} \quad \left(0 < k < \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad (1.5)$$

Если  $\varphi_{\max}$  — максимальное значение угла между отрезками  $P_3P_2$  и  $P_1P_2$  при колебаниях точки  $P_3$ , то  $k = \sin(\varphi_{\max}/2)$ . Постоянная  $h$  интеграла (1.4) может быть выражена через параметр  $k$ :

$$h = -2(1 - 2k^2) \quad (1.6)$$

При  $h \geq 0$  движения точки  $P_3$  являются неограниченными. Значению  $h = 0$  на рис. 1 отвечают сепаратрисы. Они задаются уравнениями

$$p_z = \pm \frac{2}{\sqrt[4]{1+4z^2}} \quad (1.7)$$

Кривые (1.7) изображены на рис. 1 штриховыми линиями. Они разделяют области неограниченных движений точки  $P_3$  по прямой от области, отвечающей колебательному характеру ее движения.

Колебания точки  $P_3$  удобно описывать в переменных действие-угол  $I, \omega$ . Переменная  $I$  равняется поделенной на  $2\pi$  площади, заключенной внутри фазовой траектории. Вычисления показывают, что переменная  $I$  может быть выражена через параметр  $k$  при помощи полных эллиптических интегралов 1-го, 2-го и 3-го родов:

$$I(k) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} [K(k) - 2E(k) + \Pi(2k^2, k)] \quad (1.8)$$

Здесь и далее используются общепринятые обозначения теории эллиптических интегралов и функций [17–19].

Функция  $I(k)$  имеет обратную функцию, так как  $\partial I/\partial k \neq 0$ . Действительно, используя известные [18] правила дифференцирования полных эллиптических интегралов, из выражения (1.8) можно получить

$$\frac{\partial I}{\partial k} = \frac{2\sqrt{2}k}{\pi(1-2k^2)} [2E(k) - K(k) + \Pi(2k^2, k)] \quad (1.9)$$

Но при выполнении ограничений (1.5) на параметр  $k$  справедливы неравенства  $\Pi(2k^2, k) > 0$  и  $2E(k) > K(k)$ . Поэтому  $\partial I/\partial k > 0$ .

Функция (1.3) зависит только от переменной  $I$ :

$$H_0 = -2(1-2k^2), \quad (1.10)$$

где  $k = k(I)$  – функция, обратная к функции (1.8). Для частоты колебаний имеем выражение

$$\omega = \frac{\partial H_0}{\partial I} = \frac{\partial H_0}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial I} = \frac{2\sqrt{2}\pi(1-2k^2)}{2E(k) - K(k) + \Pi(2k^2, k)} \quad (1.11)$$

В переменных действие-угол  $I, w$  уравнения движения (1.2) записываются в виде

$$\frac{dw}{dv} = \omega, \quad \frac{dI}{dv} = 0 \quad (1.12)$$

Для частоты (1.11) справедливо неравенство  $0 < \omega < 2\sqrt{2}$ . В рассматриваемом интервале  $0 < k < \sqrt{2}/2$  функция  $\omega(k)$  является монотонно убывающей. Для малых колебаний в окрестности равновесия ( $0 < k \ll 1$ )

$$\omega = 2\sqrt{2} - \frac{9\sqrt{2}}{2}k^2 + O(k^4),$$

а в окрестности сепаратрис (1.7) (когда  $0 < 1 - 2k^2 \ll 1$ )

$$\omega = 4(1 - 2k^2)^{3/2} + O((1 - 2k^2)^3)$$

График функции  $\omega(k)$  представлен на рис. 2.

Для дальнейшего отметим, что функция (1.10) удовлетворяет условию невырожденности  $\partial^2 H_0/\partial I^2 \neq 0$ . В самом деле, вычисления показывают, что

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} = \frac{\sqrt{2}\omega^3[(1-k^4)K(k) + (2k^4 - 2k^2 - 1)E(k) - 3k^2(1-k^2)\Pi(2k^2, k)]}{16\pi k^2(1-k^2)(1-2k^2)^2} \quad (1.13)$$

В интервале  $0 < k < \sqrt{2}/2$  величина  $\partial^2 H_0/\partial I^2$  отрицательна и монотонно возрастает. Для малых колебаний справедлива оценка

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} = -\frac{9}{2} + \frac{141}{16}k^2 + O(k^4),$$

а вблизи сепаратрис

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} = -12(1-2k^2)^2 + O((1-2k^2)^{5/2})$$

График функции  $\partial^2 H_0/\partial I^2$  показан на рис. 3.

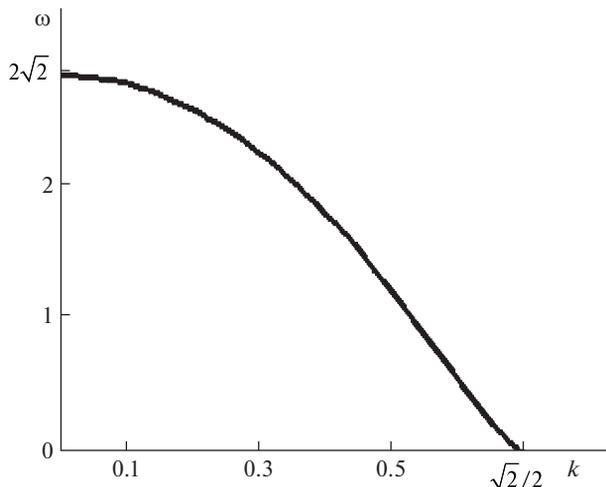


Рис. 2.

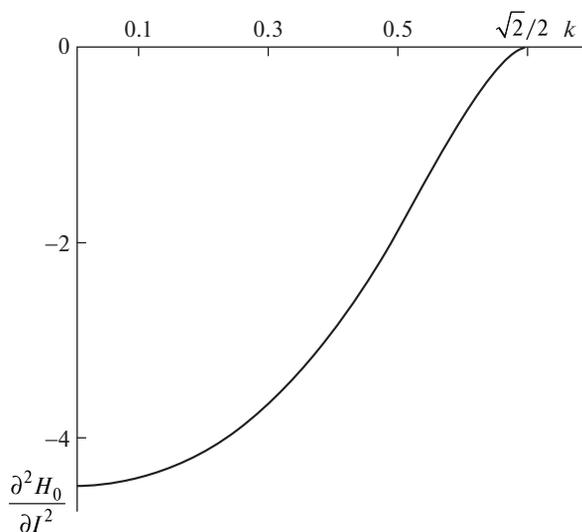


Рис. 3.

Далее рассматривается случай, когда орбиты точек  $P_1$  и  $P_2$  близки к круговым ( $0 < e \ll 1$ ). Решается задача о существовании и устойчивости периодических движений точки  $P_3$  вдоль прямой  $x = y = 0$  с периодом, кратным периоду обращения точек  $P_1$  и  $P_2$  по их орбитам. Для периодических орбит, лежащих в малой окрестности сепаратрис, аналогичная задача рассматривалась в [13, 14].

**2. Субгармонические колебания.** Пусть орбиты точек  $P_1$  и  $P_2$  близки к круговым. При малых значениях  $e$  функция Гамильтона (1.1) записывается в виде

$$H = H_0 + eH_1 + O(e^2), \quad (2.1)$$

где  $H_0$  – функция (1.3), а

$$H_1 = G(z) \cos v, \quad G(z) = \frac{1}{2} z^2 + \frac{2}{\sqrt{1+4z^2}} \quad (2.2)$$

Пусть значение  $I = I_0$  переменной действие таково, что частота (1.11) прямолинейных колебаний точки  $P_3$  в случае круговых орбит точек  $P_1$  и  $P_2$  будет рациональным числом  $n/m$ , где  $n$  и  $m$  – взаимно простые натуральные числа. Из (1.12) тогда следует, что

$$I = I_0, \quad w = \frac{n}{m} v + w_0, \quad (2.3)$$

т.е. в невозмущенной системе с функцией Гамильтона  $H_0$  колебания точки  $P_3$  будут периодическими с периодом  $2\pi m/n$ . Следуя [20], рассмотрим задачу о существовании и устойчивости периодических движений в возмущенной системе с функцией Гамильтона (2.1).

*2.1. Общая схема исследования.* Невозмущенная система является невырожденной (см. (1.13) и рис. 3). Пусть  $H_1(I, w, v)$  – функция (2.2), записанная в переменных  $I, w$ , отвечающих движению с функцией Гамильтона  $H_0$ . Через  $\langle H_1 \rangle$  обозначим ее среднее значение на невозмущенном движении (2.3):

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{2\pi m} \int_0^{2\pi m} H_1 \left( I_0, \frac{n}{m} v + w_0, v \right) dv \quad (2.4)$$

Величина (2.4) – функция от  $I_0$  и  $w_0$ . Пусть существует  $w_0$  такое, что

$$\frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial w_0} = 0 \quad (2.5)$$

и при этом

$$\frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial w_0^2} \neq 0, \quad (2.6)$$

тогда [20] существует  $2\pi m$ -периодическое движение полной системы с функцией Гамильтона (2.1), которое аналитично по  $e$  и при  $e = 0$  переходит в движение (2.3) невозмущенной системы.

Вопрос об устойчивости этого  $2\pi m$ -периодического движения решается рассмотрением величин

$$\chi_1 = \frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial w_0^2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \quad \text{и} \quad \chi_2 = 5 \left( \frac{\partial^3 \langle H_1 \rangle}{\partial w_0^3} \right)^2 - 3 \frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial w_0^2} \frac{\partial^4 \langle H_1 \rangle}{\partial w_0^4} \quad (2.7)$$

на невозмущенном движении (2.3). Согласно [20], при  $\chi_1 < 0$  периодическое движение неустойчиво, а при  $\chi_1 > 0$  устойчиво в первом (линейном) приближении. В [21] при помощи КАМ-теории [22] показано, что если  $\chi_1 > 0$  и при этом  $\chi_2 \neq 0$ , то периодическое движение устойчиво по Ляпунову (не только в первом приближении, но и в строгой нелинейной постановке задачи).

*2.2. О численном способе построения замены  $z, p_z \rightarrow I, w$ .* Для реализации описанной схемы исследования необходимо предварительно получить каноническое преобразование  $z, p_z \rightarrow I, w$ , приводящее функцию Гамильтона  $H_0$  к виду (1.10). Следуя [23], укажем как это можно сделать численным способом в общем случае автономной гамильтоновой системы с одной степенью свободы, а не только в нашей конкретной задаче.

Пусть в системе с функцией Гамильтона  $H(q, p)$  в некотором интервале изменения постоянной  $h$  интеграла энергии  $H(q, p) = h$  движение имеет периодический характер и описывается формулами (через  $t$  обозначается независимая переменная)

$$q = q^*(t + t_0, h), \quad p = p^*(t + t_0, h) \quad (2.8)$$

Пусть  $I$  – переменная действие, а  $h(I)$  – функция  $H(q, p)$ , записанная в переменных действие-угол  $I, w$ . Тогда каноническое преобразование  $q, p \rightarrow I, w$  может быть записано в виде

$$q = q^*(\psi, h), \quad p = p^*(\psi, h) \quad (\psi = w/\omega, \quad h = h(I), \quad \omega = \partial h/\partial I) \quad (2.9)$$

Для доказательства достаточно убедиться, что скобка Пуассона  $(q^*, p^*)$  функций (2.9) по переменным  $w, I$  равна единице. Действительно, учитывая тождества  $H(q^*, p^*) = h$  и

$$\frac{\partial q^*}{\partial \psi} = \frac{dq^*}{d\psi} = \frac{\partial H(q^*, p^*)}{\partial p^*}, \quad \frac{\partial p^*}{\partial \psi} = \frac{dp^*}{d\psi} = -\frac{\partial H(q^*, p^*)}{\partial q^*}$$

можно показать, что

$$(q^*, p^*) = \frac{\partial q^*}{\partial w} \frac{\partial p^*}{\partial I} - \frac{\partial q^*}{\partial I} \frac{\partial p^*}{\partial w} = \frac{\partial H(q^*, p^*)}{\partial p^*} \frac{\partial p^*}{\partial h} + \frac{\partial H(q^*, p^*)}{\partial q^*} \frac{\partial q^*}{\partial h} = \frac{\partial H(q^*, p^*)}{\partial h} = 1$$

В рассматриваемой задаче, когда  $H$  – это функция  $H_0$  из (1.3), замена переменных  $z, p_z \rightarrow I, w$  задается получаемыми из (1.2) и (1.12) дифференциальными уравнениями

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\omega} p_z, \quad \frac{dp_z}{dw} = -\frac{8z}{\omega(1 + 4z^2)^{3/2}} \quad (2.10)$$

Будем полагать, что (см. рис. 1)

$$z(0) = 0, \quad p_z(0) = 2\sqrt{2}k \quad (2.11)$$

Функции  $z$  и  $p_z$  будут соответственно нечетной и четной функциями  $w$ . Зависимость этих функций от  $I$  проявляется через параметр  $k$ , который при численном интегрировании уравнений (2.10), (2.11) считается заданной величиной.

2.3. *О существовании и устойчивости прямолинейных субгармонических колебаний точки  $P_3$  и их устойчивости.* Если в формуле (2.4) перейти к интегрированию по переменной  $w$ , определяемой вторым из равенств (2.3), то для среднего значения функции (2.2) получим следующее выражение:

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} G(z) \cos\left(\frac{m}{n}w - \frac{m}{n}w_0\right) dw \quad (2.12)$$

Очевидно, что при  $n \neq 1$  величина (2.12) тождественно равняется нулю. Следовательно, при анализе субгармонических колебаний, существование которых можно установить уже в первом приближении по  $e$ , надо в невозмущенном движении (2.3) положить  $n = 1$ . Поэтому далее значение частоты невозмущенного движения задается равенством

$$\omega = \frac{1}{m}, \quad (2.13)$$

в котором  $m$  – натуральное число ( $m = 1, 2, \dots$ ). Соответствующие этим частотам периоды колебаний точки  $P_3$  и ее максимальное отклонение  $z_{\max}$  от положения равновесия  $z = 0$  монотонно возрастают с ростом  $m$ . При  $m = 1$  период колебаний точки  $P_3$  равен периоду обращения точек  $P_1$  и  $P_2$  по их орбитам, а максимальное отклонение точки  $P_3$  от положения равновесия приблизительно равно расстоянию между точками  $P_1$  и  $P_2$

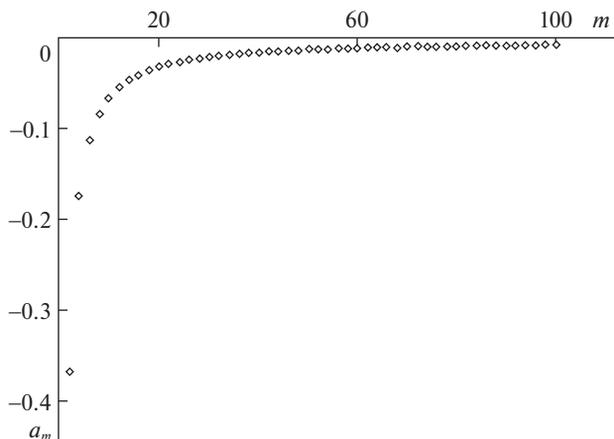


Рис. 4.

( $z_{\max} = 1.044$ ), а при  $m = 100$  период колебаний в сто раз больше периода обращения точек  $P_1$  и  $P_2$ , при этом  $z_{\max} = 27.115$ .

В излагаемом численно-аналитическом исследовании мы ограничимся значениями  $m$ , не превосходящими 100.

Заметим, что функция  $G(z)$  под знаком интеграла в выражении (2.12) — четная  $\pi$ -периодическая функция  $w$ . Положив в (2.12)  $n = 1$  и учтя это замечание, находим следующее выражение для среднего значения функции  $H_1$ :

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{2} a_m \cos mw_0, \quad (2.14)$$

где коэффициент  $a_m$  равен нулю, если  $m$  — нечетное число, а при  $m$  четном

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(z) \cos mwdw \quad (m = 2, 4, \dots) \quad (2.15)$$

Для нахождения коэффициентов (2.15) численным способом рассмотрим вспомогательную функцию  $\varphi_m(w)$ , определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{d\varphi_m}{dw} = \frac{1}{\pi} G(z) \cos mw \quad (2.16)$$

с начальным условием  $\varphi_m(0) = 0$ . Проинтегрировав это уравнение совместно с уравнениями (2.10), (2.11) (в которых  $\omega = 1/m$ ) от  $w = 0$  до  $w = 2\pi$ , получим  $a_m = \varphi_m(2\pi)$ .

Вычисления показали, что для всех рассмотренных четных  $m$  (от  $m = 2$  до  $m = 100$ ) коэффициент  $a_m$  отрицателен. График функции  $a_m$  показан на рис. 4.

Поскольку величина  $a_m$  отлична от нуля, то получаемое из (2.5) и (2.14) уравнение для порождающих значений  $w_0$  эквивалентно уравнению  $\sin mw_0 = 0$ , которое на промежутке  $[0, 2\pi)$  имеет  $2m$  корней

$$w_0 = \frac{s\pi}{m} \quad (s = 0, 1, \dots, 2m - 1) \quad (2.17)$$

При этих значениях  $w_0$  для левой части соотношения (2.6) получаем выражение

$$\frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial w_0^2} = (-1)^{s+1} \frac{m^2 a_m}{2}, \quad (2.18)$$

а величины  $\chi_1$  и  $\chi_2$  из (2.7) будут такими:

$$\chi_1 = (-1)^{s+1} \frac{m^2 a_m}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}, \quad \chi_2 = \frac{3}{4} m^6 a_m^2 \quad (2.19)$$

Так как величины  $a_m$  и  $\partial^2 H_0 / \partial I^2$  отрицательны, то (см. раздел 2.1) при достаточно малых эксцентриситетах  $e$  значения  $w_0$  из (2.17) порождают  $2m$  периодических решений  $z^*(v)$ ,  $p_z^*(v)$  уравнений с функцией Гамильтона (2.1) периода  $2\pi m$  по  $v$ . Эти периодические решения соответствуют двум различным  $2\pi m$ -периодическим движениям точки  $P_3$ . Одно из них отвечает четным, а другое нечетным значениям  $s$ . Первое движение неустойчиво (для него  $\chi_1 < 0$ ), а второе устойчиво по Ляпунову (для него  $\chi_1 > 0$ ,  $\chi_2 \neq 0$ ). Движения, отвечающие оставшимся  $(2m - 2)$ -м решениям получаются из этих двух сдвигом начальной фазы  $w_0$  на величину, кратную  $2\pi/m$ .

2.4. *О неустойчивости прямолинейных субгармонических колебаний по отношению к пространственным возмущениям.* Для исследования устойчивости периодических движений  $z^*(v)$ ,  $p_z^*(v)$  точки  $P_3$  вдоль прямой  $x = y = 0$  положим

$$x = q_1, \quad y = q_2, \quad z = z^*(v) + q_3, \quad p_x = p_1, \quad p_y = p_2, \quad p_z = p_z^*(v) + p_3$$

и рассмотрим линеаризованные уравнения возмущенного движения. Им соответствует квадратичная относительно  $q_j, p_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) функция Гамильтона

$$\Gamma_2 = \Gamma_2^{(2)} + \Gamma_2^{(3)},$$

где  $\Gamma_2^{(2)}$  и  $\Gamma_2^{(3)}$  — квадратичные формы относительно  $q_i, p_i$  ( $i = 1, 2$ ) и  $q_3, p_3$  соответственно. Коэффициенты квадратичных форм  $2\pi m$ -периодичны по  $v$ .

Возмущенное движение для пространственных переменных  $q_i, p_i$  ( $i = 1, 2$ ) отделяется от движений для возмущений, оставляющих точку  $P_3$  на прямолинейной траектории. Устойчивость по отношению к этим возмущениям исследована выше. Поэтому будем рассматривать линейные уравнения возмущенного движения, отвечающие пространственным возмущениям  $q_i, p_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Характеристическое уравнение матрицы  $\mathbf{X}(v)$  фундаментальных решений системы с функцией Гамильтона  $\Gamma_2^{(2)}$ , вычисленной при  $v = 2\pi m$ , как и для всякой линейной гамильтоновой системы с периодическими коэффициентами [24], будет возвратным:

$$\rho^4 - c_1 \rho^3 + c_2 \rho^2 - c_1 \rho + 1 = 0, \quad (2.20)$$

где коэффициент  $c_1$  равен следу матрицы  $\mathbf{X}(2\pi m)$ , а  $c_2$  — сумма всех ее главных миноров второго порядка. Коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  — аналитические функции эксцентриситета  $e$  ( $0 < e \ll 1$ ).

Если уравнение (2.20) имеет хотя бы один корень, модуль которого больше единицы, то исследуемое периодическое движение неустойчиво. Причем не только в линейном приближении, но и в строгом нелинейном смысле [24]. В изучаемой задаче для всех  $2\pi m$ -периодических движений ( $m = 2, 4, \dots, 100$ ) реализуется как раз этот случай. Чтобы убедиться в этом, достаточно, ввиду аналитичности коэффициентов  $c_1$  и  $c_2$  по  $e$ , проверить, что уравнение (2.20) имеет корень, по модулю больший единицы, при нулевом значении эксцентриситета.

При  $e = 0$  имеем такую функцию Гамильтона, отвечающую линеаризованным уравнениям движения:

$$\Gamma_2^{(2)} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + p_1q_2 - p_2q_1 - \frac{8(1 - 2z^{*2})}{(1 + 4z^{*2})^{5/2}}q_1^2 + \frac{4}{(1 + 4z^{*2})^{3/2}}q_2^2 \quad (2.21)$$

К каноническим уравнениям, отвечающим этой функции Гамильтона, надо еще добавить уравнения (1.2) для  $z^*(v)$ ,  $p_z^*(v)$  с начальными условиями  $z^*(0) = 0$ ,  $p_z^*(0) = 2\sqrt{2}k$  (где для заданного  $m$  величина  $k$  находится из соотношения (2.13)).

Задав  $m$  ( $m = 2, 4, \dots, 100$ ) и проинтегрировав от  $v = 0$  до  $v = 2\pi m$  систему уравнений для нахождения  $z^*(v)$ ,  $p_z^*(v)$  и элементов матрицы  $x_{ij}(v)$  фундаментальных решений, получим величины  $c_1$  и  $c_2$ . Корни уравнения (2.20) выражаются через  $c_1$  и  $c_2$  по формулам

$$\rho_j = \frac{1}{4}(\delta_j + \sqrt{\delta_j^2 - 16}), \quad \rho_{j+2} = \frac{1}{\rho_j}, \quad \delta_j = c_1 + (-1)^{j+1}\sqrt{c_1^2 - 4c_2 + 8} \quad (j = 1, 2) \quad (2.22)$$

Вычисления показали, что для каждого  $m = 2, 4, \dots, 100$  среди корней (2.22) есть корень, модуль которого больше единицы. Например, при  $m = 2$  (когда  $\omega = 1/2$ ,  $k = 0.608$ ,  $h = -0.522$ ,  $c_1 = 18.500$ ,  $c_2 = 78.575$ ) таких корней даже два:

$$\rho_1 = 12.167, \quad \rho_2 = 6.087, \quad \rho_3 = 0.082, \quad \rho_4 = 0.164$$

При остальных  $m$  ( $m = 4, \dots, 100$ ) два из корней (2.22) вещественны и два комплексно сопряженные. При наибольшем из рассмотренных  $m$  ( $m = 100$ ,  $\omega = 1/100$ ,  $k = 0.701$ ,  $h = -0.037$ ,  $c_1 = 6.218$ ,  $c_2 = -9.683$ ) корни таковы:

$$\rho_1 = 7.598, \quad \rho_3 = 0.132, \quad \rho_{2,4} = -0.756 \pm i0.655$$

**Заключение.** Рассмотрены  $2\pi m$ -периодические прямолинейные движения точки  $P_3$ , которые обнаруживаются уже при анализе первого приближения по  $e$ . Оказалось, что для этих движений  $m$  – четное число. Рассмотрение четных значений  $m$  от  $m = 2$  до  $m = 100$  показало, что для возмущений, не уведящих точку  $P_3$  с прямой,  $m$  движений устойчивы по Ляпунову и  $m$  движений неустойчивы. Если же возмущения имеют общий пространственный характер, то все  $m$  пар  $2\pi m$ -периодических движений ( $m = 2, 4, \dots, 100$ ) неустойчивы.

Для решения задачи о существовании субгармонических колебаний периода  $2\pi m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) можно использовать иные подходы, отличные от примененных выше. Задача о существовании таких движений, обладающих теми или иными свойствами симметрии, исследовалась ранее [8] при помощи специального алгоритма, разработанного для обратимых систем. Существование симметричных субгармонических колебаний для сколь угодно больших  $m$  [11] устанавливается при помощи анализа функции Мельникова [25].

Многие вопросы о субгармонических колебаниях точки  $P_3$  требуют дополнительного исследования. Например, анализ более высоких приближений по  $e$  позволил бы рассмотреть другие типы субгармонических движений. Несомненный интерес представляет также задача о численном продолжении субгармонических колебаний на значения  $e$ , не являющиеся малыми [8].

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете) и в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pavanini G.* Sorpa una nuova categoria di soluzioni periodiche nel problema dei tre corpi // *Annali di Matematica*. 1907. Serie 3. T. 13. P. 179–202.
2. *MacMillan W.D.* An integrable case in the restricted problem of three bodies // *Astron J.* 1911. V. 27. P. 11–13.
3. *Stumpff K.* *Himmelsmechanik*. Band 2. Berlin: VEB, 1965. S. 73–79.
4. *Себехей В.* Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982. 657 с.
5. *Ситников К.* Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // *Докл. АН СССР*. 1960. Т. 133. № 2. С. 303–306.
6. *Belbruno E., Llibre J., Ollé M.* On the families of periodic orbits which bifurcate from the circular Sitnikov motions // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.* 1994. V. 60. Iss. 1. P. 99–129.
7. *Dvorak R., Vrabc F., Wodnar K.* The Sitnikov problem: a short review // *Sistema Solari e Sistema Stellari-Perturbative-Dinamica del Volo Spaziale*. Eds. *A. Celletti and E. Rerozzi*. Universita' di L'Aquila, 1993. P. 16–22.
8. *Тхай В.Н.* Периодические движения обратимой механической системы второго порядка, приложение к задаче Ситникова // *ПММ*. 2006. Т. 70. Вып. 5. С. 813–834.
9. *Bountis T., Papadakis K.E.* The stability of vertical motion in the N-body circular Sitnikov problem // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.* 2009. V. 104. Iss. 1–2. P. 205–225.
10. *Sidorenko V.V.* On the circular Sitnikov problem: the alternation of stability and instability of vertical motions // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.* 2011. V. 109. Iss. 4. P. 367–384.
11. *Hagel J.* A new method to construct integrable approximations to nearly integrable system in celestial mechanics: application to the Sitnikov problem // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.* 2015. V. 122. Iss. 2. P. 101–116.
12. *Красильников П.С.* Прикладные методы исследования нелинейных колебаний. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. 528 с.
13. *Мозер Ю.* Устойчивые и хаотические движения в динамических системах: в приложении к небесной механике. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. 184 с.
14. *Robinson C.* Uniform subharmonic orbits for Sitnikov problem // *Discrete & Contin. Dyn. Syst., Ser. S*. 2008. V. 1. № 4. P. 647–652.
15. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1978. 456 с.
16. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
17. *Журавский А.М.* Справочник по эллиптическим функциям. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941. 235 с.
18. *Byrd P.F., Friedman M.D.* *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*. Berlin: Springer, 1954. 355 p.
19. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
20. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. В кн.: *Избранные труды*. Т. 1. М: Наука, 1971. 771 с.
21. *Маркеев А.П., Чуркина Н.И.* О периодических решениях Пуанкаре канонической системы с одной степенью свободы // *Письма в астрон. ж.* 1985. Т. 11. № 8. С. 634–639.
22. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
23. *Маркеев А.П.* О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2:1 // *ПММ*. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 757–769.
24. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
25. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // *Тр. Моск. мат. о-ва*. 1963. Т. 12. С. 3–52.

## On Subharmonic Oscillations in the Near-Circular Elliptic Sitnikov's Problem

A. P. Markeev<sup>a,b,#</sup>

<sup>a</sup> *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

<sup>b</sup> *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

<sup>#</sup> *e-mail: anat-markeev@mail.ru*

The restricted three-body problem (material points) is considered when the masses of the two main attracting bodies are equal. Their orbits are assumed to be ellipses. The problem of the motion of the third body of negligible mass under the influence of gravitational attraction of the main bodies (the Sitnikov's problem) allows particular solutions for which the third body moves along a straight line passing through the center of mass of the main bodies and perpendicular to the plane of their orbits. For the case when the eccentricity of the orbits of the main bodies is small, the nonlinear problem of the existence of periodic motions of the third body with a period multiple of the period of revolution of the main bodies in their orbits is investigated. The problem of stability (in Lyapunov's sense) of these periodic motions under perturbations keeping the trajectory of the third body rectilinear as well as under arbitrary spatial perturbations is also solved.

*Keywords:* restricted three-body problem, subharmonic oscillations, stability

### REFERENCES

1. *Pavanini G.* Sorpa una nuova categoria di soluzioni periodiche nel problema dei tre corpi // *Annali di Matematica*. Ser. 3, 1907, vol. 13, pp. 179–202.
2. *MacMillan W.D.* An integrable case in the restricted problem of three bodies // *Astron J.*, 1911, vol. 27, pp. 11–13.
3. *Stumpff K.* *Himmelsmechanik*. Band 2. Berlin: VEB, 1965. ss. 73–79.
4. *Szebehely V.* *Theory of Orbits. The Restricted Problem of Three Bodies*. N.Y.: Academ. Press, 1967. 684 p.
5. *Sitnikov K.* Existence of oscillating motions for the three-body problem // *Dokl. Akad. Nauk. USSR*, 1960, vol. 133, no. 2, pp. 303–306. (in Russian)
6. *Belbruno E., Llibre J., Olle' M.* On the families of periodic orbits which bifurcate from the circular Sitnikov motions // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 1994, vol. 60, no. 1, pp. 99–129.
7. *Dvorak R., Vrabc F., Wodnar K.* The Sitnikov problem: a short review // *Sistema Solari e Sistema Stellari-Perturbative-Dinamica del Volo Spaziale* / Ed. by *Celletti A., Rerozzi E.* *Universita' di L'Aquila*, 1993, pp. 16–22.
8. *Tkhai V.N.* Periodic motions of a reversible second-order mechanical system: Application to the Sitnikov problem // *JAMM*, 2006, vol. 70, no. 5, pp. 734–753.
9. *Bountis T., Papadakis K.E.* The stability of vertical motion in the N-body circular Sitnikov problem // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 2009, vol. 104, no. 1–2, pp. 205–225.
10. *Sidorenko V.V.* On the circular Sitnikov problem: the alternation of stability and instability of vertical motions // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 2011, vol. 109, no. 4, pp. 367–384.
11. *Hagel J.* A new method to construct integrable approximations to nearly integrable system in celestial mechanics: application to the Sitnikov problem // *Celest. Mech. & Dyn. Astron.*, 2015, vol. 122, no. 2, pp. 101–116.
12. *Krasil'nikov P.S.* *Applied Methods for Studying of Nonlinear Oscillations*. (Prikladnye metody issledovaniya nelinejnyh kolebanij) Moscow; Izhevsk: R&C Dynamics; Inst. Comput. Sci., 2015. 528 p. (in Russian)
13. *Moser J.* *Stable and random motions in dynamical systems* // *Ann. Math. Stud.* no. 77. Princeton: Univ. Press, 1973. 199 p.
14. *Robinson C.* Uniform subharmonic orbits for Sitnikov problem // *Discrete & Contin. Dyn. Syst.* Ser. S, 2008, vol. 1, no. 4, pp. 647–652.
15. *Duboshin G.N.* *Celestial Mechanics. Analytical and Qualitative Methods*. (Nebesnaya mekhanika. Analiticheskie i kachestvennye metody) Moscow: Nauka, 1978. 456 p. (in Russian)

16. *Markeev A.P.* Libration Points in Celestial Mechanics and Cosmodynamics. (Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike) Moscow: Nauka, 1978, 312 p. (in Russian)
17. *Zhuravskii A.M.* Reference Book in Elliptic Functions. (Spravochnik po ellipticheskim funktsiyam) Moscow; Leningrad: AN SSSR, 1941. 235 p. (in Russian)
18. *Byrd P.F., Friedman M.D.* Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists. Berlin: Springer, 1954. 355 p.
19. *Gradstein I.S., Ryzhik I.M.* Tables of Integrals, Sums, Series and Products. (Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy) Moscow: Nauka, 1971. 1108 p. (in Russian)
20. *Poincare' H.* Les me'thodes nouvelles de la me'canique ce'leste. T. 1. Paris: Gauthier –Villars, 1892. 385 p.
21. *Markeev A.P., Churkina T.E.* On periodic Poincare solutions of a canonical system with one degree of freedom // *Astron. Lett.*, 1985, vol. 11, no. 8, pp. 634–639. (in Russian)
22. *Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I.* Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. Encyclopedia Math. Sci. vol. 3. Berlin: Springer, 2006. 505 p.
23. *Markeyev A.P.* Non-linear oscillations of a Hamiltonian system with 2:1 resonance // *JAMM*, 1999, vol. 63, no. 5, pp. 715–726.
24. *Malkin I.G.* Theory of Stability of Motion. Washington D.C.: Office of Technical Information, 1952. 456 p.
25. *Mel'nikov V.K.* On the stability of a center for time-periodic perturbations // *Trans. Mos. Math. Soc.*, 1963, vol. 12, no. 1, pp. 3–52.