

УДК 531.01

АНАЛИТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПАРАМЕТРОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ© 2020 г. П. А. Кучеренко^{1,*}, С. В. Соколов^{2,**}¹ Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону, Россия² Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

*e-mail: pavelpost83@mail.ru

**e-mail: s.v.s.888@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.12.2019 г.

После доработки 19.02.2020 г.

Принята к публикации 11.03.2020 г.

Рассмотрен синтез высокоточных аналитических аппроксимирующих функций зависимости геодезической долготы от приведенной широты на геодезической линии сфероида. Полученные аппроксимации актуальны как для задач геодезии, так и навигации при необходимости высокоточных расчетов.

Ключевые слова: ортодромическая траектория, сфероид, аппроксимация функциональной зависимости

DOI: 10.31857/S0032823520030054

Введение. Постоянный рост требований к точности современных навигационных систем приводит к необходимости решения проблемы компромисса между повышением точности описания текущих параметров движения объекта, неизбежно ведущим к усложнению навигационных алгоритмов, и снижением вычислительной сложности последних с целью обеспечения возможности решения навигационной задачи в реальном масштабе времени. Одним из путей решения первой задачи является использование при построении основных уравнений навигации сфероидальной модели Земли вместо сферической, а радикальным подходом к решению второй (сокращению размерности системы навигационных уравнений без потери точности решения задачи навигации) — использование функциональных зависимостей между навигационными переменными, в частности, между долготой и широтой, возникающих на отдельных видах траекторий. Подобные аналитические зависимости, выраженные в элементарных функциях, известны для локсодромической или ортодромической траекторий движения объекта по сферической Земле и для локсодромической траектории движения по сфероиду [1–5]. В [6] была получена аналогичная зависимость геодезической долготы от приведенной широты для геодезической линии на сфероиде в интегральной форме (затрудняющей ее применение в задачах геодезии и навигации) и показана возможность ее аппроксимации аналитической зависимостью, выраженной элементарными функциями. Точность полученной при этом аппроксимации составила единицы метров, что позволяет использовать ее при решении задачи позиционирования в навигационных системах среднего класса точности. Но для высокоточных систем навигации необходим уже сантиметровый (и менее) уровень ошибки аппроксимации, поэтому рассмотрим далее возможность построения с данной точностью зависимости геодезической долготы от приведенной широты на геодезической линии, выраженной в элементарных функциях.

1. Постановка задачи. Как показано в [6], точная зависимость геодезической долготы L от приведенной широты u (однозначно определяющей также и геодезическую широту B [7]) является интегральной:

$$L(u) = L_0 + \int_{u_0}^u \phi \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} du, \quad \phi = \sin A_0 \cos u_0, \quad (1.1)$$

где u_0 – приведенная широта начальной точки геодезической линии, A_0 – азимут геодезической линии в начальной точке, L_0 – геодезическая долгота начальной точки геодезической линии, e – второй эксцентриситет (для эллипсоида Красовского).

Это затрудняет ее непосредственное использование в задачах навигации и геодезии.

Графическое изображение этой зависимости, дающее представление об общем характере функции $L(u)$ – непрерывном и монотонном, приведено также в [6]. Так как аналитическое вычисление интеграла (1.1) не представляется возможным, рассмотрим далее возможность его аналитической аппроксимации, обеспечивающей заявленную выше точность.

2. Решение задачи. Для построения искомой аппроксимации интеграла (1.1) рассмотрим возможность упрощения его подынтегрального выражения разложением в ряд функции $\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}$ по аргументу $e^2 \cos^2 u$ (в заданной точке u_l) с точностью до $(e^2 \cos^2 u)^4$ (что, как показано далее, достаточно для обеспечения точности аппроксимации существенно выше заявленной (сантиметровой) – в пределах 10^{-6} м):

$$\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u} \approx \alpha_0 + \alpha_1 \cos^2 u + \alpha_2 \cos^4 u + \alpha_3 \cos^6 u + \alpha_4 \cos^8 u \quad (2.1)$$

где коэффициенты $\alpha_i, i = 0, \dots, 4$ приведены в Приложении 1.

Точность подобного разложения функции $\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}$ оказывается весьма высокой, что иллюстрирует приведенный на рис. 1 график изменения погрешности приближения $\Delta(u)$ в зависимости от приведенной широты u . Это, в свою очередь, позволяет использовать функцию (2.1) для последующего решения задачи.

При этом следует иметь в виду, что для области низких и высоких широт коэффициенты функции (2.1) существенно упрощаются:

– для района высоких широт – $u_0 = \frac{\pi}{2}$ (при выборе точки аппроксимации в начале интервала, т.е. при $u_l = u_0$):

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = -\frac{e^2}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{e^4}{8}, \quad \alpha_3 = -\frac{e^6}{16}, \quad \alpha_4 = -\frac{5e^8}{128}$$

– для района низких широт – $u_0 = 0$ (также при $u_l = u_0$):

$$\alpha_n = \sqrt{1 - e^2} \sum_{m=n}^4 (-1)^{n+m+1} \frac{e^{2m}}{(1 - e^2)^m} \alpha_{nm}, \quad n = 0, \dots, 4$$

$$\alpha_{nm} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{5}{128} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{5}{32} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{5}{64} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & \frac{5}{32} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{128} \end{pmatrix}$$

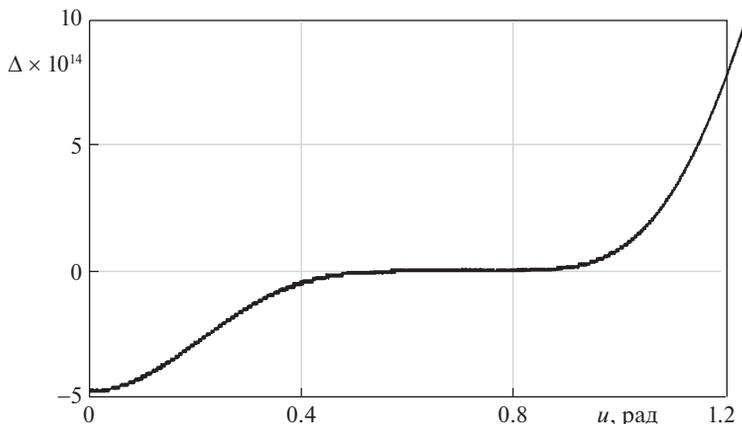


Рис. 1. Погрешность приближения Δ функции $\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}$ при $u_l = 0.7$ рад.

При использовании функции (2.1) интеграл (1.1) распадается на сумму интегралов:

$$L = L_0 + \phi \cdot \alpha_0 \int_{u_0}^u \frac{du}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} + \phi \sum_{i=1}^4 \alpha_i \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2i-1} u}{\sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} du \quad (2.2)$$

Первый из этих интегралов равен:

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^u \frac{\phi \alpha_0}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} du &= \phi \alpha_0 k \int_{u_0}^u \frac{du}{\cos u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = \\ &= -\frac{1}{2\kappa^*} \ln \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} - k^* \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + k^* \sin u} \Big|_{u_0}^u \phi k \alpha_0 \\ k^2 &= (1 - \phi^2)^{-1}, \quad k^* = \sqrt{1 - k^2} \end{aligned}$$

Так как параметр $k^* = \sqrt{1 - k^2}$ – комплексный, то представляя его в виде $k^* = iv$, $v = \sqrt{k^2 - 1}$ преобразуем полученный логарифм следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\kappa^*} \ln \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} - k^* \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + k^* \sin u} = \\ &= \frac{1}{v} \operatorname{arctg} \frac{v \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = \frac{1}{k\phi} \operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} \end{aligned}$$

С учетом данного преобразования окончательно определяем выражение для интеграла:

$$\int_{u_0}^u \frac{\phi \alpha_0}{\cos u \sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} du = \alpha_0 \left[\operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} - \operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin u_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_0}} \right]$$

Второй интеграл из (2.2) при замене переменных является табличным:

$$\int_{u_0}^u \frac{\phi \alpha_1 \cos u}{\sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} du = \phi \alpha_1 [\arcsin(k \sin u) - \arcsin(k \sin u_0)],$$

а остальные интегралы

$$\phi\alpha_n \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2n-1} u}{\sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} du = \phi\alpha_n k \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2n-1} u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du, \quad n = 2, 3, 4$$

могут быть определены из [8]:

$$\begin{aligned} & \phi k \alpha_n \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2n-1} u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du = \\ & = \phi k \alpha_n \left\{ \frac{\sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}{k^{2(n-1)}} \sum_{m=0}^{n-2} (k^2 \sin^2 u)^m \sum_{l=0}^{n-m-2} (-1)^{n+l} p_{nmk} k^{2l} + \right. \\ & \left. + \frac{\arcsin(k \sin u)}{k^{2n-1}} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-m-1} q_{nm} k^{2m} \right\} \Big|_{u_0}^u, \quad n = 2, 3, 4, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} q_{20} &= \frac{1}{2}, \quad q_{21} = 1; \quad q_{30} = \frac{3}{8}, \quad q_{31} = q_{32} = 1; \quad q_{40} = \frac{5}{16} \\ q_{41} &= \frac{9}{8}, \quad q_{42} = \frac{3}{2}, \quad q_{43} = 1 \\ p_{200} &= \frac{1}{2}; \quad p_{300} = \frac{3}{8}, \quad p_{301} = 1, \quad p_{310} = \frac{1}{4} \\ p_{400} &= \frac{5}{16}, \quad p_{401} = \frac{9}{8}, \quad p_{402} = \frac{3}{2}, \quad p_{410} = \frac{5}{24}, \quad p_{411} = \frac{3}{4}, \quad p_{420} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

С учетом соотношения

$$\begin{aligned} \frac{k\phi \sin u_0}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_0}} &= \frac{\sin A_0 \cos u_0 \sin u_0}{\sqrt{1 - (\sin A_0 \cos u_0)^2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 u_0}{1 - (\sin A_0 \cos u_0)^2}}} = \\ &= \frac{\sin A_0 \cos u_0 \sin u_0}{\sqrt{\cos^2 u_0 - (\sin A_0 \cos u_0)^2}} = \sin u_0 \operatorname{tg} A_0 \end{aligned}$$

и возможности представления в компактном виде суммы интегралов

$$\begin{aligned} \phi \sum_{n=2}^4 \alpha_n \int_{u_0}^u \frac{\cos^{2n-1} u}{\sqrt{\cos^2 u - \phi^2}} du &= (\beta_0 + \beta_1 \sin^2 u + \beta_2 \sin^4 u) \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + \\ &+ \beta_3 \arcsin(k \sin u) + \beta_4, \end{aligned}$$

где коэффициенты $\beta_n, n = 0, \dots, 4$ приведены в Приложении 2, окончательно аппроксимация функциональной зависимости геодезической долготы от приведенной широты на геодезической линии принимает вид:

$$\begin{aligned} L^*(u) &= L_0 + \alpha_0 \left[\operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} - \operatorname{arctg}(\sin u_0 \operatorname{tg} A_0) \right] + \\ &+ \phi \alpha_1 [(\arcsin(k \sin u) - \arcsin(k \sin u_0))] + \\ &+ (\beta_0 + \beta_1 \sin^2 u + \beta_2 \sin^4 u) \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + \beta_3 \arcsin(k \sin u) + \beta_4 = \\ &= L_0 + \alpha_0 \operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} + (\beta_3 + \phi \alpha_1) \arcsin(k \sin u) + \\ &+ (\beta_0 + \beta_1 \sin^2 u + \beta_2 \sin^4 u) \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + \beta_5 \\ \beta_5 &= \beta_4 - \alpha_0 \operatorname{arctg}(\sin u_0 \operatorname{tg} A_0) - \phi \alpha_1 \arcsin(k \sin u_0) \end{aligned} \tag{2.3}$$



Рис. 2. Погрешность аппроксимации δ для параметров $L_0 = 0.3$, $u_0 = 0$, $A_0 = 0.3$ при $u_l = 0.7$ рад.

На рис. 2 приведен график характерного изменения погрешности аппроксимации $\delta(u) = L(u) - L^*(u)$ в зависимости от широты u (для значений параметров $L_0 = 0.3$, $u_0 = 0$, $A_0 = 0.3$ при $u_l = 0.7$).

Как показали результаты моделирования, характер изменения и порядок значений среднеквадратических ошибок аппроксимации существенно не меняются при выборе различных интервалов изменения широты u и точек аппроксимации u_l в пределах этих интервалов, что свидетельствует об общем характере полученной аппроксимации и возможности ее использования в высокоточных навигационных системах и геодезических расчетах.

В завершение рассмотрения данной аппроксимации следует отметить, что, учитывая известную связь приведенной и геодезической B широт

$$\sin u = \frac{\sin B}{\sqrt{1 + e^2 \cos^2 B}} \quad (2.4)$$

из (2.3), (2.4) можно легко получить следующую аппроксимацию связи геодезической долготы и геодезической широты B :

$$\begin{aligned} L = & L_0 + \alpha_0 \operatorname{arctg} \frac{k\phi \sin B}{\sqrt{1 + e^2 - (k^2 + e^2) \sin^2 B}} + \\ & + (\beta_3 - \phi\alpha_1) \arcsin \left(k \frac{\sin B}{\sqrt{1 + e^2 \cos^2 B}} \right) + \left(\beta_0 + \beta_1 \frac{\sin^2 B}{1 + e^2 \cos^2 B} + \right. \\ & \left. + \beta_2 \frac{\sin^4 B}{(1 + e^2 \cos^2 B)^2} \right) \frac{\sin B}{1 + e^2 \cos^2 B} \sqrt{1 - k^2 + (e^2 + k^2) \cos^2 B} + \beta_5, \end{aligned}$$

где коэффициенты α_i , β_i , $i = 0, \dots, 4$, приведенные в Приложениях 1, 2 пересчитываются аналогичным образом с учетом (2.4).

Заключение. Как показал вычислительный эксперимент, максимальная ошибка аппроксимации полученных аналитических аппроксимирующих функциональных зависимостей не превышает 2×10^{-13} рад (1.5×10^{-6} м), что позволяет их эффективно использовать в высокоточных геодезических и навигационных расчетах.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Коэффициенты разложения в ряд функции $\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u}$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_l} + \frac{e^2 \cos^2 u_l}{2\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_l}} - \frac{e^4 \cos^4 u_l}{8\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^3}} + \\ &+ \frac{e^6 \cos^6 u_l}{16\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^5}} - \frac{5e^8 \cos^8 u_l}{128\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^7}} \\ \alpha_1 &= -\frac{e^2}{2\sqrt{1 - e^2 \cos^2 u_l}} + \frac{e^4 \cos^2 u_l}{4\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^3}} - \\ &- \frac{3e^6 \cos^4 u_l}{16\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^5}} + \frac{5e^8 \cos^6 u_l}{32\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^7}} \\ \alpha_2 &= -\frac{e^4}{8\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^3}} + \frac{3e^6 \cos^2 u_l}{16\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^5}} - \frac{15e^8 \cos^4 u_l}{64\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^7}} \\ \alpha_3 &= -\frac{e^6}{16\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^5}} + \frac{5e^8 \cos^2 u_l}{32\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^7}} \\ \alpha_4 &= -\frac{5e^8}{128\sqrt{(1 - e^2 \cos^2 u_l)^7}} \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Выражения для коэффициентов разложения β_n

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \phi \frac{24\alpha_2 k^4 + 6\alpha_3(8k^2 - 3)k^2 + \alpha_4(72k^4 - 54k^2 + 15)}{48k^5} \\ \beta_1 &= -\phi \frac{\alpha_4(18k^2 - 5) + 6k^2\alpha_3}{24k^3} \\ \beta_2 &= \phi \frac{\alpha_4}{6k} \\ \beta_3 &= \phi \frac{\alpha_2(2k^2 - 1)8k^4 + \alpha_3(8k^4 - 8k^2 + 3)2k^2 + \alpha_4(16k^6 - 24k^4 + 18k^2 - 5)}{16k^6} \\ \beta_4 &= -(\beta_0 + \beta_1 \sin^2 u_0 + \beta_2 \sin^4 u_0) \sin u_0 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_0} - \beta_3 \arcsin(k \sin u_0) \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Серापина Б.Б.* Геодезические основы карт. М.: Изд-во МГУ, 2001. 132 с.
2. *Wei-Kuo Tseng, Michael A. Earle, Jiunn-Liang Guo* Direct and inverse solutions with geodetic latitude in terms of longitude for rhumb line sailing // J. Navigation. 2012. V. 65. № 3. P. 549–559.
3. *Nihad E. Daidzic* Long and short-range air navigation on spherical Earth // Intern. J. Aviation, Aeronautics and Aerospace. 2017. V. 4. № 1. P. 1–54.
4. *Соколов С.В.* Аналитические модели пространственных траекторий для решения задач навигации // ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 1. С. 24–30.
5. *Розенберг И.Н., Соколов С.В., Уманский В.И., Погорелов В.А.* Теоретические основы тесной интеграции инерциально-спутниковых навигационных систем. М.: Физматлит, 2018. 306 с.

6. Кучеренко П.А., Соколов С.В. Аналитическое решение задачи аппроксимации функциональных зависимостей параметров геодезической линии // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 5. С. 104–112.
7. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. М.: Недра, 1979. 296 с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.

Analytical Approximation of the Geodesic Line Parameters Functional Dependencies

P.A. Kucherenko^{a,#} and S.V. Sokolov^{b,##}

^a Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russia

^b Moscow technical university of communications and informatics, Moscow, Russia

[#] e-mail: pavelpost83@mail.ru

^{##} e-mail: s.v.s.888@yandex.ru

The synthesis of high-precision analytical approximations of the dependence of the geodetic longitude on the reduced latitude on the geodesic line of the spheroid is considered. The obtained approximations are relevant for both geodesy and navigation problems, providing the possibility of a significant reduction in computational costs in high-precision geodetic and navigation calculations.

Keywords: orthodromic trajectory, spheroid, approximation of functional dependence

REFERENCES

1. Serapinas B.B. Geodesic Basics of Maps (Geodezicheskie osnovy kart) Moscow: MGU, 2001. 132 p. (in Russian)
2. Wei-Kuo Tseng, Michael A. Earle, Jiunn-Liang Guo Direct and inverse solutions with geodetic latitude in terms of longitude for rhumb line sailing // J. Navigation, 2012, vol. 65, no. 3, pp. 549–559.
3. Nihad E. Daidzic Long and short-range air navigation on spherical Earth // Intern. J. Aviation, Aeronautics, and Aerospace, 2017, vol. 4, no. 1, pp. 1–54.
4. Sokolov S.V. Analytical models of spatial trajectories for solving navigation problems // JAMM, 2015, vol. 79, no. 1, pp. 17–22.
5. Rozenberg I.N., Sokolov S.V., Umanskij V.I., Pogorelov V.A. Theoretical Foundations of Close Integration of Inertial-Satellite Navigation Systems (Teoreticheskie osnovy tesnoj integracii inercial'no-sputnikovyh navigacionnyh system). Moscow: Fizmatlit, 2018. 306 p. (in Russian)
6. Kucherenko P.A., Sokolov S.V. An analytical solution to the problem of approximating the functional dependences of the parameters of the geodesic line // Mech. Solids, 2019 (in Press).
7. Morozov V.P. Course of Spheroidal Geodesy (Kurs sferoidicheskoj geodezii) Moscow: Nedra, 1979. 296 p. (in Russian)
8. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tables of Integrals (Tablicy integralov). Moscow: Fizmatlit, 1964. 1100 p. (in Russian)