

УДК 519.632.6:519.958:531.33:517.956.328

## ВОЛНЫ, ЗАХВАЧЕННЫЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНОЙ КИРХГОФА НА УЛЬТРАНИЗКИХ ЧАСТОТАХ

© 2020 г. С. А. Назаров<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

\*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 06.08.2019 г.

После доработки 16.03.2020 г.

Принята к публикации 02.04.2020 г.

Рассмотрена полубесконечная пластина Кирхгофа со свободным краем, частично лежащая на винклеровском основании (задача Неймана для бигармонического оператора, возмущенного малым свободным членом с компактным носителем). Показано, что для любого малого  $\varepsilon > 0$  можно построить (неединственным образом) переменный коэффициент податливости основания порядка  $\varepsilon$ , при котором пластина приобретает собственное число  $\varepsilon^4$ , вкрапленное в непрерывный спектр, а соответствующая собственная функция экспоненциально затухает на бесконечности. Проверено, что более одного малого собственного числа быть не может. Примечательно то, что у акустического волновода (задача Неймана для оператора Лапласа) малое положительное возмущение не может спровоцировать появление собственного числа около точки отсечки непрерывного спектра.

*Ключевые слова:* полубесконечная пластина Кирхгофа, винклеровское основание, малое возмущение, пороговый резонанс, окологороговое собственное число в непрерывном спектре

**DOI:** 10.31857/S0032823520030066

**1. Постановка задачи.** Пластина  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  состоит из единичной (произвели масштабирование) полуполосы-волновода  $\Pi = \{x = (y, z): z \geq 0, y \in (-1/2, 1/2)\}$  и “резонатора”  $\Theta \subset \{x: z < 0\}$ , ограниченной области в нижней полуплоскости  $\mathbb{R}_-^2$  (тонирована на рис. 1). Границу  $\partial\Omega$  считаем гладкой, класса  $C^\infty$  для простоты. В области  $\Omega$  рассмотрим задачу о собственных колебаниях пластины Кирхгофа [1, § 30], лежащей частично на винклеровском основании [2, 3] малой переменной податливости

$$\Delta^2 u_\varepsilon(x) + a_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) = \lambda_\varepsilon \rho_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega \quad (1.1)$$

$$N^q(x, \nabla)u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (q = 2, 3) \quad (1.2)$$

Здесь  $u_\varepsilon$  – прогиб пластины,  $\lambda_\varepsilon = D^{-1}\omega_\varepsilon^2$  – спектральной параметр, причем  $\omega_\varepsilon > 0$  – частота колебаний,  $D > 0$  – цилиндрическая жесткость пластины, а плотность пластины

$$\rho_\varepsilon(x) = 1 + \varepsilon^{-2}\rho(x), \quad \rho(x) = 0, \quad x \in \Pi \quad (1.3)$$

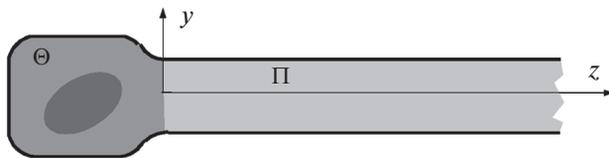


Рис. 1.

содержит большой параметр  $\varepsilon^{-2}$  и гладкую в  $\bar{\Theta}$  функцию  $\rho \geq 0$  (резонатор утяжелен), причем постоянная плотность однородного волновода  $\Pi$  сведена к единице. Кроме того,  $\nabla = \text{grad}$ ,  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  – оператор Лапласа, а  $N^q(x, \nabla)$  – дифференциальные операторы краевых условий, отвечающих свободному краю пластины [1, 4]

$$\begin{aligned} N^3(x, \nabla) &= \partial_n \Delta - (1 - \nu)(\partial_s \kappa(s) \partial_s - \partial_s^2 \partial_n) \\ N^2(x, \nabla) &= \Delta - (1 - \nu)(\partial_s^2 - \kappa(s) \partial_n) \end{aligned} \quad (1.4)$$

При этом  $\nu \in [0, 1/2)$  – коэффициент Пуассона,  $\kappa$  – кривизна дуги  $\partial\Omega$ ,  $\partial_n = \partial/\partial n$ ,  $\partial_s = \partial/\partial s$ , а  $(n, s)$  – локальная система криволинейных координат,  $n$  – ориентированное расстояние до границы,  $n > 0$  вне  $\Omega$ ,  $s$  – длина дуги на  $\partial\Omega$ , измеренная против часовой стрелки. На прямых участках границы  $\{x : y = \pm 1/2, z > 0\}$  имеем

$$\begin{aligned} N_{\pm}^3(\nabla) &= \pm \partial_y (\partial_y^2 + (2 - \nu) \partial_z^2), \quad N_{\pm}^2(\nabla) = \partial_y^2 + \nu \partial_z^2 \\ \partial_n &= \pm \partial_y = \pm \partial/\partial y, \quad \partial_s = \mp \partial_z = \mp \partial/\partial z \end{aligned} \quad (1.5)$$

Наконец,  $Da_{\varepsilon}$  – коэффициент податливости винклеровского основания  $\Theta$  (пластина не контактирует с основанием вдоль полуполосы  $\Pi$  – носители функций  $a_{\varepsilon}$  и  $\rho$  глубоко тонированы на рис. 1), который будем искать в виде

$$a_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^2 a_0(x) + \varepsilon^3 \sum_{j=0,1,2} \tau_{j\varepsilon} b_j(x) \quad (1.6)$$

Здесь и далее  $\varepsilon > 0$  – фиксированный малый параметр, а  $\tau_j$  – дополнительные параметры, подбор которых обеспечит существование собственного числа рассматриваемой задачи

$$\lambda_{\varepsilon} = \varepsilon^4 \quad (1.7)$$

Вариационная формулировка задачи (1.1), (1.2)

$$2E(u_{\varepsilon}, v; \Omega) + (a_{\varepsilon} u_{\varepsilon}, v)_{\Omega} = \lambda_{\varepsilon} (\rho_{\varepsilon} u_{\varepsilon}, v)_{\Omega} \quad v \in H^2(\Omega) \quad (1.8)$$

осуществляется на пространстве Соболева  $H^2(\Omega)$  и включает скалярное произведение  $(\cdot, \cdot)_{\Omega}$  в пространстве Лебега  $L^2(\Omega)$ , а также функционал энергии пластины Кирхгофа [1, § 30]

$$E(u, u; \Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ |\Delta u|^2 + 2(1 - \nu) \left( \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right|^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] dx \quad (1.9)$$

$$E(u, v; \Omega) = \frac{1}{4} (E(u + v, u + v; \Omega) - E(u - v, u - v; \Omega)) \quad (1.10)$$

Поскольку билинейная форма (1.10) в левой части интегрального тождества (1.8) симметрична, положительна и замкнута в гильбертовом пространстве  $H^2(\Omega)$ , задаче (1.1), (1.2) отвечает [5, Гл. 10] самосопряженный положительный оператор  $A^\varepsilon$  в пространстве  $L^2(\Omega)$  с областью определения

$$D(A^\varepsilon) = \{u \in H^4(\Omega): N^q u = 0 \text{ на } \partial\Omega, q = 2, 3\}$$

Непрерывный спектр  $\sigma_c^\varepsilon$  этого оператора и соответственно дифференциальной (1.1), (1.2) или вариационной (1.8) задач занимает полуось  $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty)$ , но в нем могут возникнуть собственные числа, образующие точечный спектр  $\sigma_p^\varepsilon$ , вкрапленные в непрерывный спектр и потому обладающие природной неустойчивостью. Именно последнее свойство требует применения процедуры “точной настройки” [6, 7] параметров задачи для образования точечного спектра.

Появление малого собственного числа (1.7) – необычный феномен: например, в подобной рассматриваемой задаче Неймана для оператора Лапласа, описывающей акустический волновод, малое возмущение не может вызвать возникновение собственного числа на интервале  $(0, t_\Theta)$ , верхний край  $t_\Theta > 0$  которого определяется формой и размерами резонатора  $\Theta$  (см. разд. 7). В обоих случаях на нижнем краю  $\lambda_+ = 0$  непрерывного спектра задач реализуются пороговые резонансы [8–11], однако их качество различается, так как в задаче Неймана с  $\lambda = 0$  имеется одна стоячая (не переносящая энергию) волна  $w^0(x) = 1$ , а в задаче Кирхгофа их три

$$v_0(x) = w^{10}(x) = 1, \quad v_1(x) := w^{20}(x) = z, \quad v_2(x) := w^{11}(x) = y \quad (1.11)$$

Именно линейно растущая волна  $v_1$  и обуславливает возможность построения экспоненциально затухающей собственной функции на ультрорнизкой частоте.

Еще раз укажем основное отличие представленного далее результата от всех опубликованных ранее исследований дискретного и непрерывного спектров разнообразных краевых задач для бигармонического оператора: посредством малых, физически осмысленных, возмущений дифференциальных операторов собственное число медленно поднимается с нижнего порога спектра и, погружаясь в непрерывный спектр, становится неустойчивым и нуждается в тщательном подборе нескольких свободных параметров пластины.

**2. Статическая задача.** Рассмотрим неоднородное бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (2.1)$$

с краевыми условиями

$$N^q(x, \nabla)u(x) = g^q(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (q = 2, 3) \quad (2.2)$$

Правые части  $f$  и  $g^q$  экспоненциально затухают при  $z \rightarrow +\infty$ , т.е.  $e^{\beta z} f \in L^2(\Omega)$  при некотором  $\beta > 0$ , а  $g^q$  – след на  $\partial\Omega$  функции  $G^q$ , причем  $e^{\beta z} G^q \in H^{4-q}(\Omega)$  и

$$\|(f, g^2, g^3); W_\beta(\Omega)\| := \|e^{\beta z} f; L^2(\Omega)\| + \sum_{q=2,3} \inf \left\{ \|e^{\beta z} G^q; H^{4-q}(\Omega)\| : g^q = G^q \text{ на } \partial\Omega \right\}$$

Установлено [12, 13], что найдется величина  $\beta(v) > 0$ , при которой в случае  $\beta \in (0, \beta(v))$  три условия ортогональности

$$J_p(f, g^2, g^3) := (f, v_p)_\Omega - (g^3, v_p)_{\partial\Omega} + (g^2, \partial_n v_p)_{\partial\Omega} = 0 \quad (p = 0, 1, 2) \quad (2.3)$$

обеспечивают существование единственного решения  $u$  задачи (2.1), (2.2) в весовом пространстве Соболева  $W_{\beta}^4(\Omega)$  с нормой  $\|u; W_{\beta}^4(\Omega)\| = \|e^{\beta z}u; H^4(\Omega)\|$  и оценку

$$\|u; W_{\beta}^4(\Omega)\| \leq c \|(f, g^2, g^3); W_{\beta}(\Omega)\|$$

Это решение далее обозначаем

$$u = R_{\beta}(f, g^2, g^3) \quad (2.4)$$

Приведем несколько утверждений, вытекающих из общих результатов [13] и полиномиального свойства [14] квадратичной формы (1.9): для любой ограниченной области  $\Xi \subset \mathbb{R}^2$  справедливо высказывание

$$E(u, u; \Xi) = 0, u \in H^2(\Xi) \Leftrightarrow u(x) = c_0 + c_1 z + c_2 y \quad (2.5)$$

Еще один факт, нужный для всех выводов: у однородной ( $f = 0$  и  $g^q = 0$ ) задачи (2.1), (2.2) нет решений в классе  $H^2(\Omega)$ .

Модельная задача для бигармонического уравнения в бесконечной полосе  $(-1/2, 1/2) \times \mathbb{R}$  помимо линейных функций (1.11) имеет решения

$$w^{12}(x) = \frac{1}{2}(z^2 - \nu y^2), \quad w^{21}(x) = yz, \quad w^{13}(x) = \frac{1}{6}z^3 - \frac{\nu}{2}y^2z \quad (2.6)$$

Других, линейно независимых (относительно указанных), решений с не более чем степенным ростом на бесконечности нет.

Решения (1.11), (2.6) связаны соотношениями

$$\partial_z w^{pq+1}(x) = w^{pq}(x), \quad q = 0, \dots, \tau_p - 1, \quad \partial_z w^{p0}(x) = 0, \quad p = 1, 2 \quad (2.7)$$

Здесь  $\tau_1 = 4$  и  $\tau_2 = 2$  — длины жордановых цепочек

$$W^{10}(y) = 1, \quad W^{11}(y) = 0, \quad W^{12}(y) = -\frac{\nu}{2}y^2, \quad W^{13}(y) = 0 \quad (2.8)$$

$$W^{20}(y) = y, \quad W^{21}(y) = 0. \quad (2.9)$$

Жордановы цепочки составлены из собственных и присоединенных векторов (скалярных функций в рассматриваемом случае) операторного пучка

$$\theta \mapsto \left\{ \partial_y^4 + 2\theta^2 \partial_y^2 + \theta^4, N_{\pm}^3(\partial_y, \theta) \Big|_{y=\pm 1/2}, N_{\pm}^2(\partial_y, \theta) \Big|_{y=\pm 1/2} \right\} \quad (2.10)$$

и отвечают нулевому собственному числу  $\theta = 0$ . По цепочкам выстраиваются полиномиальные решения задачи Кирхгофа в полосе  $(-1/2, 1/2) \times \mathbb{R}$

$$w^{pq}(y, z) = \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} z^k W^{pq-k}(y)$$

Длины  $\tau_p$  можно предсказать [13, 15] на основе характеристик (2.5) и (2.7) функций (1.11).

При нарушении условий ортогональности (2.3) задача (2.1), (2.2) все-таки имеет решение, обладающее степенным ростом на бесконечности, определенное с точностью до линейного слагаемого и допускающее представление

$$u(x) = \tilde{u}(x) + \chi(z) \sum_{p=1}^2 \sum_{q=0}^{\tau_p-1} c_{pq} w^{pq}(x) \quad (2.11)$$

Здесь остаток  $\tilde{y}_0$  экспоненциально затухает при  $z \rightarrow +\infty$ , т.е.  $e^{\beta z} \tilde{y} \in H^4(\Omega)$ , и  $\chi$  – гладкая срезающая функция

$$\chi(z) = 1 \quad \text{при} \quad z > 2l, \quad \chi(z) = 0 \quad \text{при} \quad z < l, \quad 0 \leq \chi \leq 1 \quad (2.12)$$

Коэффициенты  $c_{10}$ ,  $c_{20}$ ,  $c_{11}$  в представлении (2.11) произвольны, а коэффициенты  $c_{12}$ ,  $c_{21}$ ,  $c_{13}$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} c_{pq} &= \alpha_{pq} ((f, w^{p\tau_p - q})_{\Omega} - (g^3, w^{p\tau_p - 1 - q})_{\partial\Omega} + (g^2, \partial_n w^{p\tau_p - 1 - q})_{\partial\Omega}) \\ \alpha_{23} &= -\alpha_{13} = (1 - \nu^2)^{-1}, \quad \alpha_{21} = (2(1 - \nu))^{-1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Интегральные представления (2.13) выводятся согласно методу [16] при помощи подстановки функций  $u_0$  и  $w^{p\tau_p - 1 - q}$  в тождество

$$\begin{aligned} &(\Delta^2 u, w)_{\Omega_R} - (u, \Delta^2 w)_{\Omega_R} - (N^3 u, w)_{(\partial\Omega)_R} + (N^2 u, \partial_n w)_{(\partial\Omega)_R} - \\ &\quad - (\partial_n u, N^2 w)_{(\partial\Omega)_R} + (u, N^3 w)_{(\partial\Omega)_R} = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} (u(x) N^3(\nabla) w(x) - \partial_z u(x) N^2(\nabla) w(x) + \partial_z w(x) N^2(\nabla) u(x) - w(x) N^3(\nabla) u(x)) \Big|_{z=R} dz - \\ &\quad - 2(1 - \nu) \sum_{\pm} \left( u\left(\pm \frac{1}{2}, R\right) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}\left(\pm \frac{1}{2}, R\right) - w\left(\pm \frac{1}{2}, R\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\left(\pm \frac{1}{2}, R\right) \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

и предельного перехода  $R \rightarrow +\infty$ ; при этом  $\Omega_R = \{x \in \Omega: z < R\}$  – усеченный волновод с краем  $(\partial\Omega)_R = \{x \in \partial\Omega: z < R\}$ , а операторы (1.4) на сечении  $\{x \in \Pi: z = R\}$  принимают вид

$$N^3(\nabla) = \frac{\partial^3}{\partial z^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3}{\partial z \partial y^2}, \quad N^2(\nabla) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Формула Грина (2.14) включает внеинтегральные члены, происходящие от интегрирования вдоль контура  $\partial\Omega_R$  с угловыми точками  $(\pm 1/2, R)$  [1, 17], и поэтому ее следует признать обобщенной.

### 3. Волны на ультранизких частотах. Построим решения

$$w_{\varepsilon}(y, z) = e^{\varepsilon \theta_{\varepsilon} z} W_{\varepsilon}(y), \quad v_{\varepsilon}(y, z) = e^{\varepsilon^2 \tau_{\varepsilon} z} V_{\varepsilon}(y) \quad (3.1)$$

задачи в бесконечной полосе с параметром (1.7)

$$\begin{aligned} \Delta^2 w(x) &= \varepsilon^4 w(x), \quad x \in (-1/2, 1/2) \times \mathbb{R} \\ N_q(\nabla) w(\pm 1/2, z) &= 0, \quad z \in \mathbb{R} \quad (q = 2, 3) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Волна  $w_{\varepsilon}$  отвечает изгибным колебаниям полосы; после подстановки выражения для  $w_{\varepsilon}$  в соотношения (3.2) приходим к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения, которую следует интерпретировать как операторный пучок из-за полиномиального вхождения параметра  $\theta_{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} \partial_y^4 W_{\varepsilon}(y) + 2\varepsilon^2 \theta_{\varepsilon}^2 \partial_y^2 W_{\varepsilon}(y) + \varepsilon^4 \theta_{\varepsilon}^4 W_{\varepsilon}(y) &= \varepsilon^4 W_{\varepsilon}(y), \quad y \in (-1/2, 1/2) \\ \pm \partial_y^3 W_{\varepsilon}(\pm 1/2) \pm (2 - \nu) \varepsilon^2 \theta_{\varepsilon}^2 \partial_y W_{\varepsilon}(\pm 1/2) &= 0, \quad \partial_y^2 W_{\varepsilon}(\pm 1/2) + \nu \varepsilon^2 \theta_{\varepsilon}^2 W_{\varepsilon}(\pm 1/2) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Известны [18] разложения

$$W_\varepsilon(y) = \sum_{j=0}^3 \varepsilon^j \theta_\varepsilon^j W^{1j}(y) + \varepsilon^4 W'(y) + \varepsilon^6 W''(y) + \dots \quad (3.4)$$

$$\theta_\varepsilon = \theta_0 + \varepsilon^2 \theta'' + \dots$$

Здесь  $W^{1j}$  – собственные и присоединенные векторы (2.8), (2.9), числа  $\theta_0, \theta'' \in \mathbb{C}$  и функции  $W', W''$  подлежат определению, а многочлеме обозначает младшие асимптотические члены. В задаче (3.3) заменим величины  $W_\varepsilon$  и  $\theta_\varepsilon$  их разложениями (3.4) и соберем множители при одинаковых степенях малого параметра  $\varepsilon$ . Суммы коэффициентов при  $\varepsilon^j \theta_\varepsilon^j$ ,  $j = 0, \dots, 3$ , обращаются в нуль согласно определению собственных и присоединенных векторов (этот факт проверяется непосредственно), а коэффициенты при  $\varepsilon^4$  формируют задачу

$$\begin{aligned} \partial_y^4 W'(y) &= F'(y) := W^{10}(y) - \theta_0^4 (2\partial_y^2 W^{12}(y) + W^{10}(y)), \quad y \in (-1/2, 1/2) \\ \pm \partial_y^3 W'(\pm 1/2) &= G_{3\pm}' := \mp (2 - \nu) \theta_0^4 \partial_y W^{12}(\pm 1/2) \\ \partial_y^2 W'(\pm 1/2) &= G_{2\pm}' := -\nu \theta_0^4 W^{12}(\pm 1/2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Условия разрешимости задачи (3.5)

$$\int_{-1/2}^{1/2} F'(y) W^{p0}(y) dy - \sum_{\pm} \left( G_{3\pm}' W^{p0} \left( \pm \frac{1}{2} \right) \mp G_{2\pm}' \partial_y W^{p0} \left( \pm \frac{1}{2} \right) \right) = 0 \quad (3.6)$$

при  $p = 2$  выполнено, а в случае  $p = 1$  оно эквивалентно алгебраическому уравнению

$$1 - \theta_0^4 (1 - \nu^2) = 0 \quad (3.7)$$

Корни уравнения (3.7) имеют вид

$$\theta_{\pm}^{\text{re}} = \pm |\theta|, \quad \theta_{\pm}^{\text{im}} = \pm i |\theta| \quad (|\theta| = (1 - \nu^2)^{-1/4}) \quad (3.8)$$

Теперь задача (3.5) имеет решение  $W'$ , и оно становится единственным при соблюдении условий ортогональности

$$\int_{-1/2}^{1/2} W'(y) W^{p0}(y) dy = 0 \quad (p = 1, 2) \quad (3.9)$$

Итак, определены главные члены разложений (3.4). Поскольку  $W^{11} = W^{13} = 0$ , поправки  $W''$  и  $\theta''$  находятся из задачи

$$\begin{aligned} \partial_y^4 W''(y) &= F''(y) := \theta_0^2 W^{12}(y) - 4\theta'' \theta_0^3 (2\partial_y^2 W^{12}(y) + W^{10}(y)) - \\ &\quad - \theta_0^2 (2\partial_y^2 W'(y) + \theta_0^4 W^{12}(y)), \quad y \in (-1/2, 1/2) \\ \pm \partial_y^3 W''(\pm 1/2) &= G_{3\pm}'' := \mp 4(2 - \nu) \theta'' \theta_0^3 \partial_y W^{12}(\pm 1/2) \mp (2 - \nu) \theta_0^4 \partial_y W'(\pm 1/2) \\ \partial_y^2 W''(\pm 1/2) &= G_{2\pm}'' := -4\nu \theta'' \theta_0^3 W^{12}(\pm 1/2) - \nu \theta_0^4 W'(\pm 1/2) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Условие (3.6) разрешимости этой задачи превращается в линейное уравнение

$$-4\theta'' \theta_0^3 (1 - \nu^2) + i(\theta_0) = 0 \quad (3.11)$$

дающее величину  $\theta''$  для каждого корня (3.8). Наконец, задача (3.9), (3.10) приобретает единственное решение  $W''$ , подчиненное условиям ортогональности (3.9).

Асимптотическая процедура может быть продолжена, однако ни младшие члены, ни выражения  $W'$ ,  $W''$  и  $\theta''$ , в частности, слагаемое  $t(\theta_0)$  в уравнении (3.11), востребованы не будут. Понадобятся построенные главные члены асимптотики и известный [18] факт: функции

$$[0, \varepsilon_0) \ni \varepsilon \mapsto \theta_{\varepsilon\pm}^{\text{re/im}}, \quad [0, \varepsilon_0) \ni \varepsilon \mapsto W_{\varepsilon\pm}^{\text{re/im}}(y)$$

аналитические при некотором  $\varepsilon_0 > 0$ .

Вторая волна (3.1) отвечает крутильным колебаниям пластины, а ее ингредиенты отыскиваются из аналогичной (3.3) краевой задачи на отрезке  $(-1/2, 1/2)$  в виде

$$V_\varepsilon(y) = W^{20}(y) + \varepsilon^2 \vartheta_\varepsilon W^{21}(y) + \varepsilon^4 V(y) + \dots = y + \varepsilon^4 V(y) + \dots \quad (3.12)$$

$$\vartheta_\varepsilon = \vartheta_0 + \dots$$

В итоге условия (3.6) разрешимости задачи

$$\partial_y^4 V'(y) = F'(y) := y, \quad y \in (-1/2, 1/2)$$

$$\pm \partial_y^3 V'(\pm 1/2) = G_{3\pm}^3 = \mp(2 - \nu)\vartheta_0^2, \quad \partial_y^2 V'(\pm 1/2) = \mp \nu \vartheta_0^2/2$$

приводят к квадратному уравнению

$$\frac{1}{12} + 2(1 - \nu)\vartheta_0^2 = 0$$

с чисто мнимыми корнями

$$\vartheta_\pm = \pm i |\vartheta| \quad (|\vartheta| = (24(1 - \nu))^{-1/2}) \quad (3.13)$$

Величины  $\vartheta_{\varepsilon\pm}$  и  $W_{\varepsilon\pm}$ , включающие построенные главные асимптотические члены, аналитически зависят от переменной  $\varepsilon^2 \in [0, \varepsilon_0^2)$ .

**4. Формальная асимптотика захваченной волны.** В отличие от осциллирующих крутильных волн, заданных формулами (3.1) и (3.12), (3.13), среди четырех изгибных волн  $w_{\varepsilon\pm}^{\text{im/re}}$  с ингредиентами (3.11) волна  $w_{\varepsilon-}^{\text{re}}$  исчезает при  $z \rightarrow +\infty$  хоть и с малой, но экспоненциальной скоростью. Волны  $w_{\varepsilon\pm}^{\text{im}}$  медленно осциллируют, а волна  $w_{\varepsilon+}^{\text{re}}$  растет при  $z \rightarrow +\infty$ . Именно затухающую волну возьмем в качестве основного члена конструкции захваченной волны

$$u_\varepsilon^{\text{tr}}(y, z) = \chi(z)w_{\varepsilon-}^{\text{re}}(y, z) + u_\varepsilon(y, z) \quad (4.1)$$

Функция  $w_{\varepsilon-}^{\text{re}}$  определена только в единичной полосе и потому умножена на срезающую функцию (2.12), а дополнительное слагаемое  $u_\varepsilon$ , которое компенсирует невязки, оставленные произведением  $\chi w_{\varepsilon-}^{\text{re}}$  в уравнении (1.1) и краевых условиях (1.2), исчезает на бесконечности, однако в отличие от  $w_{\varepsilon-}^{\text{re}}$  с большой скоростью, т.е.  $e^{\beta z} u_\varepsilon \in H^4(\Omega)$  (ср. разд. 2). Сам остаток будем искать в виде

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \varepsilon^3 u_3(x) + \varepsilon^3 u'_\varepsilon(x) \quad (4.2)$$

Слагаемые  $u_j$  экспоненциально затухают на бесконечности и удовлетворяют задаче (2.1), (2.2) с некоторыми правыми частями  $f_j$  и  $g_j^q$ , имеющими компактные носители.

Учитывая разложения (3.4) и формулы (2.8), видим, что на резонаторе  $\Theta$  справедливо разложение

$$w_{\varepsilon-}^{\text{re}}(y, z) = 1 - \varepsilon |\theta| z + \varepsilon^2 |\theta|^2 \frac{1}{2} (z^2 - \nu y^2) - \varepsilon^3 \left( |\theta|^3 \frac{z}{2} \left( \frac{z^2}{3} - \nu y^2 \right) - |\theta| \theta'' z \right) + \tilde{w}_{\varepsilon-}^{\text{re}}(y, z) \quad (4.3)$$

$$\tilde{w}_{\varepsilon-}^{\text{re}}(y, z) = O(\varepsilon^4), \quad (y, z) \in \bar{\Theta}$$

Поэтому, обозначив  $[\Delta^2, \chi]$  и  $[N^q(\nabla), \chi]$  коммутаторы бигармонического оператора и дифференциальных операторов (1.5) со срезающей функцией (2.12), находим

$$\begin{aligned} f_0 &= -[\Delta^2, \chi]1, & g_0^q &= -[N^q(\nabla), \chi]1 \\ f_1 &= |\theta|[\Delta^2, \chi]z, & g_1^q &= |\theta|[N^q(\nabla), \chi]z \end{aligned} \quad (4.4)$$

Операторы (1.4) аннулируют линейные функции (1.11). Следовательно, первые два слагаемых в сумме (4.2) принимают вид

$$u_0(x) = 1 - \chi(z), \quad u_1(x) = -|\theta|(1 - \chi(z))z \quad (4.5)$$

и обладают компактными носителями, т.е. заведомо затухают на бесконечности. При учете соотношения (1.6) выводим выражения для правых частей задачи (2.1), (2.2) для слагаемого  $u_2$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \rho(x) - a_0(x) - \frac{|\theta|^2}{2}[\Delta^2, \chi(z)](z^2 - vy^2) \\ g_2^q(x) &= -\frac{|\theta|^2}{2}[N^q(\nabla), \chi(z)](z^2 - vy^2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Решение  $u_2$  экспоненциально затухает на бесконечности при выполнении трех условий разрешимости (2.3). В силу соотношений (2.13), (3.8) и обобщенной формулы Грина (2.14) получаем

$$\begin{aligned} J_2(f_2 - \rho + a_0, g_2^2, g_2^3) &= -\frac{|\theta|^2}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{\Omega_R} z \Delta^2 (\chi(z)(z^2 - vy^2)) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_{(\partial\Omega)_R} (zN^3(x, \nabla)(z^2 - vy^2) - \partial_n z N^2(x, \nabla)(z^2 - vy^2)) ds_x \right) = \\ &= -\frac{|\theta|^2}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \left( zN^3(\nabla)(z^2 - vy^2) - N^2(\nabla)(z^2 - vy^2) \right) \Big|_{z=R} dy = \\ &= |\theta|^2(1 - v^2) = \sqrt{1 - v^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Нетрудно подобрать нетривиальные неотрицательные функции  $a_0$  и  $\rho$ , для которых

$$\int_{\Theta} z(\rho(x) - a_0(x)) dx = -\sqrt{1 - v^2}, \quad \int_{\Theta} (\rho(x) - a_0(x)) dx = \int_{\Theta} y(\rho(x) - a_0(x)) dx = 0 \quad (4.8)$$

В итоге находим единственное исчезающее на бесконечности решение  $u_2$  задачи (2.1), (2.2) с правыми частями (4.6). Согласно разложениям (5.1) и (1.6) правые части задачи для функции  $u_3$  принимают вид

$$\begin{aligned} f_3(x) &= |\theta|z(\rho(x) - a_0(x)) + \sum_{j=0}^2 \tau_{j0} b_j(x) + [\Delta^2, \chi(z)] \left( \frac{|\theta|^3}{2} \left( \frac{1}{3} z^3 - vy^2 z \right) - |\theta| \theta'' z \right) \\ g_3^q(x) &= [N^q(\nabla), \chi(z)] \left( \frac{|\theta|^3}{2} \left( \frac{1}{3} z^3 - vy^2 z \right) - |\theta| \theta'' z \right) \quad (q = 2, 3) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для того чтобы соблюсти условия разрешимости (2.3) в случае выражений (4.9), подчиним слагаемые  $b_j$  в представлении (1.6) коэффициента податливости  $a_\epsilon$  двум требованиям. Во-первых, введем условия биортогональности

$$\int_{\Theta} b_j(x) v_k(x) dx = \delta_{j,k} \quad (4.10)$$

Здесь  $j, k = 0, 1, 2$  и  $\delta_{j,k}$  – символ Кронекера. Во-вторых, считаем, что при некотором  $\delta > 0$  носители слагаемых содержатся во множестве  $\{x : a_0(x) \geq \delta\}$ . В результате суммарный нормированный коэффициент податливости (1.6) остается положительным при малом  $\varepsilon > 0$ . Наконец, соотношения (4.10) позволяют удовлетворить упомянутые условия разрешимости за счет выбора главных членов  $\tau_{j0}$  представлений

$$\tau_{j\varepsilon} = \tau_{j0} + \tau'_{j\varepsilon} \quad (4.11)$$

Точные значения величин  $\tau_{j0}$  востребованы не будут.

Итак, задача (2.1), (2.2) с правыми частями (4.9) имеет единственное решение  $u_3(y, z)$ , затухающее при  $z \rightarrow +\infty$ . Отделенные члены асимптотики (4.2) захваченной волны  $w_\varepsilon^{\text{tr}}$  построены. Попутно определены (заведомо не единственным способом) главные члены представления (1.6) коэффициента податливости винклеровского основания. Намеченную процедуру можно было бы продолжить и найти младшие асимптотические члены, однако проверить сходимость полученных формальных рядов затруднительно. Поэтому изберем иной путь и применим процедуру точной настройки параметров волновода.

**5. Доказательство существования захваченной волны.** Сформируем задачу для остатка  $u'_\varepsilon$  из представления (4.1)

$$\Delta^2 u'_\varepsilon(x) = f'_\varepsilon(x; u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon), \quad x \in \Omega \quad (5.1)$$

$$N^q(x, \nabla)u'_\varepsilon(x) = g^{q'}(x; u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon), \quad x \in \partial\Omega \quad (q = 2, 3)$$

Здесь  $\tau' = (\tau'_{0\varepsilon}, \tau'_{1\varepsilon}, \tau'_{2\varepsilon})$  – набор остатков в разложениях (4.11) и (1.6). При учете соотношений (4.3), (4.4)–(4.7), (4.9) преобразуем правые части задачи (5.1) следующим образом

$$\begin{aligned} f'_\varepsilon(x; u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) &= -\sum_{j=0}^2 \tau'_{j\varepsilon} b_j(x) + \tilde{f}'_\varepsilon(x; u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) \\ \tilde{f}'_\varepsilon(x; u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) &= \varepsilon(u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \varepsilon^3 u_3(x) + \varepsilon^3 u'(x)) + \\ &+ (\rho(x) - a_0(x))(\chi(z)\varepsilon^{-1}(w_{\varepsilon-}^{\text{re}}(x) - 1) + \varepsilon|\theta|z) + \varepsilon u_2(x) + \varepsilon^2 u_3(x) + \varepsilon^2 u'(x) - \\ &- \sum_{j=0}^2 (\tau_{j0} + \tau'_{j\varepsilon}) b_j(x) (\chi(z)(w_{\varepsilon-}^{\text{re}}(x) - 1) + \varepsilon^2 u_2(x) + \varepsilon^3 u_3(x) + \varepsilon^3 u'_\varepsilon(x)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$g_\varepsilon^{q'}(x; u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) = \varepsilon^{-3} [N^q(x, \nabla), \chi(z)] \tilde{w}_{\varepsilon-}^{\text{re}}(x)$$

В силу предположения (4.10) условия разрешимости (2.3) задачи (5.1) в классе функций, исчезающих на бесконечности, принимают вид

$$\tau' = J(\tilde{f}'_\varepsilon, g_\varepsilon^{2'}, g_\varepsilon^{3'}) \quad (5.3)$$

Здесь  $J = (J_1, J_2, J_3)$  – вектор функционалов (2.3).

Заменим в формуле (5.2) коэффициенты  $\tau'_{j\varepsilon}$  их выражениями (5.3) и согласно обозначению (2.4) получим решения  $u'_\varepsilon \in W_\beta^4(\Omega)$  задачи (5.1)

$$u'_\varepsilon = R_\beta(\tilde{f}'_\varepsilon, g_\varepsilon^{2'}, g_\varepsilon^{3'}) \quad (5.4)$$

Положим

$$\mathcal{F}'_\varepsilon(u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) = (f'_\varepsilon, g_\varepsilon^{2'}, g_\varepsilon^{3'}, J(\tilde{f}'_\varepsilon, g_\varepsilon^{2'}, g_\varepsilon^{3'}))$$

и заметим, что

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{F}'_\varepsilon(0, 0); W_\beta \times \mathbb{R}^3 \right\| \leq c\varepsilon \\ & \left\| \mathcal{F}'_\varepsilon(u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) - \mathcal{F}'_\varepsilon(v'_\varepsilon, t'_\varepsilon); W_\beta \times \mathbb{R}^3 \right\| \leq c\varepsilon \left\| (u' - v'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon - t'_\varepsilon); W_\beta^4(\Omega) \times \mathbb{R}^3 \right\| \times \\ & \quad \times \left( 1 + \left\| (u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon); W_\beta^4(\Omega) \times \mathbb{R}^3 \right\| + \left\| (v'_\varepsilon, t'_\varepsilon); W_\beta^4(\Omega) \times \mathbb{R}^3 \right\| \right) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Перепишем соотношения (5.3), (5.4) как абстрактное уравнение

$$(u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) = \mathcal{Q}_\beta^\varepsilon(u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) \quad \text{в} \quad \mathcal{H}_\beta = W_\beta^4(\Omega) \times \mathbb{R}^3 \quad (5.6)$$

В силу неравенств (5.5) при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_r)$  оператор  $\mathcal{Q}_\beta^\varepsilon$  – сжимающий оператор на шаре

$$\mathcal{B}_r = \{(u, \tau) \in \mathcal{H}_\beta : \|(u, \tau); \mathcal{H}_\beta\| \leq r\}$$

в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}_\beta$ . Здесь  $r$  и  $\varepsilon_r$  – положительные, вообще говоря, малые числа. В итоге известный [19] принцип Банаха сжимающих отображений дает единственное решение  $(u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon) \in \mathcal{B}_r$  уравнения (5.6), к тому же допускающее оценку

$$\left\| (u'_\varepsilon, \tau'_\varepsilon); \mathcal{H}_\beta \right\| \leq c\varepsilon$$

При этом  $u'_\varepsilon \in W_\beta^4(\Omega)$  – решение задачи (5.1), а значит, функция (4.1), экспоненциально затухающая на бесконечности согласно формулам (3.1) и (3.6), удовлетворяет задаче (1.1), (1.2) с коэффициентом податливости (1.6). Искомая захваченная волна построена.

**6. Единственность захваченной волны на ультранизких частотах.** Предположим, что нашлась бесконечно малая положительная последовательность  $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ , при которой у задачи (1.1), (1.2) с ингредиентами (1.3), (1.6), (1.7) есть решение  $u_{\varepsilon_k} \in H^4(\Omega)$ , т.е. захваченная волна. Далее нижний индекс  $k$  у  $\varepsilon = \varepsilon_k$  не пишем и считаем, что

$$|a_\varepsilon(x)| \leq c\varepsilon^2, \quad |\rho_\varepsilon(x) - 1| \leq c\varepsilon^{-2}, \quad x \in \Theta, \quad a_\varepsilon(x) = 0, \quad \rho_\varepsilon(x) = 1, \quad x \in \Pi \quad (6.1)$$

Нормируем функции  $u_\varepsilon$  в пространстве  $L^2(\Theta)$ . Функция  $u_\varepsilon \in H^4(\Omega)$ , разумеется, принадлежит пространству  $W_{-\beta}^4(\Omega)$  функций с экспоненциальным ростом при  $z \rightarrow +\infty$ , на котором для решения  $u \in W_{-\beta}^4(\Omega)$  задачи (2.1), (2.2) доказана [12, 20] весовая оценка

$$\left\| u; W_{-\beta}^4(\Omega) \right\| \leq c \left( \left\| f, g^2, g^3 \right\|; W_{-\beta}(\Omega) \right) + \left\| u; L^2(\Theta) \right\| \quad (6.2)$$

Неравенство (6.2) с не зависящим от  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  множителем  $c$  сохраняется и при возмущении бигармонического оператора  $\Delta^2$  малым оператором  $S_\varepsilon = a^\varepsilon - \varepsilon^4(1 + \varepsilon^{-2}\rho)$ , т.е.

$$\left\| u_\varepsilon; W_{-\beta}^4(\Omega) \right\| \leq c \left\| u_\varepsilon; L^2(\Theta) \right\| = c$$

Итак, существует слабый в  $W_{-\beta}^4(\Omega)$  и сильный в  $L^2(\Theta)$  предел  $u_0$  последовательности  $\{u_{\varepsilon_k}\}_{k=1}^\infty$ . При этом, во-первых,

$$\left\| u_0; L^2(\Theta) \right\| = 1 \quad (6.3)$$

и, во-вторых,  $u_0 \in W_{-\beta}^4(\Omega)$  – решение однородной ( $f = 0, g^2 = g^3 = 0$ ) задачи (2.1), (2.2), которое ввиду медленного роста (показатель  $\beta > 0$  можно взять любым) превращается в линейную функцию

$$u_0(x) = c_0 + c_1 z + c_2 y$$

Убедимся в том, что  $c_1 = c_2 = 0$ , и тем самым установим, что на малой частоте  $\omega_\varepsilon = \sqrt{D\varepsilon^2}$  (ср. формулу (1.7)) имеется только одна захваченная волна, так как  $c_0 \neq 0$  в силу нормировки (6.3). С этой целью подставим в формулу Грина (2.14), переделанную для полосы  $\Pi$ , экспоненциально затухающую функцию  $u_\varepsilon \in H^4(\Omega)$  и одну из ограниченных относительно переменной  $z$  функций

$$\begin{aligned} w_\varepsilon^{(1)}(x) &= \varepsilon^{-2}(2w_{\varepsilon-}^{\text{re}}(x) - (1+i)w_{\varepsilon+}^{\text{im}}(x) - (1-i)w_{\varepsilon-}^{\text{im}}(x)) \\ w_\varepsilon^{(2)}(x) &= \varepsilon^{-1}(v_{\varepsilon+}^{\text{im}}(x) - v_{\varepsilon-}^{\text{im}}(x)) \end{aligned}$$

Перечисленные функции удовлетворяют однородному уравнению с оператором  $\Delta^2 - \varepsilon^4$  в полуполосе  $\Pi$  и краевым условиям (1.2) на ее боковых сторонах. Таким образом, формула Грина принимает вид

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1/2}^{1/2} (u_\varepsilon(x)N^3(\nabla)w_\varepsilon^{(p)}(x) + \partial_z u_\varepsilon(x)N^2(\nabla)w_\varepsilon^{(p)}(x) + \\ &+ \partial_z w_\varepsilon^{(p)}(x)N^2(\nabla)u_\varepsilon(x) + w_\varepsilon^{(p)}(x)N^3(\nabla)u_\varepsilon(x))|_{z=0} dy + \\ &+ 2(1-\nu) \sum_{\pm} \left( u_\varepsilon\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right) \frac{\partial^2 w_\varepsilon^{(p)}}{\partial y \partial z}\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right) - w_\varepsilon^{(p)}\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right) \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y \partial z}\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right) \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Слабая сходимость  $u_\varepsilon \cdot u_0$  в  $H^4(\Theta)$  влечет за собой сильную сходимость в пространстве Соболева  $H^3(-1/2, 1/2)$  на торце полуполосы  $\Pi$ . Кроме того, согласно полученным в разд. 3 асимптотическим разложениям имеем

$$\begin{aligned} w_\varepsilon^{(j)}(x) &= w_0^{(j)} + O(\varepsilon) \quad (j = 1, 2) \\ w_0^{(1)}(x) &= 2|\theta|^2(z^2 - \nu y^2), \quad w_0^{(2)}(x) = 2i\theta yz \end{aligned}$$

При учете соотношений (6.1) предельный переход  $\varepsilon \rightarrow +0$  в равенстве (6.4) дает соотношение

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} \left( u_0(x)N^3(\nabla)W_0^{(j)}(x) + \partial_z u_0(x)N^2(\nabla)w_0^{(j)}(x) \right)|_{z=0} dy + \\ + 2(1-\nu) \sum_{\pm} \pm u_0\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right) \frac{\partial^2 w_0^{(j)}}{\partial y \partial z}\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right) = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

В силу формул (2.13) выводим, что левая часть соотношения (6.5) равна  $2|\theta|\alpha_{23}c_2$  и  $2i|\theta|\alpha_{21}c_1$  соответственно при  $j = 1$  и  $j = 2$ . Таким образом, равенства  $c_1 = c_2 = 0$  доказаны.

**7. Формулировка результатов и пояснения к ним.** 1°. *Изгибные колебания.* В предыдущих разделах доказано следующее утверждение: найдутся такие положительные величины  $\varepsilon_0$  и  $\delta_0$ , что в случае  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  при правильном выборе коэффициентов (1.3) и (1.6) у краевой задачи (1.1), (1.2) (или (1.8) в вариационной постановке) появляется собственное число (1.7), вкрапленное в непрерывный спектр. Кроме того, обнаруженное собственное число простое, и на интервале  $(0, \varepsilon^4(1 + \delta_0))$  других собственных чисел нет. Соответствующая собственная функция экспоненциально затухает на бесконечности, и ее поведение при  $\varepsilon \rightarrow +0$  описывается асимптотическими разложениями

(4.1), (4.2), т.е. согласно формулам (2.8) и (3.1), (3.4) в главном реализуется как изгибные колебания пластины.

2°. *Упрощения.* Для того чтобы соблюсти физически осмысленное требование

$$a_\varepsilon(x) \geq 0 \quad (7.1)$$

пришлось придать локальное, но значительное возмущение плотности  $\rho_\varepsilon$  – иначе не удастся удовлетворить два первых ограничения (4.8) одновременно. Если отказаться от условия (7.1) и, утратив прикладной характер спектральной задачи, допустить коэффициент  $a_\varepsilon$  переменного знака, то по прежней схеме можно построить собственное число (1.7) и при  $\rho = 0$  в формуле (1.3).

3°. *Крутильные колебания.* В предположениях о симметрии области  $\Omega$  относительно оси абсцисс и четности функций  $a_\varepsilon$ ,  $\rho_\varepsilon$  можно искать собственные функции задачи (1.1), (1.2), нечетные по переменной  $y$ . Соответствующая постановка спектральной задачи сводится к сужению уравнения (1.1) и краевых условий (1.2) на половину волновода  $\Omega_+ = \{x = (y, z) \in \Omega : y > 0\}$

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_\varepsilon(x) + a_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) &= \lambda_\varepsilon \rho_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega_+ \\ N^q(x, \nabla)u_\varepsilon(x) &= 0, \quad x \in (\partial\Omega)_+ \quad (q = 2, 3) \end{aligned} \quad (7.2)$$

и постановки искусственных краевых условий

$$w_\varepsilon(0, z) = 0, \partial_y^2 w_\varepsilon(0, z) = 0, \quad (0, z) \in \Omega \quad (7.3)$$

Условия (7.3) имитируют свободно опёртый край пластины, и им удовлетворяет только вторая волна (3.1), порожденная жордановой цепочкой (2.9) с длиной два. Рассуждения и выкладки из разд. 6 показывают, что у задачи (7.2), (7.3) нет малых собственных чисел.

4°. *Акустический волновод.* В задаче Неймана для оператора Гельмгольца  $\Delta + \varepsilon^4$  в полосе  $(-1/2, 1/2) \times \mathbb{R}$  возникают две осциллирующие волны

$$w_{\varepsilon\pm}(y, z) = e^{\pm i\varepsilon^2 z}$$

Эти волны порождены жордановой цепочкой  $\{1, 0\}$  с длиной два, порожденной нулевым собственным числом аналогичного (2.10) операторного пучка

$$\theta \mapsto \left\{ -\partial_y^2 - \theta^2, \pm \partial_y \Big|_{y=\pm 1/2} \right\}$$

Таким образом, свойства решений задачи Неймана

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon(x) + \varepsilon a_0(x)u^\varepsilon(x) &= \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega \\ \partial_n u^\varepsilon(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (7.4)$$

с малым спектральным параметром  $\lambda^\varepsilon$  похожи на свойства решений видоизмененной задачи Кирхгофа (7.2), (7.3). В частности, у задачи (7.4) не может быть малых положительных собственных чисел.

5°. *Один открытый вопрос.* При помощи минимального принципа (см., например, [5]) нетрудно убедиться в том, что в случае

$$a_0(x) \leq 0, \quad x \in \Theta, \quad \int_\Theta a_0(x)dx < 0, \quad a_0(x) = 0, \quad x \in \Pi, \quad (7.5)$$

задача Неймана (7.4) обладает отрицательным собственным числом. При малом  $\varepsilon > 0$  у задачи (7.4) нет других собственных чисел около начала координат, так как пороговый резонанс реализуется только на пространстве постоянных функций. Впрочем ограничения (7.5) противоречат физическому смыслу задачи и вводятся здесь с чисто математической целью.

Аналогичный вывод о существовании отрицательного собственного числа можно сделать и в задаче (1.1), (1.2) при плотности  $\rho_\varepsilon = 1$  (способ возмущения существенно упрощается: утяжеление (1.3) “резонатора” не требуется и коэффициенте  $a_\varepsilon(x) = \varepsilon a_0(x)$ , подчиненном соотношениям (7.5). Остался открытым вопрос о построении коэффициентов  $\rho_\varepsilon$  и  $a_\varepsilon$ , обеспечивающих максимально возможное количество собственных чисел – двух отрицательных в дискретном спектре и одного положительного в непрерывном или трех отрицательных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01003).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
2. Крылов А.Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. Ленинград: изд-во АН СССР, 1931.
3. Hetenyi M. Beams on Elastic Foundation. Michigan: Univ. Press, 1946.
4. Бирман М.Ш. О вариационном методе Трэффца для уравнения  $\Delta^2 u = f$  // Докл. АН СССР. 1955. Т. 101. № 2. С. 201–204.
5. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
6. Назаров С.А. Асимптотика собственных чисел на непрерывном спектре регулярно возмущенного квантового волновода // Теоретическая и математическая физика. 2011. Т. 167. № 2. С. 239–262.
7. Назаров С.А. Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода // Функциональный анализ и его приложения. 2013. Т. 47. № 3. С. 37–53.
8. Molchanov S., Vainberg B. Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
9. Grieser D. Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. № 3. P. 718–752.
10. Pankrashkin K. Eigenvalue inequalities and absence of threshold resonances for waveguide junctions // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 449. № 1. P. 907–925.
11. Бахарев Ф.Л., Назаров С.А. Критерии отсутствия и наличия ограниченных решений на пороге непрерывного спектра в объединении квантовых волноводов // Алгебра и анализ. (в печати)
12. Nazarov S.A., Plamenevsky B.A. Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin: Walter de Gruyter. 1994.
13. Назаров С.А. Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи матем. наук. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
14. Назаров С.А. Самосопряженные эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы // Проблемы матем. анализа. Вып. 16. СПб.: изд-во СПбГУ. 1997. С. 167–192.
15. Назаров С.А. Несамосопряженные эллиптические задачи с полиномиальным свойством в областях, имеющих цилиндрические выходы на бесконечность // Записки науч. семинаров петербург. отделения матем. института РАН. 1997. Т. 249. С. 212–230.
16. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
17. Назаров С.А. Асимптотика собственных колебаний длинной двумерной пластины Кирхгофа с переменным сечением // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 9. С. 35–86.
18. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
19. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
20. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московск. матем. общества. 1963. Т. 16. С. 219–292.

## Waves Trapped by Semi-Infinite Kirchhoff Plate at Ultra-Low Frequencies

S.A. Nazarov<sup>a,#</sup>

<sup>a</sup> Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

<sup>#</sup>e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Semi-infinite Kirchhoff plate with traction-free edge which lays partly on the heterogeneous Winkler foundation (the Neumann problem for the bi-harmonic operator perturbed by a small free term with a compact support). It is shown that for arbitrary small  $\varepsilon > 0$ , there is the compliance coefficient (defined non-uniquely) of order  $\varepsilon$  such that the plate gets the eigenvalue  $\varepsilon^4$  which is embedded into the continuous spectrum and has the corresponding eigenfunction of the exponential decay at infinity. It is verified that other small eigenvalue does not exist. It is remarkable that in an acoustic waveguide (the Neumann problem for the Laplace operator), a small perturbation cannot give rise to an eigenvalue in the vicinity of the cutoff point of the continuous spectrum.

**Keywords:** semi-infinite Kirchhoff plate, Winkler foundation, small perturbation, threshold resonance, near-threshold eigenvalue embedded into continuous spectrum

### REFERENCES

1. *Mikhlin S.G.* Variational Methods in Mathematical Physics. Oxford: Pergamon Press, 1964. 548 p.
2. *Krylov A.N.* On Computation of Beams on Elastic Foundation. Leningrad: izd-vo AN USSR, 1931. 154 p. (in Russian)
3. *Hetenyi M.* Beams on Elastic Foundation. Michigan: Univ. Press, 1946.
4. *Birman M.S.* On the variational Trefftz method for the equation  $\Delta^2 u = f$  // Dok. AN SSSR, 1955, vol. 101, no. 2, pp. 201–204 (in Russian).
5. *Birman M.S., Solomyak M.Z.* Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. Dordrecht: Reidel, 1987.
6. *Nazarov S.A.* Asymptotic expansions of eigenvalues in the continuous spectrum of a regularly perturbed quantum waveguide // Theoretical and mathematical physics, 2011, vol. 167, no. 2, pp. 606–627.
7. *Nazarov S.A.* Enforced stability of a simple eigenvalue in the continuous spectrum // Funct. Anal. Appl., 2013, vol. 475, no. 3, pp. 195–209.
8. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys., 2007, vol. 273, no. 2, pp. 533–559.
9. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc., 2008, vol. 97, no. 3, pp. 718–752.
10. *Pankrashkin K.* Eigenvalue inequalities and absence of threshold resonances for waveguide junctions // J. Math. Anal. Appl., 2017, vol. 449, no. 1, pp. 907–925.
11. *Bakharev F.L., Nazarov S.A.* Criteria for the absence and existence of bounded solutions at the threshold frequency in a junction of quantum waveguides // arXiv: 1705.10481.
12. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin: Walter de Gruyter, 1994. 525 p.
13. *Nazarov S.A.* The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and the algebraic description of their attributes // Russ. Math. Surveys, 1999, vol. 54, no. 5, pp. 947–1014.
14. *Nazarov S.A.* Self-adjoint elliptic boundary-value problems. The polynomial property and formally positive operators // J. Math. Sci., 1998, vol. 92, no. 6, pp. 4338–4353.
15. *Nazarov S.A.* Non-self-adjoint elliptic problems with the polynomial property in domains having cylindrical outlets to infinity // J. Math. Sci., 1999, vol. 101, no. 5, pp. 3512–3522.
16. *Maz'ya V.G., Plamenevskij B.A.* On the coefficients in the asymptotics of solutions of elliptic boundary value problems in domains with conical points // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 123, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1984. pp. 57–88.
17. *Nazarov S.A.* Asymptotics of natural oscillations of a long two-dimensional Kirchhoff plate with varying cross-section // Sb. Math., 2018, vol. 209, no. 9, pp. 1287–1336.
18. *Vainberg M.M., Trenogin V.A.* Theory of Branching of Solutions of Non-Linear Equations. Leyden: Noordho Intern. Publ., 1974.
19. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, vol. I: Metric and Normed Spaces. Rochester: Graylock Press, 1957. 129 p.
20. *Kondrat'ev V.A.* Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points // Trans. Moscow Math. Soc., 1967, vol. 16, pp. 227–313.