

УДК 539.3



*Профессору Ефиму Ильичу ШИФРИНУ, признанному специалисту в области механики деформируемого твердого тела, механики разрушения, автору более 200 статей по механике и прикладной математике, члену редакционной коллегии ПММ, активному рецензенту и автору журнала, 14 апреля 2020 г. исполнилось 70 лет.*

*Редколлегия и редакция ПММ, коллеги и ученики сердечно поздравляют его с юбилеем, желают здоровья и новых творческих успехов.*

### **К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПО НЕ ПОЛНОСТЬЮ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ДАННЫМ НА ГРАНИЦЕ**

© 2020 г. Е. А. Каспарова<sup>1</sup>, Е. И. Шифрин<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

*\*e-mail: shifrin@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 18.03.2020 г.

После доработки 03.04.2020 г.

Принята к публикации 05.04.2020 г.

Рассматривается задача обнаружения и локализации полости, трещины или включения в упругом теле по частично переопределенным данным на его границе, полученным в результате одного статического испытания. Предложен новый подход к реше-

нию рассматриваемой задачи. Возможности предложенного подхода проиллюстрированы на примере задачи обнаружения полости в упругой пластине.

*Ключевые слова:* статическая теория упругости, геометрическая обратная задача, не полностью переопределенные граничные данные

**DOI:** 10.31857/S0032823520030042

**1. Введение.** Рассматривается обратная статическая задача обнаружения и локализации полости, трещины или включения в упругом теле по переопределенным данным на внешней границе. Задачи указанного типа изучались во многих публикациях. Были разработаны различные подходы к их решению. Применение к статическим обратным задачам теории упругости методов линейного отбора [1–3], факторизации [4, 5] и некоторых других, см. обзор [6], изначально развитых для обратных задач рассеяния, представлено в [7–9]. Среди методов, разработанных для решения статических обратных задач отметим метод, основанный на анализе дальнего поля [10–13], метод вложения [14, 15] и метод фундаментальных решений [16–18]. Одним из наиболее эффективных методов решения геометрических обратных задач является метод, основанный на принципе взаимности [19–28]. Обзор методов решения обратных задач теории упругости представлен в [29]. Все перечисленные методы обладают одним серьезным недостатком. Для их реализации требуется знать переопределенные данные (Дирихле и Неймана) на всей внешней границе рассматриваемой области. Применительно к геометрическим обратным задачам теории упругости это означает, что при проведении одного или нескольких статических экспериментов необходимо измерять как усилия, так и перемещения на всей внешней поверхности тела. Провести подобные эксперименты оказывается весьма непросто. Например, при применении оптических методов, удобно измерять перемещения только той части поверхности тела, которая свободна от приложенных усилий.

Целью данной статьи является разработка метода, позволяющего обнаружить и локализовать неоднородность в упругом теле в случае, когда усилия и перемещения известны лишь на части границы тела. Формально подход, основанный на оптимизации формы искомой неоднородности, позволяет решать обратную задачу, используя не полностью переопределенные данные на границе [30–32], однако реализация такого подхода достаточно сложна, к тому же целевая функция может иметь много локальных минимумов. Отметим также близкие по тематике к рассматриваемой в статье задаче работы по решению задачи Коши для уравнений эллиптического типа [33–36].

Идея предлагаемого в настоящей статье подхода к решению обратной задачи заключается в следующем. Рассматриваются расширяющиеся семейства подобластей занимаемой упругим телом области. Эти подобласти содержат часть границы, на которой заданы данные Коши. Для каждой подобласти рассматривается функционал типа Кона–Вогелиуса [37]. По значению этого функционала можно судить пересекает данная подобласть имеющийся дефект, или нет.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 дается постановка задачи. Общий подход к решению задачи обнаружения и локализации дефектов с помощью не полностью переопределенных данных представлен в разделе 3. Разработанный подход иллюстрируется на примере плоской задачи теории упругости в разделе 4. Выводы представлены в разделе 5.

**2. Постановка задачи.** Пусть  $\Omega \subset R^3$  – ограниченная односвязная область с границей  $\partial\Omega$ . Представим границу в виде объединения подмножеств  $\partial\Omega = \partial\bar{\Omega}_D \cup \partial\bar{\Omega}_N \cup \partial\bar{\Omega}_C$ ,  $\partial\Omega_D \cap \partial\Omega_N = \partial\Omega_N \cap \partial\Omega_C = \partial\Omega_C \cap \partial\Omega_D = \emptyset$ ,  $\emptyset \neq \partial\Omega_C \subset \partial\Omega$ . Здесь черта сверху означает замыкание множества. Пусть  $D \subset \Omega$  – некоторая подобласть. Предположим, что

линейно упругое тело с модулем сдвига  $\mu_M$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_M$  занимает область  $S = \Omega \setminus D$ . Предполагается также, что линейно упругое тело с модулем сдвига  $\mu_I$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_I$  занимает область  $D$ . Случаи полости и жесткого включения можно рассматривать как предельные при  $\mu_I \rightarrow 0$  и  $\mu_I \rightarrow \infty$ , соответственно. Введем декартову систему координат  $Ox_1x_2x_3$ . Напряженно-деформированное состояние в теле, занимающем область  $S$ , будем помечать верхним индексом  $M$ :  $\sigma_{ij}^M$  – тензор напряжений,  $e_{ij}^M$  – тензор деформаций,  $\mathbf{u}^M$  – вектор перемещений. Уравнения линейной теории упругости в теле  $S$  имеют вид

$$\begin{aligned} e_{ij}^M(x) &= \frac{1}{2}(u_{i,j}^M(x) + u_{j,i}^M(x)) \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in S \\ \sigma_{ij}^M(x) &= 2\mu_M \left( \frac{\nu_M}{1 - 2\nu_M} \theta^M(x) \delta_{ij} + e_{ij}^M(x) \right), \quad \theta^M(x) = \sum_{k=1}^3 e_{kk}^M(x) \\ \sigma_{ij,j}^M(x) &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Напряженно-деформированное состояние в теле, занимающем область  $D$ , будем помечать верхним индексом  $I$ :  $\sigma_{ij}^I$  – тензор напряжений,  $e_{ij}^I$  – тензор деформаций,  $\mathbf{u}^I$  – вектор перемещений. Напряженное состояние в  $D$  описывается уравнениями (2.1) с заменой верхних и нижних индексов  $M$  на  $I$ .

Предполагается, что между телами, занимающими области  $S$  и  $D$ , имеет место полное сцепление

$$\mathbf{u}^M(x) = \mathbf{u}^I(x), \quad \sigma_{ij}^M(x) N_j(x) = \sigma_{ij}^I(x) N_j(x), \quad x \in \partial D \quad (2.2)$$

Здесь  $\mathbf{N}(x) = (N_1(x), N_2(x), N_3(x))$  – единичная нормаль к границе области  $D$ , обозначаемой  $\partial D$ , в точке  $x$ .

Предполагается, что на  $\partial\Omega$  заданы следующие переопределенные граничные условия

$$\mathbf{u}^M(x') = \mathbf{u}^0(x'), \quad x' \in \partial\Omega_D \quad (2.3)$$

$$\sigma_{ij}^M(x') n_j(x') = t_i^0(x'), \quad x' \in \partial\Omega_N \quad (2.4)$$

$$\mathbf{u}^M(x') = \mathbf{u}^C(x'), \quad \sigma_{ij}^M(x') n_j(x') = t_i^C(x'), \quad x' \in \partial\Omega_C \quad (2.5)$$

Здесь  $\mathbf{n}(x') = (n_1(x'), n_2(x'), n_3(x'))$  – единичная внешняя нормаль к  $\partial\Omega$  в точке  $x'$ ,  $\mathbf{u}^0(x) \in H^{1/2}(\partial\Omega_D)$ ,  $\mathbf{u}^C(x) \in H^{1/2}(\partial\Omega_C)$ ,  $t_i^0(x) \in H^{-1/2}(\partial\Omega_N)$  и  $t_i^C(x) \in H^{-1/2}(\partial\Omega_C)$  – известные функции,  $H^1(\Omega)$  – классическое пространство Соболева порядка 1, для части границы  $\Gamma \subset \partial\Omega$  пространство  $H^{1/2}(\Gamma)$  – пространство следов  $v|_\Gamma$  при  $v(x) \in H^1(\Omega)$ ,  $H^{-1/2}(\Gamma)$  – пространство, сопряженное к пространству  $H^{1/2}(\Gamma)$ .

Задача заключается в обнаружении и локализации включения  $D$  с помощью известных, переопределенных данных (2.3)–(2.5) на границе.

**3. Метод обнаружения дефекта.** Рассмотрим однородное, изотропное, линейно-упругое тело с модулем сдвига  $\mu_M$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_M$ , которое занимает всю область  $\Omega$ . Упругое поле в теле  $\Omega$ , удовлетворяющее граничным условиям (2.3),

(2.4) и второму из условий (2.5), обозначим верхним индексом  $h$ . Введем упругое поле

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}(x) &= \mathbf{u}^M(x) - \mathbf{u}^h(x), \quad \Delta e_{ij}(x) = e_{ij}^M(x) - e_{ij}^h(x) \\ \Delta \sigma_{ij}(x) &= \sigma_{ij}^M(x) - \sigma_{ij}^h(x), \quad x \in S \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поле  $\Delta \mathbf{u}(x)$  удовлетворяет уравнениям теории упругости (2.1) в области  $S$ , а также следующим условиям на внешней границе области  $S$

$$\Delta \mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_D \quad (3.2)$$

$$\Delta \sigma_{ij}(x) n_j(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_N \quad (3.3)$$

$$\Delta \mathbf{u}(x') = \mathbf{u}^C(x') - \mathbf{u}^h(x'), \quad \Delta \sigma_{ij}(x') n_j(x') = 0, \quad x' \in \partial\Omega_C \quad (3.4)$$

Пусть  $\Omega_s, 0 < s \leq s^*$  – семейство подобластей исходной области  $\Omega$ , удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned} s_1 < s_2 &\Rightarrow \Omega_{s_1} \subset \Omega_{s_2} \\ s \rightarrow 0 &\Rightarrow \Omega_s \rightarrow \Gamma_0, \quad \Gamma_0 \subset \partial\Omega_C \subset \partial\Omega \\ \Omega_{s^*} &= \Omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

Обозначим  $\Gamma_s$  границу подобласти  $\Omega_s$ . Граница  $\Gamma_s$  может быть представлена в виде

$$\Gamma_s = \partial\bar{\Omega}_{Cs} \cup \partial\bar{\Omega}_{Ds} \cup \partial\bar{\Omega}_{Ns} \cup \bar{\Gamma}_{as} \quad (3.6)$$

Здесь  $\partial\Omega_{Cs} = \Gamma_s \cap \partial\Omega_C$ ,  $\partial\Omega_{Ds} = \Gamma_s \cap \partial\Omega_D$ ,  $\partial\Omega_{Ns} = \Gamma_s \cap \partial\Omega_N$ , а поверхность  $\Gamma_{as}$  пересекает область  $\Omega$ . В каждой из подобластей  $\Omega_s$  выполняются соотношения

$$\begin{aligned} e_{ij}^M(x) &= \frac{1}{2} (u_{i,j}^M(x) + u_{j,i}^M(x)), \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_s \\ \sigma_{ij}^M(x) &= 2\mu_M \left( \frac{\nu_M}{1 - 2\nu_M} \theta^M(x) \delta_{ij} + e_{ij}^M(x) \right), \quad \theta^M(x) = \sum_{k=1}^3 e_{kk}^M(x) \\ \sigma_{ij,j}^M(x) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Обозначим  $\mathbf{u}^1(x)$  упругое поле, удовлетворяющее уравнениям (3.7) и следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^1(x') &= 0, \quad x' \in \partial\Omega_{Ds} \\ \sigma_{ij}^1(x') n_j(x') &= 0, \quad x' \in \partial\Omega_{Ns} \\ \sigma_{ij}^1(x') n_j(x') &= 0, \quad x' \in \partial\Omega_{Cs} \\ \sigma_{ij}^1(x') n_j(x') &= p_j(x'), \quad x' \in \Gamma_{as} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь  $\mathbf{p}(x') = (p_1(x'), p_2(x'), p_3(x')) \in H^{-1/2}(\Gamma_{as})$ . Заметим, что в случае  $\partial\Omega_{Ds} = \emptyset$  усилия  $\mathbf{p}(x')$  должны быть самоуравновешенными.

Обозначим  $\mathbf{v}(x^*)$  – сужение вектор-функции  $\mathbf{u}^1(x)$  на часть границы  $\partial\Omega_{Cs}$ , ( $\mathbf{v}(x^*) = \mathbf{u}^1(x^*)$ ,  $x^* \in \partial\Omega_{Cs}$ ),  $\mathbf{v}(x^*) \in H^{1/2}(\partial\Omega_{Cs})$ . Таким образом, решение задачи (3.7), (3.8) порождает линейный оператор

$$T: \mathbf{p}(x') \in H^{-1/2}(\Gamma_{as}) \rightarrow \mathbf{v}(x^*) \in H^{1/2}(\partial\Omega_{Cs}) \quad (3.9)$$

Если  $\Omega_s \cap D = \emptyset$ , то вектор-функция  $\Delta \mathbf{u}(x^*)$ , определенная в (3.4), удовлетворяет условию  $\Delta \mathbf{u}(x^*) \in \text{Im } T$ . В противном случае  $\Delta \mathbf{u}(x^*) \notin \text{Im } T$ . Данное утверждение следует из единственности решения задачи Коши для уравнений теории упругости. Таким образом, получен критерий, позволяющий определить, удовлетворяется ли условие  $\Omega_s \cap D = \emptyset$ . Для анализа выполнения условия  $\Delta \mathbf{u}(x^*) \in \text{Im } T$  воспользуемся функционалом типа Кона–Вогелиуса [37]. Обозначим  $\mathbf{u}^2(x)$  – упругое поле, удовлетворяющее уравнениям (3.7) в области  $\Omega_s$  и граничным условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^2(x') &= 0, & x' \in \partial\Omega_{Ds} \\ \sigma_{ij}^2(x') n_j(x') &= 0, & x' \in \partial\Omega_{Ns} \\ \mathbf{u}^2(x') &= \Delta \mathbf{u}(x'), & x' \in \partial\Omega_{Cs} \\ \sigma_{ij}^2(x') n_j(x') &= p_i(x'), & x' \in \Gamma_{as} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Упругие поля  $\mathbf{u}^1(x)$  и  $\mathbf{u}^2(x)$  определяются усилиями  $\mathbf{p}(x')$ . Построим функционал, зависящий от  $\mathbf{p}(x')$

$$F(\mathbf{p}) = \int_{\Gamma_s} \left( \sigma_{ij}^1(x') n_j(x') - \sigma_{ij}^2(x') n_j(x') \right) \left( u_i^1(x') - u_i^2(x') \right) dS \quad (3.11)$$

Из (3.11) следует, что  $F(\mathbf{p}) \geq 0$ . Обозначим  $F_{\min} = \min F(\mathbf{p})$ . Если  $F_{\min} = 0$ , то  $D \cap \Omega_s = \emptyset$ . В противном случае  $D \cap \Omega_s \neq \emptyset$ .

Рассмотрим базис в пространстве усилий  $\mathbf{p}^1(x')$ ,  $\mathbf{p}^2(x')$ , ..., где  $\mathbf{p}^k(x') \in H^{-1/2}(\Gamma_{as})$ . Искомую вектор-функцию  $\mathbf{p}^*(x')$ , на которой достигается минимум функционала  $F(\mathbf{p})$ , разложим по введенному базису

$$\mathbf{p}^*(x') = \sum_k c_k \mathbf{p}^k(x') \quad (3.12)$$

Решение уравнений (3.7) с граничными условиями (3.8) в случае  $\mathbf{p}(x') = \mathbf{p}^k(x')$  обозначим  $\mathbf{u}^{k1}(x)$ . Решение уравнений (3.7) с граничными условиями (3.10) представим в виде суммы двух решений

$$\mathbf{u}^2(x) = \mathbf{u}^{02}(x) + \tilde{\mathbf{u}}^2(x) \quad (3.13)$$

Здесь  $\mathbf{u}^{02}(x)$  – решение уравнений (3.7) со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{02}(x') &= 0, & x' \in \partial\Omega_{Ds} \\ \sigma_{ij}^{02}(x') n_j(x') &= 0, & x' \in \partial\Omega_{Ns} \\ \mathbf{u}^{02}(x') &= \Delta \mathbf{u}(x'), & x' \in \partial\Omega_{Cs} \\ \sigma_{ij}^{02}(x') n_j(x') &= 0, & x' \in \Gamma_{as} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$\tilde{\mathbf{u}}^2(x)$  – решение (3.7) с граничными условиями

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^2(x') &= 0, & x' \in \partial\Omega_{Ds} \\ \tilde{\sigma}_{ij}^2(x') n_j(x') &= 0, & x' \in \partial\Omega_{Ns} \\ \tilde{\mathbf{u}}^2(x') &= 0, & x' \in \partial\Omega_{Cs} \\ \tilde{\sigma}_{ij}^2(x') n_j(x') &= p_i(x'), & x' \in \Gamma_{as} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Решение уравнений (3.7) с граничными условиями (3.15) в случае  $\mathbf{p}(x') = \mathbf{p}^k(x')$  обозначим  $\mathbf{u}^{k2}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Рассмотрим конечномерное подпространство  $P_N$  с базисом  $\mathbf{p}^k(x')$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . Вектор-функции  $\mathbf{p}(x')$  из этого подпространства имеют вид

$$\mathbf{p}(x') = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{p}^k(x') \quad (3.16)$$

Из (3.11), (3.13)–(3.16) следует, что функционал  $F(\mathbf{p})$  на подпространстве  $P_N$  может быть представлен в виде

$$F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{c}) = - \int_{\partial\Omega_{Cs}} \left( \sigma_{ij}^{02}(x') + \sum_{k=1}^N c_k \sigma_{ij}^{k2}(x') \right) n_j(x') \left( \sum_{m=1}^N c_m u_i^{m1}(x') - \Delta u_i(x') \right) dS \quad (3.17)$$

Здесь  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)^T$ , верхний индекс  $T$  означает транспонирование матрицы,  $\sigma_{\alpha\beta}^{02}(x')$  и  $\sigma_{\alpha\beta}^{k2}(x')$  – напряжения, соответствующие упругим полям  $\mathbf{u}^{02}(x)$  и  $\mathbf{u}^{k2}(x)$ .

Минимизация функции  $F(\mathbf{c})$  приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{Ac} = \mathbf{b}, \quad (3.18)$$

где  $\mathbf{A} = (a_{rm})$  – матрица,

$$a_{rm} = \int_{\partial\Omega_{Cs}} \left( \sigma_{ij}^{r2}(x') u_i^{m1}(x') + \sigma_{ij}^{m2}(x') u_i^{r1}(x') \right) n_j(x') dS,$$

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N)^T$  – вектор,

$$b_r = \int_{\partial\Omega_{Cs}} \left( \sigma_{ij}^{r2}(x') \Delta u_i(x') - \sigma_{ij}^{02}(x') u_i^{r1}(x') \right) n_j(x') dS$$

Система линейных алгебраических уравнений (3.18) является плохо обусловленной. Для ее решения воспользуемся регуляризацией Тихонова [38]. Таким образом, решение системы уравнений (3.18) заменяется задачей минимизации функции  $\Phi(\mathbf{c})$

$$\Phi(\mathbf{c}) = \|\mathbf{Ac} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{c}\|^2 \quad (3.19)$$

Здесь  $\|\mathbf{c}\|^2 = \sum_{k=1}^N c_k^2$ . Параметр  $\lambda$  в рассмотренном ниже примере определяется с помощью метода  $L$  – кривой [39, 40].

**4. Численный пример.** Проиллюстрируем разработанный метод на примере плоской задачи теории упругости. Рассмотрим пластину, занимающую квадратную область  $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : |x_i| \leq L, i = 1, 2\}$ ,  $L = 10$  см. В качестве дефекта  $D$  возьмем прямоугольную полость с центром в точке  $(x_1^0, x_2^0) = (-1, -2)$  и размерами  $2 \times 4$  см. Координаты центра полости даны в см. Возьмем в качестве упругих постоянных материала модуль Юнга  $E_M = 70$  ГПа и коэффициент Пуассона  $\nu_M = 0.33$ . Обозначим  $A(-L, -L)$ ,  $B(-L, L)$ ,  $C(L, L)$  и  $D(L, -L)$  – вершины квадратной области  $\Omega$ , см. рис. 1.

На границе пластины предполагаются заданными следующие граничные условия: нижняя сторона квадрата закреплена  $\mathbf{u}(x') = 0$ ,  $x' \in \partial\Omega_D = (A, D)$ ; на верхней стороне заданы однородные растягивающие усилия  $\sigma_{12}(x') = 0$ ,  $\sigma_{22}(x') = \sigma = 190$  МПа; данные Коши заданы на боковых сторонах квадрата  $\partial\Omega_C = (A, B) \cup (C, D)$ . Предполагается, что боковые стороны свободны от усилий  $\sigma_{12}(x') = \sigma_{11}(x') = 0$ ,  $x' \in \partial\Omega_C$ . Перемещения  $\mathbf{u}(x')$ ,  $x' \in \partial\Omega_C$  определяются путем численного решения прямой задачи.

Для идентификации правой границы дефекта рассмотрим семейство прямоугольников  $\Omega_s = EFCD$ , где координаты вершин  $E$  и  $F$  зависят от параметра  $s$  следующим

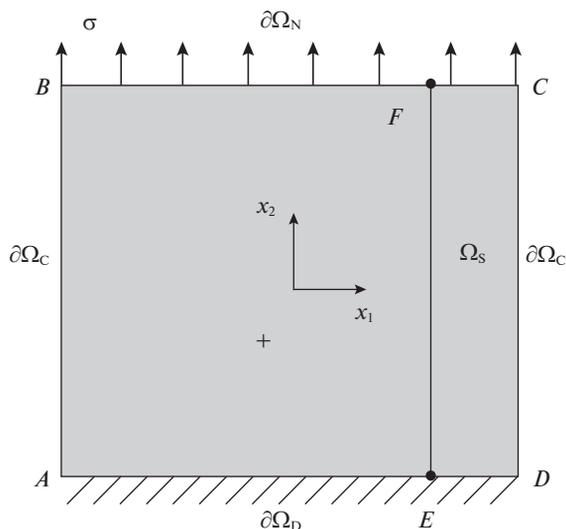


Рис. 1.

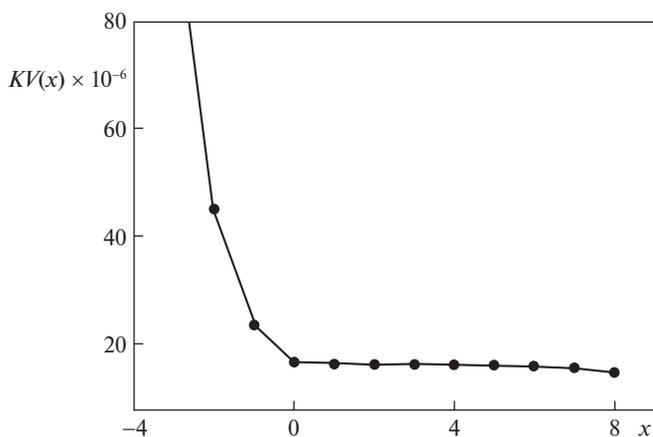


Рис. 2.

образом:  $E = (L - s, -L)$ ,  $F = (L - s, L)$ ,  $0 < s \leq 2L$ . Согласно введенным выше обозначениям, имеем  $\partial\Omega_{Cs} = (C, D)$ ,  $\partial\Omega_{Ds} = (E, D)$ ,  $\partial\Omega_{Ns} = (F, C)$  и  $\Gamma_{as} = (E, F)$ . В рассматриваемом примере неизвестные функции  $p_1(x') = -\sigma_{11}(x')$  и  $p_2(x') = -\sigma_{21}(x')$ ,  $x' = (L - s, x_2) \in \Gamma_{as}$  являются функциями от координаты  $x_2$ . Аппроксимируем неизвестные компоненты вектора усилий с помощью кусочно-линейных базисных функций. При минимизации функции  $\Phi(\mathbf{c})$ , определенной в (3.19), используем одинаковое количество базисных функций  $N$  и фиксированное значение  $\lambda$  для всех подобластей семейства  $\Omega_s$ . Обозначим  $KV(\Omega_s, N, \lambda) = \min \Phi(\mathbf{c})$ . Для рассматриваемого семейства подобластей  $\Omega_s$ , при фиксированных значениях  $N$  и  $\lambda$ ,  $KV$  – функционал становится функцией проекции точек  $E$  и  $F$  на ось абсцисс  $x = L - s$ ,  $KV(\Omega_s, N, \lambda) = KV(x)$ .

График функции  $KV(x)$  для  $N = 15$  и  $\lambda = 0.003$  представлен на рис. 2. По оси ординат отложены величины  $KV(x) \times 10^{-6}$  Н. Проекция дефекта на ось абсцисс помечена

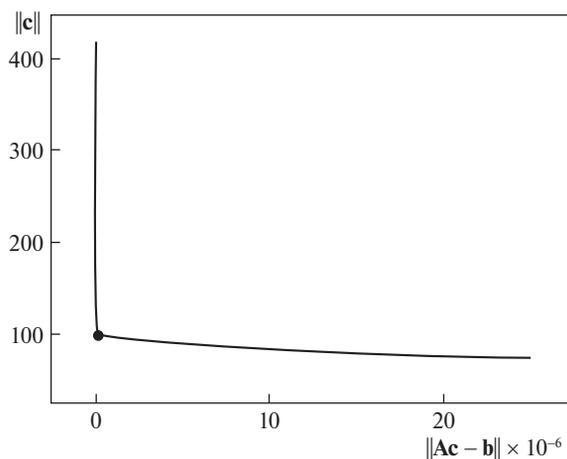


Рис. 3.

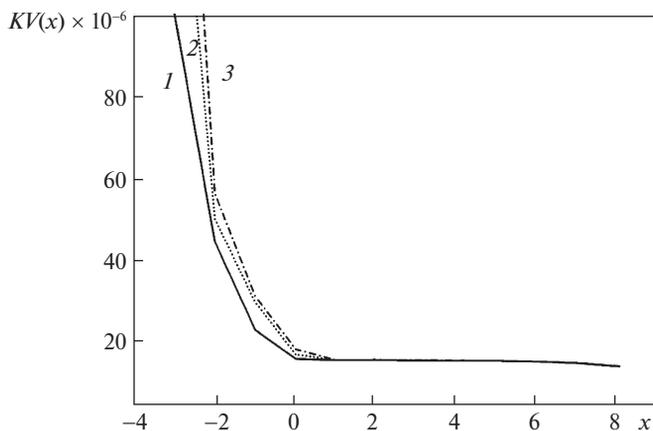


Рис. 4.

толстой горизонтальной линии. По рис. 2 видно, что при приближении к правой границе дефекта начинается резкий рост функции  $KV(x)$ . Таким образом, для выбранного семейства подобластей  $\Omega_s$  по поведению функции  $KV(x)$  можно обнаружить присутствие дефекта и приближенно определить расположение его правой границы.

Как указывалось выше, значение параметра  $\lambda$  определялось методом  $L$ -кривой. Типичный вид  $L$ -кривой в случае  $N = 15$  и области  $\Omega_s$ , определяемой  $x$  – координатой точки  $E$ , равной 0, представлен на рис. 3. По оси абсцисс отложены величины  $\|Ac - b\| \times 10^{-6}$ . Значение  $\lambda$ , соответствующее максимальной кривизне  $L$ -кривой, в данном случае равно  $\lambda = 0.01$ . Для разных подобластей одного семейства  $\Omega_s$  значения  $\lambda$ , определяемые с помощью  $L$ -кривой, вообще говоря, разные. Поэтому, при использовании одинаковых значений  $\lambda$  для всех областей семейства  $\Omega_s$ , важно знать, как зависит результат обнаружения границы дефекта от выбранного значения  $\lambda$ .

Графики функций  $KV(x)$ , построенные при  $N = 15$  и различных значениях  $\lambda$ , представлены на рис. 4. Кривая 1 соответствует  $\lambda = 0.003$ , кривая 2 соответствует

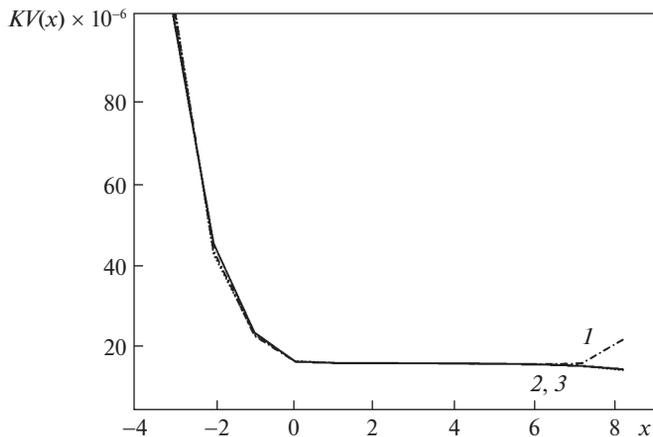


Рис. 5.

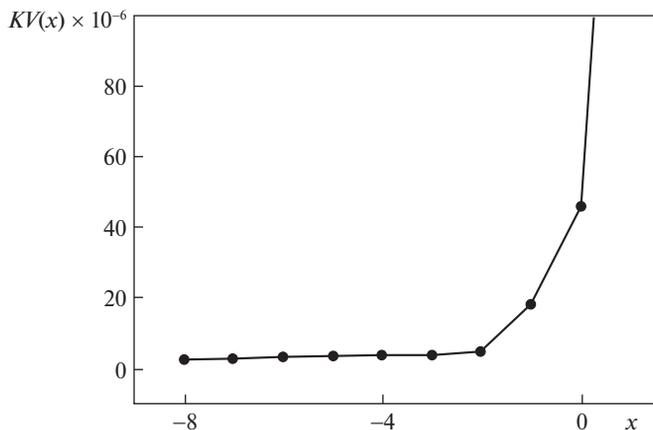


Рис. 6.

$\lambda = 0.007$  и кривая  $3 - \lambda = 0.01$ . Из рис. 4 видно, что правая граница дефекта достаточно хорошо определяется при вариации значений  $\lambda$  в достаточно широком диапазоне. Зависимость  $KV(x)$  от количества используемых для аппроксимации базисных функций представлена на рис. 5. Здесь кривые 1, 2 и 3 соответствуют  $N = 13$ ,  $N = 15$  и  $N = 17$ . Рис. 5 показывает, что результаты устанавливаются, начиная с некоторого  $N$ . В рассмотренном примере результаты ведут себя устойчиво с  $N = 15$ .

Аналогичным образом может быть определена и левая граница дефекта. Для этого рассмотрим семейство прямоугольников  $\Omega_s = ABFE$ , где координаты точек E и F имеют вид:  $E = (-L + s, -L)$ ,  $F = (-L + s, L)$ ,  $0 < s \leq 2L$ . График функции  $KV(x)$  для  $N = 15$ ,  $\lambda = 0.003$ ,  $x = -L + s$ , представлен на рис. 6. Из рис. 6 видно, что левая граница дефекта также хорошо определяется.

**Заключение.** Разработан метод обнаружения и локализации дефекта (полости, трещины, включения) в упругом теле с помощью не полностью переопределенных данных на внешней границе. Идея метода заключается в построении расширяющегося семейства подобластей, стремящихся к области, занимаемой упругим телом. Для каж-

дой подобласти семейства строится функционал типа Кона–Вогелиуса. По минимальному значению этого функционала можно судить пересекает ли данная подобласть дефект или нет и приближенно определить границы дефекта. Для иллюстрации разработанного подхода рассмотрен пример идентификации полости в упругой, квадратной пластине. Переопределенные данные заданы на боковых сторонах пластины, свободных от усилий. В рассматриваемом примере в качестве семейства подобластей выбрано семейство прямоугольников. Это позволило определить левую и правую границы дефекта. Для получения более полной информации о дефекте необходимо использовать семейства подобластей более сложной геометрии.

Работа выполнена по теме государственного задания № госрегистрации АААА-А20-120011690132-4 и при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00100).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Colton D., Kirsch A. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region // *Inverse Problems*. 1996. V. 12. P. 383–393.
2. Colton D., Piana M., Potthast R. A simple method using Morozov's discrepancy principle for solving inverse scattering problems // *Inverse Problems*. 1997. V. 13. P. 1477–1493.
3. Arens T. Linear sampling methods for 2d inverse elastic wave scattering // *Inverse Problems*. 2001. V. 17. P. 1445–1464.
4. Kirsch A. Characterization of the shape of a scattering obstacle using spectral data of the far field operator // *Inverse Problems*. 1998. V. 14. P. 1489–1512.
5. Grinberg N. Obstacle visualization via the factorization method for the mixed boundary value problem // *Inverse Problems*. 2002. V. 18. P. 1687–1704.
6. Potthast R. A survey on sampling and probe methods for inverse problems // *Inverse Problems*. 2006. V. 22. P. R1–R47.
7. Dehghan Manshadi S.H., Khaji N., Rahimian M. Cavity/inclusion detection in plane linear elastic bodies using linear sampling method // *J. Nondestructive Evaluation*. 2014. V. 33. P. 93–103.
8. Kirsch A. The factorization method for a class of inverse elliptic problems // *Mathematische Nachrichten*. 2005. V. 278. P. 258–277.
9. Шифрин Е.И. Метод факторизации в геометрической обратной задаче статической теории упругости // *Изв. РАН. МТТ*. 2016. № 5. С. 68–78.
10. Ammari H., Kang H., Nakamura G., Tanuma K. Complete asymptotic expansions of solutions of the system of elastostatics in the presence of an inclusion of small diameter and detection of an inclusion // *J. Elasticity*. 2002. V. 67. P. 97–129.
11. Kang H., Kim E., Lee J.-Y. Identification of elastic inclusions and elastic moment tensors by boundary measurements // *Inverse Problems*. 2003. V. 19. P. 703–724.
12. Ammari H., Kang H. Reconstruction of Small Inhomogeneities from Boundary Measurements. *Lecture Notes in Mathematics*. 1846. Berlin: Springer, 2004.
13. Ammari H., Kang H. Polarization and Moment Tensors: with Applications to Inverse Problems and Effective Medium Theory. *Applied Mathematical Sciences*. 162. New York: Springer, 2007.
14. Ikehata M. Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data // *Inverse Problems*. 1999. V. 15. P. 1231–1241.
15. Ikehata M. A regularized extraction formula in the enclosure method // *Inverse Problems*. 2002. V. 18. P. 435–440.
16. Karageorghis A., Lesnic D., Marin L. The method of fundamental solutions for the detection of rigid inclusions and cavities in plane linear elastic bodies // *Computers and Structures*. 2012. V. 106–107. P. 176–188.
17. Karageorghis A., Lesnic D., Marin L. A moving pseudo-boundary method of fundamental solutions for void detection // *Numer. Meth. PDE*. 2013. V. 29. P. 935–960.
18. Karageorghis A., Lesnic D., Marin L. The method of fundamental solutions for three-dimensional inverse geometric elasticity problems // *Computers and Structures*. 2016. V. 166. P. 51–59.
19. Andrieux S., Ben Abda A. Identification of planar cracks by complete overdetermined data: inversion formulae // *Inverse Problems*. 1996. V. 12. P. 553–563.

20. *Andrieux S., Ben Abda A., Bui H.D.* Reciprocity principle and crack identification // *Inverse Problems*. 1999. V. 15. P. 59–65.
21. *Goldstein R.V., Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Application of invariant integrals to the problems of defect identification // *Intern. J. Fracture*. 2007. V. 147. P. 45–54.
22. *Шифрин Е.И.* Идентификация эллипсоидального дефекта в упругом теле по результатам одного испытания на одноосное растяжение (сжатие) // *Изв. РАН. МТТ*. 2010. № 3. С. 131–142.
23. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional // *Inverse Problems*. 2010. V. 26. 055001 (17 pp).
24. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of an ellipsoidal defect in an elastic solid using boundary measurements // *Intern. J. Solids & Struct.* 2011. V. 48. P. 1154–1163.
25. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Reconstruction of an ellipsoidal defect in anisotropic elastic solid, using results of one static test // *Inverse Problems in Sci.&Engng*. 2013. V. 21. P. 781–800.
26. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of small well-separated defects in an isotropic elastic body using boundary measurements // *Intern. J. Solids & Struct.* 2013. V. 50. P. 3707–3716.
27. *Шифрин Е.И., Шушпанников П.С.* Идентификация конечного числа малых дефектов в анизотропном, линейно упругом теле по результатам одного статического испытания // *Изв. РАН. МТТ*. 2015. № 4. С. 68–81.
28. *Shifrin E.I., Kaptsov A.V.* Identification of multiple cracks in 2D elasticity by means of the reciprocity principle and cluster analysis // *Inverse Problems*. 2018. V. 34. 015009.
29. *Bonnet M., Constantinescu A.* Inverse problems in elasticity // *Inverse Problems*. 2005. V. 21. P. R1–R50.
30. *Burger M.* A level set method for inverse problems // *Inverse Problems*. 2001. V. 17. P. 1327–1355.
31. *Burger M.* Levenberg–Marquardt level set methods for inverse obstacle problems // *Inverse Problems*. 2004. V. 20. P. 259–282.
32. *Ben Ameer H., Burger M., Hackl B.* Level set methods for geometric inverse problems in linear elasticity // *Inverse Problems*. 2004. V. 20. P. 673–696.
33. *Козлов В.А., Мазья В.Г., Фомин А.В.* Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений // *ЖВММФ*. 1991. Т. 31. № 1. С. 64–74.
34. *Cimetiere A., Delvare F., Jaoua M., Pons F.* Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization // *Inverse Problems*. 2001. V. 17. P. 553–570.
35. *Baranger T.N., Andrieux S.* An optimization approach for the Cauchy problem in linear elasticity // *Struct.&Multidisc. Optim.* 2008. V. 35. P. 141–152.
36. *Liu C.-S., Atluri S.N.* Numerical solution of the Laplacian Cauchy problem by using a better post-conditioning collocation Trefftz method // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2013. V. 37. P. 74–83.
37. *Kohn R.V., Vogelius M.* Relaxation of a variational method for impedance computed tomography // *Commun. Pure & Appl. Math.* 1987. V. 40. P. 745–777.
38. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1986. 287 с.
39. *Hansen P.C.* Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve // *SIAM Review*. 1992. V. 34. P. 561–580.
40. *Hansen P.C.* The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems. In: *Computational Inverse Problems in Electrocardiography*. *Johnston P.* (Ed.) WIT Press. Southampton. 2001. P. 119–142.

### **On the Solution of Geometric Elastostatic Inverse Problem by Means of Not Completely Overdetermined Boundary Data**

**E. A. Kasparova<sup>a</sup> and E. I. Shifrin<sup>a,#</sup>**

<sup>a</sup> *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

<sup>#</sup> *e-mail: shifrin@ipmnet.ru*

The problem of detecting and localizing of a cavity, a crack, or an inclusion in an elastic body by means of the overdetermined data given on a part of the outer boundary of the body

is considered. The input data can be obtained in a single static experiment. A new approach for solving such problem is proposed. The possibilities of the proposed approach are illustrated by the example of the problem of detecting a cavity in an elastic plate.

*Keywords:* static theory of elasticity, geometric inverse problem, incompletely overdetermined boundary data

## REFERENCES

1. Colton D., Kirsch A. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region // *Inverse Problems*, 1996, vol. 12, pp. 383–393.
2. Colton D., Piana M., Potthast R. A simple method using Morozov's discrepancy principle for solving inverse scattering problems // *Inverse Problems*, 1997, vol. 13, pp. 1477–1493.
3. Arens T. Linear sampling methods for 2D inverse elastic wave scattering // *Inverse Problems*, 2001, vol. 17, pp. 1445–1464.
4. Kirsch A. Characterization of the shape of a scattering obstacle using spectral data of the far field operator // *Inverse Problems*, 1998, vol. 14, pp. 1489–1512.
5. Grinberg N. Obstacle visualization via the factorization method for the mixed boundary value problem // *Inverse Problems*, 2002, vol. 18, pp. 1687–1704.
6. Potthast R. A survey on sampling and probe methods for inverse problems // *Inverse Problems*, 2006, vol. 22, pp. R1–R47.
7. Dehghan Manshadi S.H., Khaji N., Rahimian M. Cavity/inclusion detection in plane linear elastic bodies using linear sampling method // *J. Nondestructive Evaluation*, 2014, vol. 33, pp. 93–103.
8. Kirsch A. The factorization method for a class of inverse elliptic problems // *Mathematische Nachrichten*, 2005, vol. 278, pp. 258–277.
9. Shifrin E.I. Factorization method in the geometric inverse problem of static elasticity // *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, no. 5, pp. 562–570.
10. Ammari H., Kang H., Nakamura G., Tanuma K. Complete asymptotic expansions of solutions of the system of elastostatics in the presence of an inclusion of small diameter and detection of an inclusion // *J. Elasticity*, 2002, vol. 67, pp. 97–129.
11. Kang H., Kim E., Lee J.-Y. Identification of elastic inclusions and elastic moment tensors by boundary measurements // *Inverse Problems*, 2003, vol. 19, pp. 703–724.
12. Ammari H., Kang H. Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements. *Lecture Notes in Mathematics*. 1846. Berlin: Springer, 2004.
13. Ammari H., Kang H. Polarization and moment tensors: with applications to inverse problems and effective medium theory. *Applied Mathematical Sciences*. 162. N. Y.: Springer, 2007.
14. Ikehata M. Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data // *Inverse Problems*, 1999, vol. 15, pp. 1231–1241.
15. Ikehata M. A regularized extraction formula in the enclosure method // *Inverse Problems*, 2002, vol. 18, pp. 435–440.
16. Karageorghis A., Lesnic D., Marin L. The method of fundamental solutions for the detection of rigid inclusions and cavities in plane linear elastic bodies // *Computers and Structures*, 2012, vol. 106–107, pp. 176–188.
17. Karageorghis A., Lesnic D., Marin L. A moving pseudo-boundary method of fundamental solutions for void detection // *Numer. Meth. PDE*, 2013, vol. 29, pp. 935–960.
18. Karageorghis A., Lesnic D., Marin L. The method of fundamental solutions for three-dimensional inverse geometric elasticity problems // *Computers and Structures*, 2016, vol. 166, pp. 51–59.
19. Andrieux S., Ben Abda A. Identification of planar cracks by complete overdetermined data: inversion formulae // *Inverse Problems*, 1996, vol. 12, pp. 553–563.
20. Andrieux S., Ben Abda A., Bui H.D. Reciprocity principle and crack identification // *Inverse Problems*, 1999, vol. 15, pp. 59–65.
21. Goldstein R.V., Shifrin E.I., Shushpannikov P.S. Application of invariant integrals to the problems of defect identification // *Intern. J. Fracture*, 2007, vol. 147, pp. 45–54.
22. Shifrin E.I. Ellipsoidal defect identification in an elastic body from the results of a uniaxial tension (compression) test // *Mech. Solids*, 2010, vol. 45, no. 3, pp. 417–426.

23. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of a spheroidal defect in an elastic solid using a reciprocity gap functional // *Inverse Problems*, 2010, vol. 26, 055001 (17 pp).
24. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of an ellipsoidal defect in an elastic solid using boundary measurements // *Intern. J. Solids and Structures*, 2011, vol. 48, pp. 1154–1163.
25. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Reconstruction of an ellipsoidal defect in anisotropic elastic solid, using results of one static test // *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2013, vol. 21, pp. 781–800.
26. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of small well-separated defects in an isotropic elastic body using boundary measurements // *Intern. J. Solids and Structures*, 2013, vol. 50, pp. 3707–3716.
27. *Shifrin E.I., Shushpannikov P.S.* Identification of finitely many small defects in an anisotropic linearly elastic body from a single static test // *Mech. Solids*, 2015, vol. 50, no. 4, pp. 421–431.
28. *Shifrin E.I., Kapstov A.V.* Identification of multiple cracks in 2D elasticity by means of the reciprocity principle and cluster analysis // *Inverse Problems*, 2018, vol. 34, 015009.
29. *Bonnet M., Constantinescu A.* Inverse problems in elasticity // *Inverse Problems*, 2005, vol. 21, pp. R1–R50.
30. *Burger M.* A level set method for inverse problems // *Inverse Problems*, 2001, vol. 17, pp. 1327–1355.
31. *Burger M.* Levenberg–Marquardt level set methods for inverse obstacle problems // *Inverse Problems*, 2004, vol. 20, pp. 259–282.
32. *Ben Ameer H., Burger M., Hackl B.* Level set methods for geometric inverse problems in linear elasticity // *Inverse Problems*, 2004, vol. 20, pp. 673–696.
33. *Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Fomin A.V.* An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations // *Comput. Math. Math. Phys.*, 1991, vol. 31, no. 1, pp. 45–52.
34. *Cimetiere A., Delvare F., Jaoua M., Pons F.* Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization // *Inverse Problems*, 2001, vol. 17, pp. 553–570.
35. *Baranger T.N., Andrieux S.* An optimization approach for the Cauchy problem in linear elasticity // *Struct. & Multidisc. Optimiz.*, 2008, vol. 35, pp. 141–152.
36. *Liu C.-S., Atluri S.N.* Numerical solution of the Laplacian Cauchy problem by using a better post-conditioning collocation Trefftz method // *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2013, vol. 37, pp. 74–83.
37. *Kohn R.V., Vogelius M.* Relaxation of a variational method for impedance computed tomography // *Commun. on Pure & Appl. Math.*, 1987, vol. 40, pp. 745–777.
38. *Tikhonov A.N., Arsenin V.Y.* *Solutions of Ill-Posed Problems*. N.Y.: John Wiley, 1977. 258 p.
39. *Hansen P.C.* Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve // *SIAM Review*, 1992, vol. 34, pp. 561–580.
40. *Hansen P.C.* The L-curve and its use in the numerical treatment of inverse problems // In: *Computational Inverse Problems in Electrocardiography*. Johnston P. (Ed.) WIT Press. Southampton, 2001. pp. 119–142.