

УДК 531.01



11 мая 2020 года исполняется 70 лет члену редакционной коллегии журнала, заслуженному профессору МГУ Александру Владименовичу КАРАПЕТЯНУ. Юбилар — известный специалист в области аналитической механики, теории устойчивости и бифуркации. Опубликовал 150 научных работ, 3 монографии и учебник по теоретической механике. Подготовил 17 кандидатов наук и трех лауреатов Золотой медали РАН за лучшие работы по механике среди молодых ученых и студентов.

Редколлегия и редакция ПММ, сердечно поздравляют Александра Владименовича с юбилеем, желают здоровья и новых творческих успехов

БИФУРКАЦИОННЫЕ ДИАГРАММЫ СМЕЙЛА В ДИНАМИКЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ СВЯЗАННЫХ ТЕЛ

© 2020 г. А. В. Карапетян^{1,*}

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: avkarapetyan@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.02.2020 г.

После доработки 15.03.2020 г.

Принята к публикации 21.03.2020 г.

Рассматривается задача о движении трех связанных тел в однородном гравитационном поле (обобщенная задача о движении гироскопа в кардановом подвесе). Найдены все стационарные движения системы, условия их устойчивости и ветвления. На основе проведенного анализа показано, что полный атлас бифуркационных диаграмм

Смейла для этой задачи состоит из 24 карт, различающихся видом этих диаграмм. В работе приведена одна из наиболее сложных диаграмм Смейла и описано, как из нее получаются все остальные.

Ключевые слова: гироскоп в кардановом подвесе, бифуркационные диаграммы, топология областей возможного движения

DOI: 10.31857/S0032823520030030

Уравнения движения и первые интегралы рассматриваемой задачи приведены в [1]. Построение диаграмм Смейла [2] основано на анализе стационарных движений системы методом Рауса [3, 4] и Пуанкаре—Четаева [5, 6]. Частный случай этой задачи рассмотрен в [7].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении трех связанных твердых тел в однородном поле сил тяжести. Каждое из тел может вращаться только вокруг одной из осей: первое – вокруг неподвижной вертикали OZ , второе – вокруг горизонтали Ox , закрепленной на первом теле, а третье – вокруг оси Oz , закрепленной на втором теле и ортогональной оси Ox . Предположим, что $Oxuz$ – главные оси инерции (для точки O) второго тела (ось Oy ортогональна плоскости Oxz), причем Oz – ось симметрии эллипсоида инерции (для точки O) третьего тела.

Момент инерции первого тела относительно OZ обозначим через C_1 , а моменты инерции второго и третьего тел относительно осей $Oxuz$ – через A_2 , B_2 , C_2 и A_3 , B_3 , C_3 соответственно. Пусть центры масс второго и третьего тел лежат на оси Oz в точках с координатами c_2 и c_3 соответственно, а m_2 и m_3 – массы этих тел. Положительное направление оси Oz выбираем так, что $m_2c_2 + m_3c_3 = mc > 0$ (случай $c = 0$ тривиален и в статье не рассматривается).

Углы поворота первого, второго и третьего тел вокруг осей OZ , Ox и Oz соответственно обозначим через φ_1 , φ_2 и φ_3 . Очевидно, конфигурационное пространство системы – трехмерный тор (\mathbb{T}^3).

Рассматриваемая система допускает интеграл энергии (g – ускорение свободного падения)

$$H = \frac{1}{2}((A_3 + B_2) \sin^2 \varphi_2 + C_1 + C_2 \cos^2 \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}(A_2 + A_3) \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}C_3(\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2)^2 + mgc \cos \varphi_2 = h$$

и два циклических интеграла

$$K = ((A_3 + B_2) \sin^2 \varphi_2 + C_1 + C_2 \cos^2 \varphi_2) \dot{\varphi}_1 + C_3(\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2) \cos \varphi_2 = k$$

$$L = C_3(\dot{\varphi}_3 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_2) = l$$

(h , k и l – произвольные постоянные; см. напр., [1]).

Напомним, что топологический анализ систем, допускающих первые интегралы, основан на построении (в пространстве констант этих интегралов) бифуркационного по Смейлу [2] множества, на котором эти интегралы зависимы. Учитывая структуру функций H , K и L , задачу отыскания критических уровней интегралов $H = h$, $K = k$, $L = l$ можно свести к задаче определения всех критических точек эффективного потенциала V_{kl} системы – минимума функции H по скоростям на фиксированных уровнях интегралов $K = k$ и $L = l$. В рассматриваемой задаче этот минимум достигается при

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{k - l \cos \varphi_2}{J(\varphi_2)}, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \quad \dot{\varphi}_3 = \frac{(J(\varphi_2) + C_3 \cos^2 \varphi_2)l - C_3 k \cos \varphi_2}{C_3 J(\varphi_2)} \quad (1.1)$$

и задается формулой [7]

$$V_{kl} = mgc \cos \varphi_2 + \frac{1}{2} \frac{(k - l \cos \varphi_2)^2}{J(\varphi_2)} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{C_3} = V_{kl}(\varphi_2) \quad (1.2)$$

$$J(\varphi_2) = (A_3 + B_2 + C_1) - (A_3 + B_2 - C_2) \cos^2 \varphi_2$$

Полагая, что $k \neq 0$, введем следующие обозначения

$$a = l/k \in \mathbb{R}, \quad b = -(A_3 + B_2 - C_2)(A_3 + B_2 + C_1)^{-1} > -1$$

$$p = k^2((A_3 + B_2 + C_1)mgc)^{-1}, \quad q = \left(h - \frac{l^2}{2C_3} \right) (mgc)^{-1}$$

При этом $V_{kl} = mgc f(x) + \text{const}$, где

$$f(x) = x + \frac{1}{2} p \frac{(1 - ax)^2}{1 + bx^2}, \quad x = \cos \varphi_2 \in [-1, 1] \quad (1.3)$$

Отметим, что если второе тело – почти плоская рамка (как для гироскопа в кардановом подвесе), то $b \in (-1, 0)$; этот случай рассмотрен в [7].

Если же второе тело достаточно сильно отличается от плоского, то параметр b может принимать положительные значения, в том числе, достаточно большие.

Заметим также, что случай $k = 0, l \neq 0$ получается из общего случая предельным переходом при $a \rightarrow \infty$, а случай $k = l = 0$ тривиален и не рассматривается.

Таким образом, анализ критических уровней первых интегралов задачи сводится к анализу критических точек функции $f(x)$ (1.3), заданной на отрезке $[-1, 1]$.

2. Анализ критических точек эффективного потенциала. Очевидно, $x = -1$ ($\varphi_2 = \pi$) и $x = +1$ ($\varphi_2 = 0$) – критические точки функции $f(x)$, причем $f(-1) = \min(\max)$, если $f'(-1) > 0$ (< 0), а $f(+1) = \min(\max)$, если $f'(+1) < 0$ (> 0). Здесь

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 1 + p \frac{(ax - 1)(bx + a)}{(1 + bx^2)^2}, \quad f'(\pm 1) = 1 + p \frac{(a \mp 1)(b \pm a)}{(1 + b)^2}$$

Таким образом, $f(-1) = \min$ при любом p , если $a \in [-1, b]$; если же $a \in (-\infty, -1) \cup (b, +\infty)$, то $f(-1) = \min(\max)$ при $p < p_-$ ($p > p_-$). Аналогично, $f(+1) = \max$ при любом p , если $a \in (-\infty, -b] \cup [1, +\infty)$; если же $a \in (-b, 1)$, то $f(+1) = \max(\min)$ при $p < p_+$ ($p > p_+$). Здесь

$$p_{\pm} = (b + 1)^2(1 \mp a)^{-1}(b \pm a)^{-1} \quad (2.1)$$

Значения p_+ и p_- существуют одновременно (напомним, что $p > 0$), если $a \in (|b|, 1)$ при $|b| < 1$ или $a \in (-b, -1)$ при $b > 1$, причем $p_+ > p_-$ ($p_+ < p_-$) при $b > a^2$ ($b < a^2$).

Критические точки $x \in (-1, 1)$ определяются из уравнения $f'(x) = 0$, которое можно представить в виде

$$p = u(x) = \frac{(1 + bx^2)^2}{(1 - ax)(bx + a)} \quad (2.2)$$

Очевидно, что если $x \in (-1, 1)$ – решение уравнения (2.2), то $f''(x) = u'(x)/u(x)$. Следовательно, критическая точка $x \in (-1, 1)$ доставляет функции $f(x)$ минимум (максимум), если функция $u(x)$ возрастает (убывает) в этой точке.

В зависимости от параметров задачи a и b область определения $\Delta \subseteq [-1, 1]$ функции $u(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_0 = [-1, 1] \quad \text{при} \quad |b| < a < 1; \\ \Delta &= \Delta_\alpha = [-1, 1/a) \quad \text{при} \quad |a| > 1, \quad |a| > b > 0 \quad \text{и} \quad |a| < 1, \quad |a| < -b \quad (b < 0) \\ \Delta &= \Delta_\beta = (-a/b, 1] \quad \text{при} \quad |a| < 1, \quad b > |a| \\ \Delta &= \Delta_\alpha \cup \Delta_\beta \quad \text{при} \quad a < -1, \quad b > |a| \\ \Delta &= \Delta_{\alpha\beta} = (-a/b, 1/a) \quad \text{при} \quad b > a > 1 \\ \Delta &= \emptyset \quad \text{при} \quad -1 < a < 0, \quad a < b < -a \end{aligned} \quad (2.3)$$

Заметим, что критические точки $x \in (-1, 1)$ функции $f(x)$, в отличие от точек $x = \pm 1$, зависят от параметра p , причем каждой такой точке отвечают два значения $\varphi_2 = \pm \arccos x$.

Обозначим критические точки функции $f(x)$, принадлежащие интервалам $(-1, 1)$, $(-1, 1/a)$, $(-a/b, 1)$ и $(-a/b, 1/a)$ — через $x_0(p)$, $x_\alpha(p)$, $x_\beta(p)$ и $x_{\alpha\beta}(p)$ соответственно; при этом

$$\lim_{p \rightarrow p_\pm} x_0(p) = \pm 1, \quad \lim_{p \rightarrow p_-} x_\alpha(p) = -1, \quad \lim_{p \rightarrow p_+} x_\beta(p) = +1$$

Поскольку $x(p)$ — решение уравнения (2.2), то свойства монотонности функций $x(p)$ и $u(x)$ совпадают.

Вычислим

$$u'(x) = \frac{(1 + bx^2)}{(1 - ax)^2(a + bx^2)^2} v(x) \quad (2.4)$$

$$v(x) = -2ab^2x^3 + 3bx^2(b - a^2) + 6abx + a^2 - b$$

$$v'(x) = -6ab^2(x - 1/a)(x + a/b) \quad (2.5)$$

$$v(1/a) = (b + a^2)^2 a^{-2}, \quad v(-a/b) = (b + a^2)^2 b^{-1}$$

Из соотношений (2.4) и (2.5) следует, что $u'(x)$ может обращаться в ноль на отрезке Δ_0 и полуинтервалах Δ_α , Δ_β не более одного раза (в точках x_0 , x_α , x_β соответственно), а в интервале $\Delta_{\alpha\beta}$ обращается в ноль ровно один раз (в точке $x_{\alpha\beta}$). Учитывая, что $u(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 1/a$ и $x \rightarrow -a/b$, заключаем, что x_0 существует при $v(+1)v(-1) < 0$, x_α — при $v(-1) < 0$, x_β — при $v(+1) > 0$ ($x_{\alpha\beta}$ существует всегда). Здесь

$$v(\pm 1) = \mp 2ab^2 + 3b(b - a^2) \mp 6ab + a^2 - b$$

В заключение этого раздела отметим, что критические точки функции $f(x)$ отвечают стационарным движениям системы ($x = \pm 1$ — вертикальным вращением при наименьшем для $x = -1$ и наибольшем для $x = +1$ положении центра масс, а $x(p) \in (-1, 1)$ — прецессионным движениям; см. (1.1)), причем точки минимума (максимума) соответствуют устойчивым (неустойчивым) движениям.

3. Бифуркационная диаграмма. Приведенный выше анализ критических точек функции $f(x)$ позволяет построить полный атлас бифуркационных диаграмм Пуанкаре—Четаева [5, 6]. Каждая карта этого атласа на плоскости $\{p; x\}$ ($p > 0$, $x \in [-1, 1]$) состоит из прямых $x = \pm 1$ и кривых $x(p)$, где $x(p)$ — решение уравнения (2.2). Карты различаются видом кривых $x(p)$ и распределением точек минимума/максимума на этих кривых и на прямых $x = \pm 1$.

Для построения полного атласа бифуркационных диаграмм Смейла [2] необходим небольшой дополнительный анализ. Каждая карта этого атласа на плоскости $\{p; q\}$ ($p > 0$, $q \geq -1$) состоит из прямых

$$q = q_+(p) = 1 + p \frac{(1-a)^2}{2(1+b)}, \quad q = q_-(p) = -1 + p \frac{(1+a)^2}{2(1+b)} \quad (3.1)$$

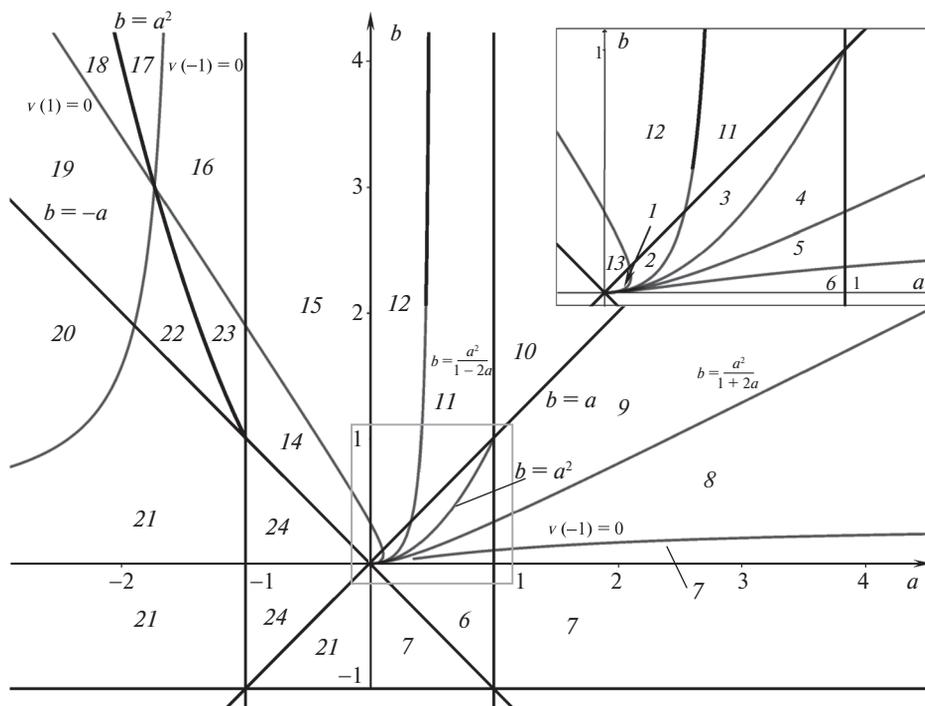


Рис. 1. Плоскость параметров.

и кривых $q = q(p)$, заданных параметрически соотношениями $q = f(x)$, $p = u(x)$, которые (см. (1.3) и (2.2)) можно привести к виду

$$q = x + \frac{1(1 + bx^2)(1 - ax)}{2bx + a}, \quad p = \frac{(1 + bx^2)^2}{(1 - ax)(bx + a)} \quad (3.2)$$

(x – параметр, принадлежащий соответствующему этой карте интервалу (2.3)).

Совокупность прямых (3.1) и кривых (3.2) определяет бифуркационное по Смейлу множество, на котором происходят перестройки топологического типа областей возможности движения, задаваемых соотношением $f(x) \leq q$ ($V_{kl} \leq h$). Если $a < 0$, то прямые (3.1) не пересекаются; если же $a > 0$, то они пересекаются при $p = (1 + b)/a$. Очевидно,

$$p_+ > \frac{1+b}{a} \quad \left(p_+ < \frac{1+b}{a} \right) \quad \text{при} \quad b < \frac{a^2}{1-2a} \quad \left(b > \frac{a^2}{1-2a} \right)$$

$$p_- > \frac{1+b}{a} \quad \left(p_- < \frac{1+b}{a} \right) \quad \text{при} \quad b > \frac{a^2}{1+2a} \quad \left(b < \frac{a^2}{1+2a} \right)$$

Взаимное расположение точек p_+ , p_- и $(1 + b)/a$ тоже влияет на вид диаграммы Смейла.

Таким образом, плоскость параметром задачи a и b ($a \in \mathbb{R}$, $b > -1$) разбивается на 24 области (см. рис. 1), различающиеся видом бифуркационных диаграмм. Заметим, что при $x(p) \rightarrow 1/a$ кривая (3.2) стремится к прямой $f(1/a) = 1/a$, а при $x \rightarrow -a/b$ – к прямой

$$q = f\left(-\frac{a}{b}\right) = -\frac{a}{b} + p\frac{b+a^2}{2b} \quad (3.3)$$

Очевидно, угол наклона прямой (3.3) больше углов наклона прямых (3.1).

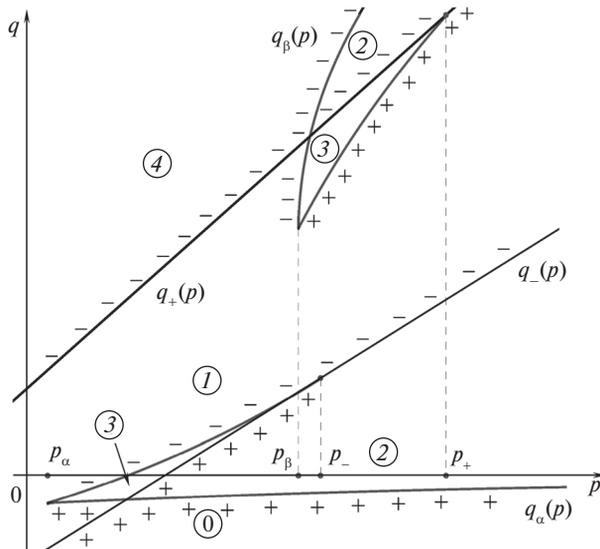


Рис. 2. Диаграмма Смейла для области 18.

На рис. 2 приведена диаграмма Смейла для параметров задачи, принадлежащих области 18 (см. рис. 1), в которой $a < -1$, $b < a^2$, $v(+1) > 0$, $v(-1) < 0$. На этой диаграмме кривые $q_\alpha(p)$ и $q_\beta(p)$ соответствуют полуинтервалам Δ_α и Δ_β (см. (2.3)) существования решений уравнения (2.2), значение p_\pm задаются соотношениями (2.1), а значения p_α и p_β — соотношениями $p_\alpha = u(x_\alpha)$, $p_\beta = u(x_\beta)$, где x_α и x_β корни уравнения $v(x) = 0$ на полуинтервалах Δ_α и Δ_β соответственно. Цифрами (0), (1), (2), (3), (4) обозначены топологические типы областей возможности движения ((0) — пустое множество, (1), (2) или (3) — один, два или три “толстых” двумерных тора ($\mathbb{T}^2 \times \mathbb{D}^1$), (4) — трехмерный тор (\mathbb{T}^3)), а знаками плюс (минус) — точки минимума (максимума) функции $f(x)$.

Диаграммы, соответствующие областям 16, 17, 19, 22, 23, отличаются от приведенной на рис. 2, расположением точек p_+ , p_- , p_α и p_β и отсутствием точек возврата как на одной из кривых $q_\alpha(p)$, $q_\beta(p)$, так и на обеих. Для областей 20 (15) и 21 (14) исчезает ветвь $q_\beta(p)$ ($q_\alpha(p)$); при этом для областей 20 и 15 есть точка возврата, а для областей 21 и 14 ее нет. Для областей 11 ($(1+b)/a < p_+$) и 12 ($(1+b)/a > p_+$) (13) диаграммы отличаются от диаграмм 15 (14) тем, что на них кривые (3.1) пересекаются. Для областей 1 — 6 кривые $q = q_0(p) = f(x_0(p))$, где $x_0(p)$ — решение уравнения (2.2) на Δ_0 , соединяют точки прямых (3.1), соответствующие значениям p_\pm и существуют только на ограниченном интервале изменения параметра p ; при этом для областей 1 ($p_+ < p_-$) и 6 ($p_+ > p_-$) на кривой $q_0(p)$ нет точек возврата, а для областей 2 ($p_+ < p_0 < p_-$), 3 ($p_0 < p_+ < p_-$), 4 ($p_0 < p_- < p_+$) и 5 ($p_- < p_0 < p_+$) точки возврата есть (здесь $p_0 = u(x_0)$, x_0 — корень уравнения $v(x) = 0$ на Δ_0). Для областей 7–9 не существует кривой $q_\beta(p)$, причем для области 7 на кривой $q_\alpha(p)$ нет точки возврата, а для областей 8 ($p_- < (1+b)/a$) и 9 ($p_- > (1+b)/a$) она есть. Для области 10, кроме прямых (3.1), есть только кривая $q = q_{\alpha\beta}(p) = f(x_{\alpha\beta}(p))$, где $x_{\alpha\beta}(p)$ — корень уравнения (2.2) на интервале $\Delta_{\alpha\beta}$. Эта кривая состоит из двух ветвей, рождающихся в точке $p = p_{\alpha\beta}(p) = u(x_{\alpha\beta})$, где $x_{\alpha\beta}$ — корень уравнения $v(x) = 0$ на $\Delta_{\alpha\beta}$. При $p \rightarrow +\infty$ одна ветвь стремится к прямой $q = 1/a$, а другая — к пря-

мой (3.3). Для области 24 диаграмма состоит только из непересекающихся прямых (3.1). При этом для областей 10 и 24 все точки прямой $q_-(p)$ ($q_+(p)$) являются точками минимума (максимума) функции $f(x)$.

Таким образом, общий случай гораздо богаче случая гироскопа в кардановом подвесе [7]: полный атлас бифуркационных диаграмм содержит 24 (а не 4) карты, а области возможного движения могут состоять из трех “толстых” двумерных торов (а не только одного) такого тора.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00140.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
2. Смейл С. Топология и механика // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27. С. 77–123.
3. *Routh E.J.* A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. London: MacMillan and Co., 1877. 108 p.
4. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 165 с.
5. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation // Acta Math. 1885. V. 7. P. 259–380.
6. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: АН СССР, 1962.
7. Карапетян А.В., Чаплыгина М.П. Бифуркационный анализ динамики гироскопа в кардановом подвесе // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика и механика. 2019. № 3. С. 73–76.

Bifurcation Smale Diagrams for Three Connected Heavy Rigid Bodies System

A. V. Karapetyan^{a,#}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: avkarapetyan@yandex.ru*

The problem on the motion of three connected rigid bodies in the homogeneous gravitation field (the generalization of the problem of a gyroscope in Gimbal suspension) is considered. All steady motions of the system, their stability and bifurcation conditions are found. The given parametric analysis has shown that the full atlas of Smale bifurcation diagrams contains 24 maps with different types of these diagrams. In the paper there is given one of the most complicated Smale diagrams and there are described all other diagrams.

Keywords: gyroscope in Gimbal suspension, bifurcation diagrams, topology of possible motions domains

REFERENCES

1. *Magnus K.* Kreisel. Theorie und Anwendungen. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1971.
2. *Smale S.* Topology and mechanics // Invent. Math., 1970, vol. 10, pp. 305–311; 1970, vol. 11, pp. 45–64.
3. *Routh E.J.* A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. London: MacMillan and Co., 1877. 108 p.
4. *Karapetyan A.V.* Stability of Steady Motions (Ustoichivost statsyonarnykh dvizhenii). Moscow: URSS, 1998. 165 p. (in Russian)
5. Poincaré H. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. // Acta Math., 1885, vol. 7, pp. 259–380.
6. *Chetaev N.G.* The Stability of Motion. London: Pergamon. 1961. 200 p.
7. *Karapetyan A.V., Chaplygina M.P.* Bifurcation analysis of gyroscope in Gimbal suspension // Moscow Univ. Mech. Bull., 2019, no. 74, pp. 75–78.