ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 2, с. 158–174

*УДК 531.36:62-50*

# О ЧАСТНЫХ ЭКСТРЕМАЛЯХ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЕЙ АСИММЕТРИЧНОГО ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА


**Л. Д. Акуленко**[1], **А. Н. Сиротин**[2,*]

*[1] Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
*[2] Московский авиационный институт (государственный технический университет), Москва, Россия*
**e-mail: asirotin2@yandex.ru*

Поступила в редакцию 11.11.2019 г.
После доработки 16.01.2020 г.
Принята к публикации 06.03.2020 г.

Исследуется задача оптимального управления переориентации асимметричного твердого тела. В качестве критерия выбран интегрально-квадратичный функционал, согласованный с инерционной симметрией тела, который характеризует суммарные энергозатраты. Управлением считается главный момент приложенных внешних сил. Получено явное описание семейства экстремалей для произвольного асимметричного твердого тела. Идея построения таких экстремалей основана на исследовании пространственно-временных деформаций решений дифференциальных уравнений Эйлера свободного вращения твердого тела.

*Ключевые слова*: переориентация, оптимальное управление

**DOI:** 10.31857/S0032823520020101

**1. Введение.** Изучается задача оптимального управления угловым движением абсолютно жесткого твердого тела относительно центра масс. Основной целью управления считается изменения ориентации и вектора угловой скорости от начальных значений до требуемых терминальных за конечное время так, чтобы маневру соответствовали наименьшие энергозатраты.

Задачи оптимального управления угловым движением твердого тела относятся к классу нелинейных задач и поэтому полного описания всего множества экстремалей (траекторий, удовлетворяющих необходимым условиям принципа максимума Понтрягина) в настоящее время нет. Сложность общей задачи существенным образом зависит от свойств симметрии, которыми обладает вращающееся тело и согласованности этой симметрии с функционалом, характеризующим энергозатраты. Полное описание решения задачи оптимального управления отсутствует даже в простейших случаях сферической и динамической симметрии вращающегося тела.

Задачи оптимального управления переориентации и вращения твердого тела часто встречаются при изучении и формировании угловых маневров космических аппаратов, космических телескопов и т.д. и представляют собой актуальную проблему. Современные результаты [1–7] сосредоточены на получения оптимальных управлений для заданных классов траекторий и специальных свойств симметрии твердого тела.

Для класса задач оптимального управления переориентации и вращения твердого тела предложен конструктивный способ [8–10] формирования семейств аналитических экстремалей. Идея этого способа состоит в построении экстремалей на основе использования решений дифференциальных уравнений Эйлера. Точнее, угловую скорость экстремального управляемого вращения предлагается искать в виде пространственно-временной деформации решений уравнений свободного вращения твердого тела. Цель работы – применение данного подхода к построению частного семейства экстремалей для общей задачи оптимального управления переориентацией и вращением асимметричного твердого тела.

Статья состоит из пяти разделов и заключения. В Разделе 1 формулируется основная цель исследований. В Разделе 2 описаны формулировка задачи оптимального управления и формализм принципа максимума. Идея дальнейших рассуждений состоит в том, чтобы указать некоторое семейство решений прямой и сопряженной системы. В Разделе 3 представлено частное решение системы дифференциальных уравнений меньшей размерности. Одно из этих решений удается установить, и оно основано на использовании пространственно-временных деформаций решений динамических уравнений Эйлера для свободного вращения твердого тела. В Разделе 4 показано, что для частного решения системы принципа максимума меньшей размерности восстановление экстремальной траектории принципиально возможно. В Разделе 5 построены примеры экстремальных траекторий, зависящих от инерционных характеристик твердого тела.

**2. Формулировка задачи и формализм принципа максимума.** В статье рассматриваются нормальные экстремальные траектории и управления углового движения абсолютно твердого тела относительно неподвижной точки, совпадающей с центром масс. Главный момент внешних сил, приложенных к телу, является управлением. Все используемые векторы определяются своими декартовыми прямоугольными координатами в связанной системе отсчета, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции тела. Предполагается, что в инерциальном пространстве выбрано $m$ осей чувствительности $(m \geq 1)$, определяющими векторами $\mathbf{r}^i(t) \in S^2$, $i = 1,\ldots,m$ единичной длины, где $S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1\}$. Дифференциальные уравнения углового движения (соответственно кинематические для $m$ ортов и динамические уравнения Эйлера для вектора угловой скорости), записанные для кинетического момента, принимаются в виде

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{r}}^i = \mathbf{r}^i \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}, \quad i = 1,\ldots,m \\ \dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{u}, \quad t \in (0,T), \quad \left(\dot{} = \frac{d}{dt}\right)\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{r}^i : \mathbb{R} \to S^2$; $\boldsymbol{\mu} = \Lambda\boldsymbol{\omega} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ – вектор-функция кинетического момента; $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ – тензор инерции тела; $\boldsymbol{\omega} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ – вектор-функция угловой скорости; $\mathbf{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ – вектор-функция управления. Считается, что заданы краевые условия

$$\begin{gathered}\mathbf{r}^i(0) = \mathbf{p}^i, \quad \mathbf{r}^i(T) = \mathbf{q}^i, \quad i = 1,\ldots,m \\ \boldsymbol{\mu}(0) = \Lambda\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\mu}(T) = \Lambda\mathbf{w}\end{gathered} \tag{2.2}$$

определяющие требуемый маневр.

В общем случае предполагается, что твердое тело не обладает специальной симметрией и поэтому

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq 0$$

Длительность управляемого процесса фиксирована. В качестве критерия эффективности маневра выбран интегрально-квадратичный функционал, который характеризует суммарные энергозатраты. Таким образом, изучается задача оптимального управления

$$\min \frac{1}{2} \int\limits_{[0,T]} \mathbf{u}(t) \cdot K\mathbf{u}(t)\, dt \tag{2.3}$$

где $K = K^T \geqslant 0$ и минимум ищется к траекториям, удовлетворяющим дифференциальным уравнениям (2.1) и краевым условиям (2.2). Предполагается, что в задаче (2.3) точная нижняя грань достигается и решение (управление) сформулированной задачи существует в классе кусочно-непрерывных функций времени.

Для рассматриваемой задачи оптимального управления вводится прямая и сопряженная системы дифференциальных уравнений принципа максимума [11, 12]

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{r}}^i = \mathbf{r}^i \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}}^i = \boldsymbol{\psi}_i \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}, \quad i = 1,\ldots,m \\ \dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + u, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = -\Lambda^{-1}\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\psi}^i \times \mathbf{r}^i + \boldsymbol{\gamma} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + \Lambda^{-1}(\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\gamma})\end{gathered} \tag{2.4}$$

где $\boldsymbol{\psi}^i, \boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ – абсолютно-непрерывные вектор-функции. Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} \cdot \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\psi}^i \times \mathbf{r}^i + \boldsymbol{\gamma} \cdot (\boldsymbol{\mu} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{u}) + \frac{1}{2}\psi_0 \mathbf{u} \cdot K\mathbf{u}, \quad \psi_0 = \text{const} \le 0$$

По построению получаем соответствующую каноническую гамильтонову систему

$$\dot{\mathbf{r}}^i = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\psi}^i}, \quad \dot{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}}^i = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}^i}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\mu}}$$

В статье рассматриваются нормальные экстремальные траектории и управления, для которых $\psi_0 \neq 0$. Так как экстремаль можно умножить на любое положительное число, то для нормального случая верно $\psi_0 = -1$. Для нормальной экстремали и экстремальной траектории получаем условия максимума по управлению

$$\max_{\mathbf{u}}\left(\Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} \cdot \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\psi}^i \times \mathbf{r}^i + \boldsymbol{\gamma} \cdot \left(\boldsymbol{\mu} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{u}\right) - \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot K\mathbf{u}\right)$$

и, следовательно, экстремальное управление есть

$$\mathbf{u} = K^{-1}\boldsymbol{\gamma} \tag{2.5}$$

В силу управлений (2.4) и (2.5) из предположения о существовании решения в классе кусочно-непрерывных функций времени по принципу математической индукции следует вывод о том, что решения системы (2.4), (2.5) можно выбирать из класса бесконечно дифференцируемых функций времени.

Для изучения структуры дифференциальных уравнений (2.4), (2.5) будет удобно ввести вектор-функцию $\mathbf{s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ следующего вида

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{\psi}^i \times \mathbf{r}^i \tag{2.6}$$

Используя тождество Якоби для векторного произведения, получаем дифференциальное векторное уравнение

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

с первым интегралом

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = h_1 = \text{const} \ge 0$$

Структура дифференциальных уравнений (2.4), (2.5) такова, что можно перейти к исследованию системы дифференциальных уравнений меньшей размерности

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} \\ \dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + K^{-1}\boldsymbol{\gamma} \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + \Lambda^{-1}(\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\gamma}) - \Lambda^{-1}\mathbf{s}\end{gathered} \tag{2.7}$$

Каждое решение системы (2.4), (2.5) по построению удовлетворяет дифференциальным уравнениям (2.7). Обратное не очевидно, однако по решениям (2.7) можно восстановить требуемую экстремальную траекторию для (2.4), (2.5), если использовать соотношение (2.6).

Идея дальнейших рассуждений состоит в том, чтобы указать определенное семейство решений системы (2.7) и построить соответствующие решения первоначальной системы (2.4), (2.5).

**3. Частное решение системы дифференциальных уравнений (2.7).** Общее решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (2.7) в данный момент неизвестно (авторам). Тем не менее, одно из этих решений удается установить, и оно основано на использовании пространственно-временных деформаций решений динамических уравнений Эйлера для свободного вращения твердого тела. Класс решений не связан с ограничениями для симметрий тензора инерции и поэтому удается построить решения для произвольного асимметричного твердого тела.

Пусть $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ – решение дифференциального уравнения Эйлера, соответствующее свободному вращению твердого тела

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \Lambda^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \tag{3.1}$$

где $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ – вектор-функция кинетического момента. В более подробной записи для каждого вещественного $t$ имеем

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\Omega}}}{dt} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \Lambda^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \tag{3.2}$$

*Теорема*. Пусть

$$K = \Lambda^{-1}, \quad h_1 > 0$$

т.е. $|\mathbf{s}| > 0$. Тогда справедливы эквивалентные утверждения для каждого момента времени $t \in [0, T]$:

(i) имеется решение $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ системы (2.7), удовлетворяющее условию

$$\operatorname{rank}(\mathbf{s}(t)|\boldsymbol{\mu}(t)|\Lambda\boldsymbol{\gamma}(t)) = 1 \tag{3.3}$$

(ii) имеется решение $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ системы (2.7) такое, что справедливы равенства

$$\mathbf{s} = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z), \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{dz}{dt}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z), \quad \Lambda\boldsymbol{\gamma} = \frac{d^2 z}{dt^2}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z) \tag{3.4}$$

где $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – скалярная функция с условием

$$\frac{d^3 z}{dt^3} = -1 \tag{3.5}$$

*Доказательство.* $(i) \Rightarrow (ii)$. Допустим, $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ – решение системы (2.7) с условием (3.3). Тогда имеются скалярные функции $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ соответствующей гладкости, для которых справедливы равенства

$$\boldsymbol{\mu} = x\mathbf{s}, \quad \Lambda\boldsymbol{\gamma} = y\mathbf{s} \tag{3.6}$$

При этом, по предположению $h_1 = |\mathbf{s}|^2 > 0$, вектор-функция $\mathbf{s}$ в нуль не обращается для каждого $t$ и поэтому разложение корректно. Покажем, что функции $x$, $y$ можно подобрать так, чтобы вектор-функции $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ с условием (3.6) удовлетворяли дифференциальным уравнениям (2.7).

Из первого уравнения (2.7) и разложения (3.6) получаем уравнение

$$\dot{\mathbf{s}} = x\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s} \tag{3.7}$$

Аналогично, используя второе уравнение (2.7) и соотношения (3.6), имеем

$$\dot{x}\mathbf{s} + x\dot{\mathbf{s}} = x^2\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s} + y\mathbf{s}$$

и, следовательно, в силу $h_1 > 0$ и равенства (3.7) имеем

$$\dot{x} = y \tag{3.8}$$

Наконец, используя разложение (3.6) в третьем уравнении (2.7), получаем

$$\dot{y}\Lambda^{-1}\mathbf{s} + xy\Lambda^{-1}\left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) = xy\left(\Lambda^{-1}\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) + xy\Lambda^{-1}\left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) - \Lambda^{-1}\mathbf{s}$$

и поэтому

$$\dot{y} = -1$$

т.к. $h_1 > 0$.

Положим

$$\dot{z} = x, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = -1 \tag{3.9}$$

и тогда

$$\dddot{z} = -1 \tag{3.10}$$

Таким образом, если $s$ – решение дифференциального уравнения (3.7), тогда тройка $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ с условием (3.6) и (3.10) есть некоторое решение уравнения (2.7).

Введем сложную функцию как композицию функций $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ и $z$, т.е. рассмотрим функцию $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z(t))$, определенную для каждого $t \in [0, T]$. По правилу дифференцирования сложной функции [13], воспользовавшись уравнениями Эйлера (3.2) получаем

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z)}{dt} = \frac{dz}{dt}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z) \times \Lambda^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z) \tag{3.11}$$

Сравнивая уравнения (3.7) с (3.11), приходим к выводу, что

$$\mathbf{s}(t) = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z(t)) \tag{3.12}$$

Теперь из представлений (3.6), (3.12) и (3.9) получаем требуемый результат: тройка $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из (3.4) действительно есть некоторое решение системы (2.7).

$(ii) \Rightarrow (i)$. По построению функции $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из (3.4) есть сложные функции, порожденные решением $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ уравнений Эйлера (3.2) и функцией (3.5). Используем правило дифференцирования сложных функций, тогда получаем из (3.4)

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{d\tilde{\boldsymbol{\Omega}}}{dt} = \frac{dz}{dt}\left(\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \Lambda^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Omega}}\right) = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \frac{dz}{dt}\Lambda^{-1}\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} \tag{3.13}$$

где использовалось уравнение (3.2), или

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

Далее из (3.4) и (3.2) имеем

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + \Lambda\boldsymbol{\gamma} \tag{3.14}$$

Поскольку справедливо равенство

$$\boldsymbol{\gamma}(t) \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}(t) = 0$$

из равенств (3.4) и уравнения (3.2) получаем

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} + \Lambda^{-1}(\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\gamma}) - \Lambda^{-1}\mathbf{s} \tag{3.15}$$

Дифференциальные уравнения (3.13)–(3.15) совпадают с системой уравнений (2.7) и, следовательно, вектор-функции $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из равенства (3.4) – решения уравнения (2.7).

Выберем теперь вектор-функцию $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ так, чтобы $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(0) \neq 0$. Из уравнения (3.1) тогда следует, что $|\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(t)| > 0$ для всех вещественных $t$. Поэтому вектор-функция $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z(t))$ для всех $t$ ненулевая, функция $z$ не нулевая и тогда из (3.4) получаем, что векторы $\boldsymbol{\mu}(t)$ и $\Lambda\boldsymbol{\gamma}(t)$ коллинеарны вектору $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(z(t)) = \mathbf{s}(t)$, что совпадает с условием (3.3).

Теорема доказана.

Формулы (3.4) в действительности определяют некоторое решение системы дифференциальных уравнений (2.7) как функции времени не явно, а посредством функций $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ и $z$. Для построения явных представлений требуется выписать соответствующие решения уравнений Эйлера (3.1). Если твердое тело имеет ось симметрии, тогда решения уравнений свободного вращения описываются посредством тригонометрических функций времени, что приводит к появлению экстремалей [10]. В общем случае решения уравнений Эйлера (3.1) для асимметричного твердого тела определяются через эллиптические функции Якоби и гиперболические функции времени в зависимости от численных значений параметров [14–16].

Из равенств (3.4), в частности, следуют формулы

$$\boldsymbol{\mu} = \dot{z}\mathbf{s}, \quad \Lambda\boldsymbol{\gamma} = \ddot{z}\mathbf{s} \tag{3.16}$$

Решение линейного дифференциального уравнения (3.5) известно и определяется многочленом третьего порядка

$$z = -\frac{1}{6}t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \tag{3.17}$$

где $a_i$ – постоянные.

Таким образом, описано явное частное решение системы дифференциальных уравнений (2.7), которое представляет собой редукцию прямой и сопряженной системы принципа максимума решаемой задачи оптимального управления. Показано, что тройка $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из частного решения утверждения теоремы возникает только в том случае, когда эти вектор-функции коллинеарны в каждый момент времени. Тройка $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ порождается соответствующим решением уравнений Эйлера для свободного вращения твердого тела.

**4. Восстановление экстремальной траектории.** Формулы (3.4), согласно теореме, являются некоторым решением системы уравнения (2.7). Однако эта тройка $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ недостаточна для восстановления соответствующей экстремальной траектории. Действительно, вектор-функции $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{u} = \Lambda\boldsymbol{\gamma}$ – это часть требуемой траектории, поэтому нужны кинематические вектор-функции $\mathbf{r}^i$. Покажем, что для частного решения системы (2.7) из теоремы восстановление экстремальной траектории принципиально возможно.

Согласно уравнениям Эйлера (3.1) функции (3.4) имеют производные любого порядка. Поэтому по функциям $\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}$ времени можно восстановить производные $\dot{\mathbf{s}}, \dot{\boldsymbol{\mu}}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}$ явным образом путем непосредственного дифференцирования, либо использовать соотношения (3.4) в правых частях уравнений (2.7).

Выберем произвольное решение $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ уравнения Эйлера (3.1). Поскольку верно

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \text{const}$$

тогда, если $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(\tau) \neq 0$ для какого-либо $\tau$, тогда $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}(t) \neq 0$ и для всех вещественных $t$.

Пусть $m = 1$. Для удобства положим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^1 \tag{4.1}$$

Поскольку используются формулы из равенств (3.4), то вектор-функция $s$ в нуль никогда не обращается. Пусть

$$\mathscr{A} = \{t \in \mathbb{R} : \dot{z}(t) = 0\}$$

В силу (3.9), (3.10) функция $\dot{z}$ есть многочлен второго порядка от $t$ и поэтому множество $\mathscr{A}$ не более чем двухточечное. Таким образом, классическая мера Лебега множества $\mathscr{A}$ нулевая. Будем считать, что тройка $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ не порождает вращения твердого тела относительно неподвижной оси в инерциальном пространстве. В противном случае восстановление экстремальной траектории тривиально. Тогда вектор $\mathbf{s}(t)$ не является собственным вектором матрицы $\Lambda$, и по этой причине векторы $\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}$ и $\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)$ линейно независимы при $t \notin \mathscr{A}$. Далее будем считать, что все последующие рассуждения справедливы для всех $t \in [0, T] \backslash \mathscr{A}$.

По построению

$$\mathbf{s}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$$

и тогда

$$\mathbf{r} \in \operatorname{Lin}\left\{\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)\right\} = \operatorname{Lin}\left\{\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}, \mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\right\}$$

Предположим, что имеются скалярные функции соответствующей гладкости $v, w$ такие, что

$$\mathbf{r} = v\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s} + w\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) = v\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s} + w\left(\Lambda^{-1}\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}\right)\mathbf{s} - w(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})\Lambda^{-1}\mathbf{s} \tag{4.2}$$

В результате непосредственного дифференцирования получаем

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{v}\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s} + \dot{w}\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) + v\left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)^{\bullet} + w\left(\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\right)^{\bullet} \tag{4.3}$$

С другой стороны, из уравнения (2.1) и обозначения (4.1) имеем

$$\dot{\mathbf{r}} = v\left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) \times \Lambda^{-1}\mathbf{s} + w\left(\Lambda^{-1}\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}\right)\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s} \tag{4.4}$$

Приравнивая правые части уравнений (4.3) и (4.4), после преобразований получаем

$$\begin{gathered}\dot{v}\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s} + \dot{w}\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) + v\left[\left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)^{\bullet} - \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right] + \\ + w\left[\left(\mathbf{s} \times \left(\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\right)^{\bullet} - \left(\Lambda^{-1}\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}\right)\mathbf{s} \times \Lambda^{-1}\mathbf{s}\right] = 0\end{gathered} \tag{4.5}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered}
f_0 = \left|\mathbf{s}\times\Lambda^{-1}\mathbf{s}\right|^2 \\
f_1 = \left[\left(\mathbf{s}\times\Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)^{\bullet}\right]\cdot\left(\mathbf{s}\times\Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) = \frac{1}{2}\dot{f}_0 \\
f_2 = \left(\mathbf{s}\times\left(\mathbf{s}\times\Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\right)^{\bullet}\cdot\left(\mathbf{s}\times\Lambda^{-1}\mathbf{s}\right) - \left(\Lambda^{-1}\mathbf{s}\cdot\mathbf{s}\right)\left|\mathbf{s}\times\Lambda^{-1}\mathbf{s}\right|^2 \\
g_0 = \left|\mathbf{s}\times\left(\mathbf{s}\times\Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\right|^2 = f_0\left|\mathbf{s}\right|^2 \\
g_1 = \left[\left(\mathbf{s}\times\Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)^{\bullet} - \left(\mathbf{s}\times\Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\times\Lambda^{-1}\mathbf{s}\right]\cdot\left[\mathbf{s}\times\left(\mathbf{s}\times\Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\right] \\
g_2 = \left(\mathbf{s}\times\left(\mathbf{s}\times\Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\right)^{\bullet}\cdot\left[\mathbf{s}\times\left(\mathbf{s}\times\Lambda^{-1}\mathbf{s}\right)\right] = \frac{1}{2}\dot{g}_0
\end{gathered} \tag{4.6}$$

В этом случае из векторного уравнения (4.5), используя соответствующие скалярные произведения, получаем систему скалярных линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
f_0\dot{v} + f_1 v + f_2 w = 0 \\
g_0\dot{w} + g_1 v + g_2 w = 0
\end{gathered} \tag{4.7}$$

относительно переменных $v, w$.

Для системы (4.7) имеется первый интеграл, соответствующий требованию $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T \in S^2$. Поэтому из равенства

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1 \tag{4.8}$$

следует разложение (4.2) и далее

$$v^2 f_0 + w^2 g_0 = 1 \quad \text{или} \quad v^2 + \left|\mathbf{s}\right|^2 w^2 = f_0^{-1} \tag{4.9}$$

Следовательно, система двух дифференциальных уравнений (4.7) может быть записана в виде одного уравнения

$$\left(f_0\dot{v} + f_1 v\right)^2 g_0 = \left(1 - f_0 v^2\right) f_2^2 \tag{4.10}$$

Таким образом, при $m = 1$ экстремальная траектория, соответствующая кинематическим параметрам, может быть принципиально восстановлена. Действительно, выбираем решение $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ уравнений Эйлера и соответствующую функцию $z$ времени из (3.5). Тогда по формулам строится вектор-функции $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ и соответствующие производные. Поскольку известны функции (4.6), из системы линейных дифференциальных уравнений (4.7), можно определить решения $v$, $w$. Теперь искомая экстремальная траектория определяется из соотношения (4.2).

Если твердое тело сферически симметричное, т.е. $\Lambda = \alpha I$, где $I$ — единичная матрица и $\alpha$ — вещественное число, тогда, как следует из равенств (3.4), векторы $\mathbf{s}(t)$, $\boldsymbol{\mu}(t)$ и $\Lambda\boldsymbol{\gamma}(t) = \alpha\boldsymbol{\gamma}(t)$ коллинеарны, а экстремальная траектория соответствует вращению относительно неподвижной оси, т.е. возникает плоский поворот.

Рассмотрим теперь построение экстремальной траектории для решения кинематических уравнений (2.1) при $m = 3$. К данному моменту вектор-функция времени $\boldsymbol{\mu}$ известна и определена по формулам (3.4), если определены функции $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ и $z$. Следовательно, система уравнений (2.1) является системой обыкновенных линейных неавтономных дифференциальных векторных уравнений. Решение уравнений (2.1) можно записать с помощью фундаментальной матрицы $F(t) \in \mathrm{SO}(3)$

$$\mathbf{r}^i(t) = F(t)\,\mathbf{r}^i(0), \quad i = 1, 2, 3$$

где

$$\dot{F} = -S\left(\Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}\right)F, \quad F(0) = I$$

$$S\left(\Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3^{-1}\mu_3 & \lambda_2^{-1}\mu_2 \\ \lambda_3^{-1}\mu_3 & 0 & -\lambda_1^{-1}\mu_1 \\ -\lambda_2^{-1}\mu_2 & \lambda_1^{-1}\mu_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$. Для матричной функции $F$ введем обозначения

$$F = \left(F^1 \middle| F^2 \middle| F^3\right)$$

где $F^i : \mathbb{R} \to \mathrm{S}^2$. При этом

$$F^i \cdot F^j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Введем вектор-функции по правилам

$$\tilde{F}_1 = \mathbf{r}, \quad \tilde{F}_2 = |\mathbf{s}|^{-1}\,\mathbf{s}, \quad \tilde{F}_3 = |\mathbf{r}\times\mathbf{s}|^{-1}\,\mathbf{r}\times\mathbf{s}$$

и матричную функцию

$$\tilde{F} = \left(\tilde{F}_1 \middle| \tilde{F}_2 \middle| \tilde{F}_3\right)$$

По построению $\tilde{F}(t) \in \mathrm{SO}(3)$. В этом случае фундаментальная матрица $F(t)$ может быть описана в виде

$$F = \tilde{F}^{-1}(0)\,\tilde{F}$$

Таким образом, установлено, что тройки функций $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из уравнений (2.7) достаточно для исследования прямой и сопряженной систем принципа максимума из заданной задачи оптимального управления. Вектор-функции $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ позволяют не единственным образом восстановить экстремальную траекторию.

**5. Примеры и комментарии.** Частное решение системы дифференциальных уравнений (2.7) согласно утверждению теоремы есть тройка функций $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ и представляет собой часть экстремальной траектории $\left(\mathbf{r}^i, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma}\right)$, которая далее может быть восстановлена до всей траектории. Соответствующие экстремальные траектории из утверждения теоремы определяются не для всех произвольных краевых условий и даже не для всех возможных начальных условий. Класс допустимых краевых условий может быть описан следующим образом: сначала выбираются начальные условия тройки функций $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из теоремы, а затем доопределяются возможные начальные условия кинематической части экстремальной траектории. Построенные таким образом примеры траекторий зависят от инерционных характеристик твердого тела и не всегда могут быть описаны посредством известных аналитических функций времени.

Применим уравнения Эйлера в эквивалентной координатной форме

$$\dot{\Omega}_1 = h_1\Omega_2\Omega_3, \quad \dot{\boldsymbol{\Omega}}_2 = h_2\Omega_1\Omega_3, \quad \dot{\Omega}_3 = h_3\Omega_1\Omega_2, \tag{5.1}$$

где $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T$ – вектор-функция угловой скорости свободно вращающегося тела. Поэтому верно соотношение

$$\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \Lambda\boldsymbol{\Omega}$$

Для удобства будет рассматриваться задача оптимальной переориентации с одновременным вращением для одной оси чувствительности, т.е. положим

$$m = 1$$

и, следовательно,

$$\mathbf{r}^1(t) = \mathbf{r}(t)$$

Для последующих примеров функцию времени $z$ из уравнения (3.5) теоремы выберем и зафиксируем в виде

$$z(t) = -\frac{1}{6}t^3 \tag{5.2}$$

Далее будут построены примеры экстремальных траекторий для сферически симметричного, динамически симметричного и асимметричного твердого тела соответственно.

Пусть имеется сферически симметричное тело

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad m = 1, \quad h_1 = h_2 = h_3 = 0$$

Соответствующие дифференциальные уравнения (5.1) приводятся к виду

$$\dot{\Omega}_1 = \dot{\Omega}_2 = \dot{\Omega}_3 = 0$$

и поэтому

$$\Omega_i(t) = \mathrm{const}_i = \Omega_i(0), \quad i = 1,2,3$$

Согласно уравнению (3.4) получаем требуемые вектор-функции

$$\begin{gathered} \mathbf{s} = \tilde{\mathbf{\Omega}}(z) = \Lambda\mathbf{\Omega}(z) = \mathbf{\Omega}(0) \\ \boldsymbol{\mu} = \dot{z}\tilde{\mathbf{\Omega}}(z) = \dot{z}\mathbf{\Omega}(0) \\ \boldsymbol{\gamma} = \ddot{z}\Lambda^{-1}\tilde{\mathbf{\Omega}}(z) = \ddot{z}\mathbf{\Omega}(0) \end{gathered} \tag{5.3}$$

Тройка $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ таким образом соответствует вращению твердого тела относительно неподвижной оси, отвечающей вектору $\mathbf{\Omega}(0)$.

Выберем начальное условие для вектора угловой скорости свободно вращающегося сферически симметричного тела следующим образом

$$\mathbf{\Omega}(0) = \mathbf{e}^3 = (0,0,1)^T$$

В силу (5.3) получаем формулы, соответствующие экстремальной тройке $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$

$$\begin{gathered} \mathbf{s}(0) = \mathbf{e}^3, \quad \mathbf{s}(t) = \mathbf{e}^3 \\ \boldsymbol{\mu}(0) = 0, \quad \boldsymbol{\mu}(t) = -\frac{1}{3}t^2\mathbf{e}^3 \\ \boldsymbol{\gamma}(0) = 0, \quad \boldsymbol{\gamma}(t) = -t\mathbf{e}^3 \end{gathered} \tag{5.4}$$

Поскольку по построению (5.2) имеем

$$z(0) = \dot{z}(0) = \ddot{z}(0) = 0$$

Восстановим допустимую экстремальную кинематическую часть траектории, т.е. в данном случае требуется построить вектор-функцию $\mathbf{r}$, соответствующую соотношениям (5.4).

Дифференциальные кинематические уравнения (2.1) для экстремальной траектории (5.4) в координатной форме принимают вид

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \\ \dot{r}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}t^2 \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

или

$$\dot{r}_1 = -\frac{1}{2}t^2 r_2, \quad \dot{r}_2 = \frac{1}{2}t^2 r_1, \quad \dot{r}_3 = 0 \tag{5.5}$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения (5.5) имеет вид

$$\begin{gathered} r_1(0) = \sin\varphi, \quad r_1 = \sin\left(-\frac{1}{6}t^3 + \varphi\right) \\ r_2(0) = \cos\varphi, \quad r_2 = \cos\left(-\frac{1}{6}t^3 + \varphi\right) \\ r_3(0) = 0, \quad r_3 = 0 \end{gathered} \tag{5.6}$$

где $\varphi$ – соответствующая постоянная. В частном случае получим

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{e}^2 = (0, 1, 0)^T$$

при $\varphi = 0$. Таким образом, формулы (5.4), (5.6) полностью определяют частную экстремальную траекторию в рассматриваемой задаче оптимальной переориентации для сферически симметричного твердого тела.

Рассмотрим далее частные экстремали для динамически симметричного твердого тела. Положим

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1; \quad h_1 = -h_2 = \frac{1}{2}, \quad h_3 = 0$$

Соответствующие дифференциальные уравнения Эйлера (5.1) сводятся к виду

$$\dot{\Omega}_1 = h_1\Omega_2\Omega_3, \quad \dot{\Omega}_2 = -h_1\Omega_1\Omega_3, \quad \dot{\Omega}_3 = 0 \tag{5.7}$$

Общее решение есть

$$\Omega_1 = a\cos(bt + \varphi), \quad \Omega_2 = a\sin(bt + \varphi), \quad \Omega_3 = \text{const} \tag{5.8}$$

где $a$, $b$, $\varphi$ – постоянные, не являющиеся произвольными. Подстановка решения (5.8) в систему (5.7) дает

$$\begin{gathered} -ab\sin(bt + \varphi) = h_1\Omega_3 a\sin(bt + \varphi) \\ ab\cos(bt + \varphi) = -h_1\Omega_3 a\cos(bt + \varphi) \end{gathered}$$

откуда получаем равенство

$$b = -h_1\Omega_3, \quad \Omega_3 = -bh_1^{-1}$$

т.е. свободными параметрами являются только $a$, $b$, $\varphi$.

Пусть

$$b = 1, \quad a = \frac{1}{2}, \quad \varphi = 0$$

Тогда в силу (5.8) координаты вектора угловой скорости свободно вращающегося тела имеют вид

$$\Omega_1(t) = \frac{1}{2}\cos t, \quad \Omega_2(t) = \frac{1}{2}\sin t, \quad \Omega_3(t) = -2$$

Согласно уравнениям (3.4) получаем требуемые вектор-функции

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= \left(\cos\left(-\frac{1}{6}t^3\right), \sin\left(-\frac{1}{6}t^3\right), -2\right)^T \\ \boldsymbol{\mu} &= -\frac{1}{2}t^2\left(\cos\left(-\frac{1}{6}t^3\right), \sin\left(-\frac{1}{6}t^3\right), -2\right)^T \\ \boldsymbol{\gamma} &= -t\left(\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{1}{6}t^3\right), \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{1}{6}t^3\right), -2\right)^T\end{aligned} \tag{5.9}$$

Начальные условия, таким образом, соответствуют допустимой экстремальной тройке $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ и вектору угловой скорости свободно вращающегося тела

$$\boldsymbol{\Omega}(0) = \left(\frac{1}{2}, 0, -2\right)^T, \quad \mathbf{s}(0) = (1, 0, -2)^T, \quad \boldsymbol{\mu}(0) = \boldsymbol{\gamma}(0) = 0$$

Восстановим соответствующую экстремальную кинематическую часть траектории в виде вектор-функции $r$, отвечающей функциям (5.9). Запишем требуемые дифференциальные уравнения (2.1) в координатной форме

$$\begin{pmatrix}\dot r_1 \\ \dot r_2 \\ \dot r_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r_1 \\ r_2 \\ r_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r_2\omega_3 - r_2\omega_2 \\ r_3\omega_1 - r_1\omega_3 \\ r_1\omega_2 - r_2\omega_1\end{pmatrix} \tag{5.10}$$

где

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T = \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu} = \dot z\left(\frac{1}{2}\cos z, \frac{1}{2}\sin z, -2\right)^T$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (5.10) для тройки $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из теоремы для динамически симметричного тела построено в [10]. Поэтому, основываясь на этом результате, будем считать, что справедливы равенства

$$\begin{aligned}r_1 &= a_{11}\cos(\theta z)\sin z + a_{12}\sin(\theta z)\cos z \\ r_2 &= a_{21}\cos(\theta z)\cos z + a_{22}\sin(\theta z)\sin z \\ r_3 &= a_{31}\sin(\theta z)\end{aligned} \tag{5.11}$$

где $a_{ij}$, $\theta$ — постоянные, которые требуется доопределить так, чтобы выполнялись уравнения (5.10).

Подстановка соотношений (5.11) в уравнения (5.10) после преобразований

$$\begin{aligned}&\left[-a_{11}\theta - a_{12} + 2a_{22} + \frac{1}{2}a_{31}\right]\sin(\theta z)\sin z + [a_{11} + a_{12}\theta + 2a_{21}]\cos(\theta z)\cos z = 0 \\ &\left[-a_{21}\theta + a_{22} - \frac{1}{2}a_{31} - 2a_{12}\right]\sin(\theta z)\cos z + [-a_{21} + a_{22}\theta - 2a_{11}]\cos(\theta z)\sin z = 0 \\ &\left[a_{31}\theta - \frac{1}{2}a_{11}\sin^2\theta + \frac{1}{2}a_{21}\cos^2\theta\right]\cos(\theta z) + \left[\frac{1}{2}a_{12} - \frac{1}{2}a_{22}\right]\sin(\theta z)\cos z\sin z = 0\end{aligned} \tag{5.12}$$

Поскольку функция $z$ может быть выбрана произвольно из условий (3.5), то равенства (5.12) должны быть справедливы только для соответствующих постоянных $a_{ij}$ и $\theta$. Таким образом, из соотношений (5.12) следует система алгебраических уравнений

$$-a_{11}\theta_1 - a_{12} + 2a_{22} + \frac{1}{2}a_{31} = 0 \tag{5.13}$$

$$a_{11} + a_{12}\theta + 2a_{21} = 0 \tag{5.14}$$

$$-a_{21}\theta + a_{22} - \frac{1}{2}a_{31} - 2a_{12} = 0 \tag{5.15}$$

$$-a_{21} + a_{22}\theta - 2a_{11} = 0 \tag{5.16}$$

$$a_{31}\theta - \frac{1}{2}a_{11}\sin^2\theta + \frac{1}{2}a_{21}\cos^2\theta = 0 \tag{5.17}$$

$$a_{12} - a_{22} = 0 \tag{5.18}$$

Вычитая (5.14) из (5.16) с учетом (5.18) получаем равенство

$$a_{11} + a_{21} = 0 \tag{5.19}$$

Подстановка (5.19) в (5.17) дает

$$2a_{31}\theta - a_{11} = 0 \tag{5.20}$$

Используя равенства (5.18) и (5.19), приходим к выводу, что равенства (5.14) и (5.16) сводятся к одному уравнению

$$a_{12}\theta - a_{11} = 0 \tag{5.21}$$

Поэтому далее из (5.20) и (5.21) получаем

$$a_{12} = 2a_{31} \tag{5.22}$$

если $\theta \neq 0$. Таким образом, из (5.18)–(5.22) получаем совокупность равенств

$$a_{11} = -a_{21} = 2a_{31}\theta \tag{5.23}$$

$$a_{12} = a_{22} = 2a_{31} \tag{5.24}$$

Из полученных соотношений выводим, что уравнения (5.13) и (5.15) эквивалентны и сводятся к решению

$$\theta^2 = \frac{5}{4} \tag{5.25}$$

Подставляя равенства (5.23)–(5.25) в уравнения (5.11), записываем

$$r_1 = 2a_{31}\theta\cos(\theta z)\sin z + 2a_{31}\sin(\theta z)\cos z = 2a_{31}(\theta\cos(\theta z)\sin z + \sin(\theta z)\cos z)$$
$$r_2 = -2a_{31}\theta\cos(\theta z)\cos z + 2a_{31}\sin(\theta z)\sin z = 2a_{31}(-\theta\cos(\theta z)\cos z + \sin(\theta z)\sin z)$$
$$r_3 = a_{31}\sin(\theta z)$$

Окончательно, используя условие нормировки (4.8) получаем выражение оставшегося параметра $a_{31}$

$$a_{31}^2 = \frac{1}{5}$$

Таким образом, вектор-функция орта $\mathbf{r}$ экстремальной траектории, соответствующей тройке $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из теоремы, может быть описана в виде

$$\begin{gathered}
r_1(t) = i_1\frac{2}{\sqrt{5}}\left(i_2\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\left(-i_2\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{6}t^3\right)\sin\left(-\frac{1}{6}t^3\right) + \sin\left(-i_2\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{6}t^3\right)\cos\left(-\frac{1}{6}t^3\right)\right)\\
r_2(t) = i_1\frac{2^2}{\sqrt{5}}\left(-i_2\frac{\sqrt{5}}{2}\cos\left(-i_2\frac{\sqrt{5}}{12}t^3\right)\cos\left(-\frac{1}{6}t^3\right) + \sin\left(-i_2\frac{\sqrt{5}}{12}t^3\right)\sin\left(-\frac{1}{6}t^3\right)\right)\\
r_3(t) = i_1\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\left(-i_2\frac{\sqrt{5}}{12}t^3\right)
\end{gathered} \tag{5.26}$$

где $i_1$, $i_2$ — произвольные постоянные с условием

$$i_1, i_2 \in \{-1, 1\}$$

Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{r}(0) = (0, -i_1 i_2, 0)^T = -i_1 i_2 \mathbf{e}^2$$

Таким образом, формулы (5.9) и (5.26) полностью характеризуют частную экстремальную траекторию $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ в рассматриваемой задаче оптимальной переориентации для динамически симметричного твердого тела.

Наконец, рассмотрим пример частной экстремали для асимметричного твердого тела. Сначала потребуются некоторые преобразования для решений свободного вращения в форме уравнений Эйлера. Для определенности будем считать, что

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3; \quad h_1 > 0, \quad h_2 < 0, \quad h_3 > 0$$

Если это не так, то для твердого симметричного $(\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3)$ тела имеется возможность перенумеровать переменные соответствующим образом.

Для дифференциальных уравнений (5.1) введем новые переменные

$$\Omega_i = a_i \xi_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{5.27}$$

где $a_i$ – постоянные, которые будут определены далее. Подстановка (5.27) в (5.1) дает

$$a_1 \dot{\xi}_1 = h_1 a_2 a_3 \xi_2 \xi_3 \tag{5.28}$$

$$a_2 \dot{\xi}_2 = h_2 a_1 a_3 \xi_1 \xi_3 \tag{5.29}$$

$$a_3 \dot{\xi}_3 = h_3 a_1 a_2 \xi_1 \xi_2 \tag{5.30}$$

Постоянные $a_i$ выберем в уравнениях (5.28), (5.29) таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$a_1 = -h_1 a_2 a_3, \quad a_2 = h_2 a_1 a_3$$

Несложное преобразование приведет к следующему результату

$$a_2 = -i_0 |h_1|^{-1/2} |h_2|^{1/2} a_1, \quad a_3 = i_0 |h_1 h_2|^{-1/2} \tag{5.31}$$

где $i_0 \in \{-1, 1\}$. Пусть

$$k^2 = |h_2 h_3| a_1^2 = -\frac{h_3 a_1 a_2}{a_3} \tag{5.32}$$

Постоянная $a_1$ выбирается так, чтобы $k \in (0, 1)$.

Соотношения (5.28)–(5.32) приводят к появлению системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi}_1 = -\xi_2 \xi_3, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_1 \xi_2, \quad \dot{\xi}_3 = -k^2 \xi_1 \xi_2 \tag{5.33}$$

Уравнения Эйлера (5.1), сводящиеся к уравнениям (5.33), могут быть получены не только с помощью линейных преобразований (5.27), но также с помощью других соотношений [16]. Решения системы дифференциальных уравнений (5.33) несложно теперь выразить через эллиптические функции Якоби.

Действительно, как известно ([17], §§ 22.11, 22.12), функции $\operatorname{sn} t, \operatorname{cn} t, \operatorname{dn} t$ могут быть определены как решение следующей задачи Коши

$$\begin{aligned} \operatorname{cn} 0 = 1, &\quad (\operatorname{cn} t)^\bullet = -\operatorname{sn} t \operatorname{dn} t \\ \operatorname{sn} 0 = 0, &\quad (\operatorname{sn} t)^\bullet = \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t \\ \operatorname{dn} 0 = 1, &\quad (\operatorname{dn} t)^\bullet = -k^2 \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \end{aligned} \tag{5.34}$$

с первыми интегралами

$$\operatorname{sn}^2 t + \operatorname{cn}^2 t = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 t + \operatorname{dn}^2 t = 1$$

Положим

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1; \quad h_1 = \frac{1}{3}, \quad h_2 = -1, \quad h_3 = 1$$

$$k = a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = \sqrt{3} \tag{5.35}$$

$$\xi_1(0) = 1, \quad \xi_2(0) = 0, \quad \xi_3(0) = 1$$

Таким образом, решение задачи Коши (5.33), (5.35) есть

$$\xi_1(t) = \operatorname{cn} t, \quad \xi_2(t) = \operatorname{sn} t, \quad \xi_3(t) = \operatorname{dn} t$$

и, следовательно, решение уравнения Эйлера свободного вращения имеет вид

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{cn} t, -\operatorname{sn} t, \sqrt{3}\operatorname{dn} t\right)^T \tag{5.36}$$

Теперь, согласно уравнениям (3.4), получаем требуемую тройку вектор-функций $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$

$$\begin{aligned}
\mathbf{s} &= \Lambda\boldsymbol{\Omega}(z) = \left(\sqrt{3}\operatorname{cn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right), -2\operatorname{sn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right), \sqrt{3}\operatorname{dn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)\right)^T \\
\boldsymbol{\mu} &= \dot{z}\Lambda\boldsymbol{\Omega}(z) = -\frac{1}{2}t^2\left(\sqrt{3}\operatorname{cn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right), -2\operatorname{sn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right), \sqrt{3}\operatorname{dn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)\right)^T \\
\boldsymbol{\gamma} &= \ddot{z}\boldsymbol{\Omega}(z) = -t\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{cn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right), -\operatorname{sn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right), \sqrt{3}\operatorname{dn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)\right)^T
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Начальные условия соответствуют допустимой экстремальной тройке $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$, построенной по вектор-функции $\boldsymbol{\Omega}$ есть

$$\boldsymbol{\Omega}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \sqrt{3}\right)^T, \quad \mathbf{s}(0) = \left(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\right)^T, \quad \boldsymbol{\mu}(0) = \boldsymbol{\gamma}(0) = 0 \tag{5.38}$$

Здесь равенство $\boldsymbol{\mu}(0) = \boldsymbol{\gamma}(0) = 0$ возникает в силу выбранной функции $z$.

Восстановить соответствующую экстремальную кинематическую часть траектории $r$, отвечающей функциям (5.37), в явном виде не удается. Тем не менее, можно построить требуемые дифференциальные уравнения (2.1)

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \Lambda^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

Таким образом, данная система в координатной форме имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{r}_1 &= -\frac{1}{3}t^2\left(\sqrt{3}\operatorname{dn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)r_2 + \operatorname{sn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)r_3\right) \\
\dot{r}_2 &= -\frac{1}{3}t^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{cn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)r_3 - \sqrt{3}\operatorname{dn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)r_1\right) \\
\dot{r}_3 &= -\frac{1}{3}t^2\left(-\operatorname{sn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)r_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{cn}\left(-\frac{1}{6}t^3\right)r_2\right)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Получаемая система представляет собой систему линейных неавтономных дифференциальных уравнений с тривиальным первым интегралом (4.8). Начальные условия $r(0)$ не могут быть произвольными, но имеется ограничение

$$\mathbf{s}(0) \cdot \mathbf{r}(0) = 0$$

в силу чего вектор $\mathbf{r}(0)$ можно выбрать в виде

$$\mathbf{r}(0) \cdot \left(\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^3\right) = 0 \tag{5.40}$$

В частности, можно выбрать $\mathbf{r}(0) = \mathbf{e}^2$.

Таким образом, частная экстремальная траектория $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ в задаче оптимальной переориентации для асимметричного твердого тела описывается формулами (5.37)–(5.39).

Частная экстремальная траектория, порожденная тройкой $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ из теоремы, обладает специфическими свойствами. В частности, из дифференциального уравнения (3.5) и соответствующего решения (3.17) можно сделать вывод, что $z$ – многочлен третьего порядка относительно переменной $t$. Тогда множество $\mathscr{A} = \{t \in \mathbb{R} : \dot{z}(t) = 0\}$ может быть не более чем двухточечным. Поэтому

$$\boldsymbol{\mu} = \dot{z}\boldsymbol{\Omega}(z) = 0, \quad t \in \mathscr{A}$$

и, следовательно, у частной экстремали может быть не более двух остановок (положений покоя).

Восстановление кинематической экстремальной траектории по тройке $(\mathbf{s}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\gamma})$ можно осуществить, по крайней мере, двумя способами: либо использовать результаты разд. 4, либо попытаться решить систему дифференциальных линейных неавтономных уравнений (2.1) поскольку функция времени $\boldsymbol{\mu}$ известна из (3.4).

**6. Заключение.** В статье рассмотрены нормальные экстремальные траектории и управления углового движения абсолютно твердого тела относительно неподвижной точки, совпадающей с центром масс. Установлено, что частные экстремали основаны на использовании пространственно-временных деформаций решений динамических уравнений Эйлера для свободного вращения твердого тела. Класс решений не связан с ограничениями для симметрий тензора инерции и удается построить решения для произвольного асимметричного твердого тела.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Warier R.R., Sinha A., Sukumar S.* Line-of-sight based spacecraft attitude and position tracking control // Eur. J. Control. 2016. V. 32. P. 43–53.
2. *Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A.* Monoaxial attitude stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque // Nonlin. Dyn. Syst. Theory. 2018. V. 18. № 1. P. 12–21.
3. *Nayak A., Banavar R.N., Maithripala D.H.S.* Almost-global tracking for a rigid. body with internal rotors // Eur. J. Control. 2018. V. 42. P. 59–66.
4. *Biggs J.D., Horri N.* Optimal geometric motion planning for a spin-stabilized spacecraft // Systems & Control Lett. 2012. V. 61. № 4. P. 609–616.
5. *Левский М.В.* Управление переориентацией космического аппарата с минимальным интегралом энергии // АиТ. 2010. № 12. С. 25–42.
6. *Молоденков А.В., Сапунков Я.Г.* Аналитическое квазиоптимальное решение задачи разворота произвольного твердого тела при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 2. С. 140–154.
7. *Левский М.В.* Оптимальное управление кинетическим моментом во время пространственного разворота твердого тела (космического аппарата) // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 1. С. 115–140.
8. *Акуленко Л.Д.* Аналитические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368 с.
9. *Сиротин А.Н.* Об одном семействе аналитических экстремалей в задачах оптимального управления вращением тела // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 746–764.
10. *Акуленко Л.Д., Сиротин А.Н.* Тригонометрические экстремали в задаче оптимального управления переориентацией оси динамически симметричного вращающегося тела // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 2–11.
11. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкридзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961, 384 с.
12. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005. 392 с.
13. *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1967. 704 с.
14. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. 824 с.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т.1. Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.
16. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
17. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. М.: ГИФМЛ, 1963. 513 с.

## On Particular Extremals in the Problem of Optimal Control of the Reorientation of an Asymmetric Rotating Body

**L. D. Akulenko[a] and A. N. Sirotin[b,#]**

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

[b] *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: asirotin2@yandex.ru*

The optimal control problem for the reorientation of an asymmetric solid is investigated. As a criterion, the integral-quadratic functional is selected, consistent with the inertial symmetry of the body, which characterizes the total energy consumption. The main moment of the applied external forces is considered as the control. An explicit description of the family of extremals for an arbitrary asymmetric rigid body is obtained. The idea of constructing such extremals is based on the study of spatio-temporal deformations of solutions of Euler differential equations of free rotation of a rigid body.

*Keywords:* reorientation, optimal control

## REFERENCES

1. *Warier R.R., Sinha A., Sukumar S.* Line-of-sight based spacecraft attitude and position tracking control // Eur. J. Control, 2016, vol. 32, pp. 43–53.
2. *Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A.* Monoaxial attitude stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque // Nonlin. Dyn. Syst. Theory, 2018, vol. 18, no. 1, pp. 12–21.
3. *Nayak A., Banavar R.N., Maithripala D.H.S.* Almost-global tracking for a rigid .body with internal rotors // Eur. J. Control, 2018, vol. 42, pp. 59–66.
4. *Biggs J.D., Horri N.* Optimal geometric motion planning for a spin-stabilized spacecraft // Systems & Control Lett., 2012, vol. 61, no. 4, pp. 609–616.
5. *Levskii M.V.* Controlling space vehicle reorientation with minimal energy integral // Automat.&Remote Control, 2010, vol. 71, pp. 2518–2533.
6. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical quasi-optimal solution for the problem on turn maneuver of an arbitrary solid with arbitrary boundary conditions // Mech. Sol., 2019, vol. 3, pp. 474–485.
7. *Levskii M.V.* Optimal control of kinetic moment during the spatial rotation of a rigid body (spacecraft) // Mech. Sol., 2019, vol. 1, pp. 92–111.
8. *Akulenko L.D.* Analytical Methods of Optimal Control (Analiticheskie metody optimal'nogo upravleniya). Moscow: Nauka, 1987. 368 pp. (in Russian)
9. *Sirotin A.N.* A family of analytic extremals in problems of the optimal control of the rotation of a body // JAMM, 2011, vol. 75, Iss. 5, pp. 522–533.
10. *Akulenko L.D., Sirotin A.N.* Trigonometric extremals in the optimal control problem of the reorientation of the axis of a dynamically symmetric rotating body // JAMM, 2013, vol. 77, Iss. 3, pp. 305–313.
11. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. N.Y.: Wiley, 1962. 368 p
12. *Agrachev A.A., Sachkov Yu.L.* Control Theory from the Geometric Viewpoint. Berlin: Springer, 2004. xiv+412 pp.
13. *Courant R.* Differential and Integral Calculus. V. 1. N.Y.: Interscience Publ., 1965. xxiii+661 pp.
14. *Lurie A.I.* Analytical Mechanics. Berlin: Springer, 2002. iv+864 pp.
15. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Mechanics. Oxford. Pergamon Press 1969.
16. *Arnold V.I.* Mathematical methods of classical mechanics. N.Y.: Springer, 1989. xvi+520 pp.
17. *Whittaker E.T., Watson G.N.* A Course of Modern Analysis. Cambridge: Univ. Press, 1996.