ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 2, с. 175–181

УДК 532.5

МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ДИФФУЗИОННО-ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Д. В. Георгиевский[1,2,*]

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

[2] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию 01.11.2019 г.
После доработки 10.01.2020 г.
Принята к публикации 22.01.2020 г.

Исследуются плоские диффузионно-вихревые течения в полуплоскости вязкой несжимаемой жидкости, управляемые движением границы. На границе могут быть заданы как функции времени либо продольная скорость либо касательное напряжение. Классические автомодельные решения имеют место, если эти функции совпадают с функцией Хевисайда. Приводится постановка линеаризованной задачи относительно малых начальных возмущений, наложенных на кинематику во всей полуплоскости. Она состоит из одного бипараболического уравнения с переменными коэффициентами относительно комплекснозначной функции тока и четырех однородных граничных условий. С помощью метода интегральных соотношений выводятся экспоненциальные оценки, которые при одних значениях параметров являются оценками затухания, а при других указывают на характер роста возмущений. Анализируются некоторые характерные случаи задания скорости границы либо касательного напряжения на ней.

Ключевые слова: диффузия вихревого слоя, сдвиговое течение, касательное напряжение, несжимаемость, вязкость, малые возмущения, квадратичный функционал, затухание, экспоненциальная оценка

DOI: 10.31857/S0032823520020046

Известные в механике сплошной среды автомодельные и квазиавтомодельные диффузионно-вихревые течения в полуплоскости с заданным движением границы служат хорошим приближением при моделировании граничного управления процессами, происходящими в недоступной для приложения сил области движения среды. Важной задачей является нахождение параметров, в частности, закона движения границы, при которых малые начальные возмущения, наложенные на одномерные нестационарные диффузионно-вихревые течения, не возрастают (либо экспоненциально затухают) со временем по некоторой мере во всей полуплоскости.

1. Диффузия вихревого слоя с заданной скоростью границы полуплоскости. Пусть полуплоскость $\Omega = \{-\infty < x_1 < \infty,\ x_2 > 0\}$ с границей $\Sigma = \{-\infty < x_1 < \infty,\ x_2 = 0\}$ занята однородной несжимаемой вязкой жидкостью с плотностью ρ и динамической вязкостью μ. При $t < 0$ среда покоилась, а в момент $t = 0$ граница Σ начинает двигаться вдоль самой себя с заданной кусочно-непрерывной во времени скоростью $V(t)$. Возможно наличие массовой силы F с компонентами $F_1 = 0$, $F_2 = F(x_2, t)$.

Далее будем вести изложение в безразмерном виде, включив в размерный базис тройку величин $\{\rho, \mu, V_0\}$, где V_0 – характерное значение функции $V(t)$. Так, классическая диффузия разрыва имеет место, если $V(t)$ совпадает с функцией Хевисайда $h(t)$. Здесь и далее $V(t)$ – безразмерная в упомянутом базисе скорость границы Σ.

Нестационарный одномерный сдвиг в области Ω при $t > 0$ моделируется начально-краевой задачей параболического типа

$$x \in \Omega, \quad t > 0: \quad \frac{\partial \sigma^\circ}{\partial x_2} = \frac{\partial v^\circ}{\partial t}, \quad \sigma^\circ = \frac{\partial v^\circ}{\partial x_2} \tag{1.1}$$

$$\begin{gathered} x_2 = 0, \quad t > 0:\ v^\circ = V(t), \quad x_2 \to \infty, \quad t > 0:\ v^\circ \to 0 \\ x \in \Omega, \quad t \to 0^+:\ v^\circ \to 0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

относительно функций $v^\circ(x_2, t)$ и $\sigma^\circ(x_2, t)$, являющихся компонентами v_1° и σ_{12}° вектора скорости и тензора напряжений соответственно. Остальные их компоненты таковы:

$$v_2^\circ \equiv 0, \quad \sigma_{11}^\circ = \sigma_{22}^\circ = \sigma_{33}^\circ = -p^\circ(x_2, t) = -\int F(x_2, t) dx_2 \tag{1.3}$$

Давление p° отделяется от системы уравнений (1.1) и не оказывает влияния на кинематику диффузии плоского вихревого слоя в Ω.

Точное решение начально-краевой задачи (1.1), (1.2) может быть представлено с помощью интегралов Стилтьеса

$$v^\circ = V(t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^{x_2/(2\sqrt{t-\tau})} e^{-\zeta^2} d\zeta dV(\tau) \tag{1.4}$$

$$\sigma^\circ = -\int_0^t \exp\left(-\frac{x_2^2}{4(t-\tau)}\right) \frac{dV(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \tag{1.5}$$

Здесь $dV(t)$ понимается как $\dot{V}(t)dt$ в точках непрерывности функции V и как $[V](t_k)\delta(t - t_k)dt$ в возможных точках t_k, $k = 1, 2, \ldots$, ее разрыва ($[V](t_k)$ – скачки в точках t_k; $\delta(t)$ – функция Дирака).

Наложим во всей области Ω малые начальные возмущения δv_i, δp, $\delta\sigma_{ij}$, $i, j = 1, 2$, зависящие от x_1, x_2 и t, на нестационарное одномерное сдвиговое течение с параметрами (1.3)–(1.5) и исследуем развитие картины этих возмущений при $t > 0$. Предполагая, что при определенных условиях они остаются малыми и при $t > 0$ (в дальнейшем надо определить именно эти условия), дадим постановку линеаризованной задачи в возмущениях. Замкнутая система уравнений в Ω относительно трех функций $\delta v_i(x_1, x_2, t)$, $\delta p(x_1, x_2, t)$ имеет вид

$$\begin{gathered} -\delta p_{,1} + \Delta \delta v_1 = \delta v_{1,t} + v^\circ \delta v_{1,1} + v_{,2}^\circ \delta v_2 \qquad -\delta p_{,2} + \Delta \delta v_2 = \delta v_{2,t} + v^\circ \delta v_{2,1} \\ \delta v_{1,1} + \delta v_{2,2} = 0 \end{gathered} \tag{1.6}$$

Запятая в индексе означает частное дифференцирование по соответствующей координате либо по времени.

Путем введения функции тока ($\delta v_1 = \psi_{,2}$, $\delta v_2 = -\psi_{,1}$) система (1.6) стандартным образом редуцируется к одному бипараболическому уравнению

$$\Delta\Delta\psi = (\Delta\psi)_{,t} + v^\circ (\Delta\psi)_{,1} - v_{,22}^\circ \psi_{,1} \tag{1.7}$$

Выберем отдельную гармонику возмущения с волновым числом $s > 0$ вдоль оси x_1:

$$\psi(x_1, x_2, t) = \varphi(x_2, t) e^{isx_1} \tag{1.8}$$

и придем к уравнению относительно комплекснозначной функции φ:

$$\varphi_{,2222} - 2s^2\varphi_{,22} + s^4\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + isv^\circ\right)(\varphi_{,22} - s^2\varphi) - isv^\circ_{,22}\varphi \tag{1.9}$$

обобщающему классическое уравнение Орра–Зоммерфельда [1] на случай, когда невозмущенное течение само по себе нестационарно [2]. Заметим, что в левой части (1.9) отсутствует традиционный для уравнения Орра–Зоммерфельда в слое множитель $1/\mathrm{Re}$ с числом Рейнольдса. Его невозможно составить из размерных параметров системы из-за того, что в задаче нет характерного линейного размера.

Положим, что движение границы Σ в возмущенном течении не меняется по сравнению с невозмущенным. Это означает, что

$$x_2 = 0, \quad t > 0\colon\ \varphi = 0, \quad \varphi_{,2} = 0; \quad x_2 \to \infty, \quad t > 0\colon\ \varphi \to 0, \quad \varphi_{,2} \to 0 \tag{1.10}$$

Для анализа задачи (1.9), (1.10) воспользуемся методом интегральных соотношений, позволяющим выводить достаточные интегральные оценки затухания начальных возмущений и получившим широкое применение в линеаризованной теории гидродинамической устойчивости. В обзорах, содержащихся в [3, 4], такие оценки собраны для большого класса течений с различными: а) кинематикой невозмущенного движения (не только соответствующей сдвигу); б) определяющими соотношениями, включающими неньютоновские, вязкопластические среды, материалы с тензорно нелинейной связью напряжений и скоростей деформаций, кусочно-неоднородные и непрерывно стратифицированные среды; в) классами возмущений, удовлетворяющими либо не удовлетворяющими теореме Сквайра или аналогичным утверждениям. В публикуемой работе, как и в [2], особенностью является то, что в силу нестационарности основного течения уравнение (1.9) не содержит явно спектрального параметра, по знаку действительной части которого можно было бы судить об устойчивости возмущенной картины. Роль этого параметра выполняет частная производная по t. Присутствие такого “операторного” спектрального параметра налагает особенности на процедуру метода, и, как будет видно, в целом усложняет его.

Положим, что $\varphi(x_2, t) = \varphi_* + i\varphi_{**}$ – элемент комплекснозначного гильбертова пространства $H_2(0, \infty)$ с нормой

$$\|\varphi\|(t) = \left(\int_0^\infty |\varphi|^2 dx_2\right)^{1/2} \tag{1.11}$$

Аналитическая схема метода интегральных соотношений формально сводится к следующим процедурам. Умножим обе части (1.9) на $\overline{\varphi}(x_2, t) = \varphi_* - i\varphi_{**}$ и проинтегрируем по x_2 от нуля до бесконечности с учетом граничных условий (1.10). После преобразований запишем для действительных частей получившегося равенства:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(I_1^2 + s^2 I_0^2) = s\int_0^\infty v^\circ_{,2}(\varphi_{,2}\overline{\varphi})_{**} dx_2 - (I_2^2 + 2s^2 I_1^2 + s^4 I_0^2) \tag{1.12}$$

$$I_n^2(t) = \int_0^\infty \left|\frac{\partial^n \varphi}{\partial x_2^n}\right|^2 (x_2, t) dx_2, \quad n = 0, 1, 2 \tag{1.13}$$

Неравенство Коши–Буняковского в H_2 позволяет оценить сверху первое слагаемое в правой части уравнения (1.12):

$$s\int_0^\infty v^\circ_{,2}(\varphi_{,2}\overline{\varphi})_{**} dx_2 \le sq(t)\left(\int_0^\infty |\varphi_{,2}|^2\, dx_2\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty |\varphi|^2\, dx_2\right)^{1/2} =$$

$$= sq(t) I_1(t) I_0(t) \le \frac{q}{2}(I_1^2 + s^2 I_0^2) \tag{1.14}$$

$$q(t) = \sup_{x_2>0}|v^\circ_{,2}| = \sup_{x_2>0}|\sigma^\circ| \tag{1.15}$$

Тогда для левой части уравнения (1.12) получим

$$\frac{d}{dt}(I_1^2 + s^2 I_0^2) \le -[2I_2^2 + (4s^2 - q)I_1^2 + s^2(2s^2 - q)I_0^2] \tag{1.16}$$

Пусть $\Lambda(s,t)$ – оценивающая функция, такая что неравенство

$$2I_2^2 + (4s^2 - q)I_1^2 + s^2(2s^2 - q)I_0^2 \ge \Lambda(I_1^2 + s^2 I_0^2) \tag{1.17}$$

справедливо для любой функции $\varphi \in H_2(0,\infty)$ с условиями (1.10). Тогда несложно вывести интегральную оценку развития возмущений

$$(I_1^2 + s^2 I_0^2)(t) \le (I_1^2 + s^2 I_0^2)(0)\exp\left(-\int_0^t \Lambda(s,\tau)d\tau\right) \tag{1.18}$$

Нахождение функций Λ связано с оценками отношений квадратичных функционалов I_n^2, $n = 0,1,2$, в пространстве $H_2(0,\infty)$. На конечном интервале эти оценки следуют из неравенств Фридрихса [5], при выводе которых используют экстремальные свойства первых положительных собственных значений соответствующих задач [6]. Не останавливаясь на возможных обобщениях неравенств Фридрихса на полубесконечный интервал, заметим, что если $\Lambda(s,t) \le 2s^2 - q(t)$, то неравенство (1.17) выполнено для любых функций $\varphi \in H_2(0,\infty)$. Выбирая для оценки минимальный из этого полуинтервала параметр Λ, равный $2s^2 - q(t)$, из оценки (1.18) получим

$$(I_1^2 + s^2 I_0^2)(t) \le (I_1^2 + s^2 I_0^2)(0)\exp\left(-2s^2 t + \int_0^t q(\tau)d\tau\right) \tag{1.19}$$

Поскольку $q(t) \ge 0$ в силу неравенства (1.15), единой равномерной по s оценки затухания начальных возмущений (даже если $\int_0^t q(\tau)d\tau$ растет при $t \to \infty$ медленнее, чем линейная функция) из соотношения (1.19) представить не удается. Видно, что коротковолновые гармоники затухают заведомо быстрее, чем длинноволновые.

Обратим отдельное внимание на случай $s = 0$, в котором δv_1 зависит только от x_2 и t, а $\delta v_2 \equiv 0$. Из соотношения (1.12) следует, что для таких одномерных возмущений имеет место достаточно грубая оценка

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}I_1^2 = -I_2^2 \le 0 \Rightarrow I_1^2(t) \le I_1^2(0) \tag{1.20}$$

2. Частные случаи задания скорости границы. Остановимся ниже на некоторых характерных случаях задания скорости $V(t)$.

а) “Ступенька Хевисайда”. Пусть $V(t) = h(t)$. Тогда согласно решению (1.5)

$$\sigma^\circ(x_2,t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x_2^2}{4t}\right), \quad q(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, \quad \int_0^t q(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{\pi}} \tag{2.1}$$

Показатель экспоненты в соотношении (1.19), равный $-2s^2 t + (\sqrt{t/\pi})/2$, стремится к минус бесконечности при $t \to \infty$ для любого волнового числа $s > 0$, что говорит о затухании возмущений в смысле интегральной меры (1.11). Но чем больше длина возмущения вдоль оси x_1, тем медленнее происходит затухание.

б) Степенной рост. Пусть $V(t) = t^\gamma$, $\gamma > 0$. Имеем

$$\sigma^\circ(x_2,t) = -\gamma\int_0^t \exp\left(-\frac{x_2^2}{4(t-\tau)}\right)\frac{\tau^{\gamma-1}d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}$$

$$q(t) = \gamma\int_0^t \frac{\tau^{\gamma-1}d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} = J(\gamma)t^{\gamma-1/2}, \quad J(\gamma) = \gamma\int_0^1 \frac{x^{\gamma-1}dx}{\sqrt{\pi(1-x)}} < \infty \tag{2.2}$$

$$\int_0^t q(\tau)d\tau = \frac{2J(\gamma)}{2\gamma+1}t^{\gamma+1/2}$$

Выделим три подслучая:

*б*1) $0 < \gamma < 1/2$. Тогда показатель экспоненты в неравенстве (1.19) при $t \to \infty$ стремится к минус бесконечности для любого $s > 0$, т.е. начальные возмущения со всеми гармониками экспоненциально затухают;

*б*2) $\gamma = 1/2$; $J(1/2) = \sqrt{\pi}/2$. Показатель экспоненты в неравенстве (1.19) – линейная функция $(\sqrt{\pi}/2 - s^2)t$. Гармоники с волновыми числами, большими чем $4\pi/\sqrt{2}$, экспоненциально затухают;

*б*3) $\gamma > 1/2$. В этом случае скорость границы растет достаточно быстро, и о затухании возмущений ничего сказать нельзя. Неравенство (1.19) играет роль только верхней оценки роста возмущений при $t \to \infty$.

3. Диффузия вихревого слоя с заданным касательным напряжением на границе полуплоскости. Исследуем родственное предыдущему течение такой же среды, которое отличается тем, что на прямолинейной границе Σ задана не скорость, а касательное напряжение $\sigma_{12} = S(t)$, не меняющееся и в возмущенном движении [7]. В размерный базис включим теперь тройку величин $\{\rho, \mu, S_0\}$, где S_0 – характерное значение функции $S(t)$. Классическая диффузия разрыва касательного напряжения имеет место, если $S(t) = h(t)$. Как и ранее, во избежание новых обозначений в последней формуле S – уже безразмерная функция, отнесенная к S_0. Скорость границы в начальный момент времени терпит излом, но является непрерывной.

Система уравнений (1.1) и соотношения (1.3) в Ω остаются прежними, а вместо граничных и начальных условий (1.2) запишем

$$\begin{gathered} x_2 = 0, \quad t > 0\colon\ \sigma^\circ = S(t), \quad x_2 \to \infty, \quad t > 0\colon\ \sigma^\circ \to 0 \\ x \in \Omega, \quad t \to 0^+\colon\ \sigma^\circ \to 0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

Точное решение начально-краевой задачи (1.1), (3.1) имеет вид

$$\sigma^\circ = S(t) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \int_0^{x_2/(2\sqrt{t-\tau})} e^{-\zeta^2}d\zeta dS(\tau) \tag{3.2}$$

$$v^\circ = S(t)x_2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x_2}\int_0^t \int_0^{y/(2\sqrt{t-\tau})} e^{-\zeta^2}d\zeta dS(\tau)dy + v_\Sigma^\circ(t), \tag{3.3}$$

где скорость границы Σ полуплоскости определяется выражением

$$v_\Sigma^\circ = -\int_0^t\int_0^\xi \frac{dS(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\xi \tag{3.4}$$

Постановка и анализ линеаризованной задачи в возмущениях, наложенных на основное движение с параметрами (3.2)–(3.4), весьма схожи с рассмотренными в п. 1.

Остановимся на отличиях и особенностях задачи о диффузии вихревого слоя с заданным касательным напряжением.

Уравнение (1.9) относительно комплекснозначной функции $\varphi(x_2, t)$ теперь сопровождается однородными условиями

$$x_2 = 0, \quad t > 0: \ \varphi = 0, \quad \varphi_{,22} = 0; \quad x_2 \to \infty, \quad t > 0: \ \varphi \to 0, \quad \varphi_{,22} \to 0, \tag{3.5}$$

соответствующими тому, что в возмущенном процессе граница Σ остается прямолинейной, и на ней значение касательного напряжения $S(t)$ такое же, как и в невозмущенном.

Применение метода интегральных соотношений к задаче (1.9), (3.5) непосредственно приводит к той же, что и ранее, экспоненциальной оценке (1.19). Функция $q(t)$ определяется из равенств (1.15), куда теперь надо подставить выражения (3.2)–(3.4). Остановимся на некоторых характерных случаях задания на Σ касательного напряжения $S(t)$.

а) "Ступенька Хевисайда". Пусть $S(t) = h(t)$. Тогда параметры основного течения следующие:

$$\begin{gathered}\sigma^\circ = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x_2/(2\sqrt{t})} e^{-\zeta^2} d\zeta, \quad q(t) \equiv 1 \\ v^\circ = x_2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x_2} \int\limits_0^{y/(2\sqrt{t})} e^{-\zeta^2} d\zeta dy - 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\end{gathered} \tag{3.6}$$

Модуль скорости границы $|v_\Sigma^\circ|$ равен $2\sqrt{t/\pi}$, т.е. течение неограниченно разгоняется.

Оценивающий показатель экспоненты в (1.19) – линейная функция времени $(1 - 2s^2)t$. Она стремится к минус бесконечности при достаточно больших волновых числах $s \geq 1/\sqrt{2}$. Для длинноволновых возмущений $(s < 1/\sqrt{2})$ неравенство (1.19) не является оценкой затухания.

б) Монотонный рост. Пусть $S(t)$ – неотрицательная кусочно-непрерывная монотонно неубывающая функция. Тогда $q(t) = S(t)$ и показатель экспоненты в (1.19) равен $-2s^2 t + \int_0^t dS(\tau)$. От его поведения при больших t зависит то, какой оценкой является неравенство (1.19): затухания возмущений или их роста.

Выводы. Найденные достаточные интегральные экспоненциальные оценки развития малых начальных возмущений в полуплоскости показывают, что во всех рассмотренных задачах наименее устойчивым является возмущенное движение, соответствующее гармоникам с малыми волновыми числами, т.е. длинноволновым возмущениям. В задаче о диффузии плоского вихревого слоя с заданной скоростью $V(t)$ границы степенной рост функции $V(t) = t^\gamma$ с показателем γ, меньшим чем $1/2$, приводит к затуханию малых по интегральной мере пространства $H_2(0, \infty)$ кинематических возмущений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-29-10085 мк, 19-01-00016 а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бетчов Р., Криминале В.* Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 350 с.
2. *Георгиевский Д.В.* Устойчивость нестационарного сдвига среды Бингама в плоском слое // ПММ. 2018. Т. 82. Вып. 6. С. 798–807.

3. *Козырев О.Р., Степанянц Ю.А.* Метод интегральных соотношений в линейной теории гидродинамической устойчивости // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 25. С. 3–89.

4. *Георгиевский Д.В.* Избранные задачи механики сплошной среды. М.: ЛЕНАНД, 2018. 560 с.

5. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 592 с.

6. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968.

7. *Георгиевский Д.В.* Задачи в напряжениях диффузионно-вихревого типа в неограниченном жестковязкопластическом пространстве // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 5. С. 53–60.

Small Perturbations of Diffusion–Vortex Flows for Newtonian Fluid in a Half-Plane

D. V. Georgievskii[a,b,#]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[b] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

The plane diffusion-vortex flows in a half-plane of viscous incompressible fluid which are controlled by motion of the boundary are analysed. Either shear velocity or shear stress may be given as the functions of time along the boundary. The classic self-similar solutions take place if these functions coincide with the Heaviside function. Formulation of the linearized problem with respect of small initial perturbations imposed on kinematics in all the half-plane is given. It consists of one biparabolic equation with non-constant coefficients involving one complex-valued stream function and four homogeneous boundary conditions. Using the integral relations method, the exponential inequalities which are the decay estimates or the estimates characterizing the growth of perturbations in time (in depend on values of parameters), are received. Some typical cases of choose of the boundary velocity or the boundary shear stress are investigated.

Keywords: diffusion of vortex layer, shear flow, shear stress, incompressibility, viscosity, small perturbations, quadratic functional, decay, exponential estimate

REFERENCES

1. *Betchov R., Criminale W.O.* Stability of Parallel Flows. N.Y.; London: Acad. Press, 1967.

2. *Georgievskii D.V.* Stability of an unsteady shear of Bingham medium in the plane layer // Fluid Dyn., 2018, vol. 53, suppl. 2, pp. 55–63.

3. *Kozyrev O.R., Stepanyants Yu.A.* The integral relations method in the linearized theory of hydrodynamic stability // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Mekhanika Zhidkosti i Gaza. Moscow: VINITI, 1991, vol. 25, pp. 3–89. (in Russian)

4. *Georgievskii D.V.* The Selected Problems of Continuum Mechanics. Moscow: LENAND, 2018. (in Russian)

5. *Rektorys K.* Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Dordrecht; Boston: Reidel, 1980.

6. *Collatz L.* Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig: Academische Verlag, 1963.

7. *Georgievskii D.V.* The problems in terms of stresses of diffusion-vortex class in infinite rigid visco-plastic space // Mech. Sol., 2018, vol. 53, no. 5, pp. 520–526.