ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2020, том 84, № 1, с. 77–84

УДК 539.3

ПОВЕРХНОСТЬ РАЗРЫВА В АНИЗОТРОПНОЙ РЕДУЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ КОССЕРА. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ С РАЗРЫВАМИ

А. Е. Анисимов[1,*], Е. В. Зданчук[1,], В. В. Лалин[1,***]**

[1] *Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия*

** e-mail: alex.evg.anisimov@yandex.ru*

*** e-mail: zelizaveta@yandex.ru*

**** e-mail: vllalin@yandex.ru*

Поступила в редакцию 16.05.2019 г.
После доработки 31.10.2019 г.
Принята к публикации 23.11.2019 г.

В рамках континуальной модели гранулированного материала с независимыми векторами перемещений и поворота (линейная, анизотропная редуцированная среда Коссера) проанализированы поверхности сильного разрыва в материале. Показано, что сильные разрывы вектора поворота невозможны. Получены условия на поверхности разрыва для вектора перемещений, выявлено, что только два векторных условия являются существенными. Доказано, что решение динамической задачи в среде с сильными разрывами единственно.

Ключевые слова: редуцированная среда Коссера, поверхность сильного разрыва, модель сыпучего материала, кинематические и динамические условия, теорема единственности

DOI: 10.31857/S003282352001004X

С активным внедрением в современную технику новых конструкционных материалов интенсивно развиваются неклассические модели сплошных сред. Математическая модель редуцированной среды Коссера учитывает микроструктуру материала и предназначена для описания гранулированных, сыпучих материалов. Отличие данной модели от классической теории упругости состоит в том, что она учитывает размер частиц среды, микроструктуру материала, и вектор поворота является независимым от вектора перемещений. При этом, в отличии от классического континуума Коссера [1–4], в такой модели не возникает моментных напряжений. Впервые такая модель была предложена в 1984 году [5] для описания океанических отложений, которая затем детально изучалась [6–10].

Для построения математической модели материала недостаточно рассмотрения только гладких, т.е. непрерывных и нужное число раз дифференцируемых решений уравнений механики. Рано или поздно исследователям приходится сталкиваться с разрывами в свойствах среды, в первую очередь, с ударными волнами. Поэтому математические модели материала должны включать в себя разрывные решения дифференциальных уравнений. Разрывы изучались в классическом континууме Коссера [11, 12], но, как показывают исследования [8, 9], в редуцированной среде Коссера возникают эффекты, которых не наблюдается для классического континуума, например, запрещенные зоны распространения волн, поэтому не следует считать редуцированную среду Коссера упрощением классического континуума — для нее необходимо получать все уравнения отдельно. Изучены условия совместности решений на поверхности разрыва в нелинейной редуцированной среде Коссера [13]. В настоящей работе приводятся результаты анализа кинематических и динамических условий совместности на поверхности сильного разрыва в редуцированном континууме Коссера для линейно-упругой среды с произвольной анизотропией. Под сильным разрывом в работе понимается случай, в котором некоторые первые производные от искомых функций могут быть разрывны на конечном числе гладких поверхностей. Не уменьшая общности, будем рассматривать только одну такую поверхность.

В модели редуцированной среды Коссера тензор напряжений $\boldsymbol{\tau}$ несимметричен и может быть представлен как:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{T} \times \mathbf{I}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — симметричная часть тензора напряжений, $\mathbf{T}$ — вектор, соответствующий антисимметричной части тензора $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{I}$ — единичный тензор второго ранга, “$\times$” — знак векторного умножения. Уравнения, описывающие процессы в анизотропной линейной среде, можно представить в форме [14]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \nabla \times \mathbf{T} + \mathbf{q} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad -2\mathbf{T} = \mathbf{J} \cdot \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right), \quad \boldsymbol{\gamma} = 2\boldsymbol{\varphi} - \nabla \cdot \mathbf{u} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\gamma} \tag{4}$$

Здесь ρ — объемная плотность; $\mathbf{J}$ — объемная плотность тензора инерции; $\mathbf{u}$ — вектор перемещений; $\boldsymbol{\varphi}$ — вектор поворота; $\mathbf{q}$ — объемная силовая нагрузка; $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор линейных деформаций, $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор деформаций сдвига; $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ — тензоры упругих модулей четвертого и второго ранга соответственно; точкой обозначена частная производная по времени. В уравнениях (2)—(4) использованы стандартные обозначения прямого тензорного исчисления [15].

Пусть деформируемое тело занимает объем V, ограниченный поверхностью S. Движущаяся поверхность Γ, заданная уравнением

$$\psi(\mathbf{r}, t) = 0, \tag{5}$$

разделяет объем V на две части V^+ и V^-, так что в любой момент времени $V = V^+ \cup V^-$. В дальнейшем предполагаем, что функция ψ непрерывно дифференцируема в объеме V и что поверхность (5) не имеет особых точек, т.е. $(\nabla\psi)^2 \neq 0$ во всех точках Γ в любой момент времени t. В таком случае в точках поверхности Γ определен единичный вектор нормали $\mathbf{n} = \frac{1}{|\nabla\psi|}\nabla\psi$. Считаем, что V^+ — обозначение той части объема V, в которую направлен вектор $\mathbf{n}$. Как известно [16, 17], скорость c_n движения поверхности Γ в направлении нормали $\mathbf{n}$ определяется формулой $c_n = -\frac{\dot{\psi}}{|\nabla\psi|}$. В силу сделанных предположений о функции ψ, скорость c_n непрерывна в объеме V.

В дальнейшем будем считать, что инерционные и упругие характеристики редуцированной среды Коссера непрерывны в V. Квадратными скобками в формулах будет обозначен скачок функций на поверхности Γ: $[Z] \equiv Z^+ - Z^-$, где $Z(\mathbf{r}, t)$ — некоторая функция, имеющая конечные пределы при приближении к поверхности Γ по точкам объема V^+: Z^+ и по точкам объема V^-: Z^-. Тогда условия непрерывности при переходе через поверхность Γ для скорости c_n, инерционных и упругих характеристик могут быть записаны в виде:

$$[c_n] = 0, \quad [\rho] = 0, \quad [\mathbf{J}] = 0, \quad [\mathbf{C}] = 0, \quad [\mathbf{D}] = 0 \tag{6}$$

Будем называть поверхность Γ поверхностью разрыва, если [16, 17]: векторы $\mathbf{u}$, ϕ непрерывны при переходе через поверхность, а некоторые производные первого порядка этих векторов имеют разрыв на этой поверхности.

Разрывы в первых производных не могут быть произвольными. Они должны быть связаны некоторыми соотношениями, которые называются кинематическими и динамическими условиями совместности.

Кинематические условия совместности, связывающие производные первого порядка функции $\mathbf{u}$, есть условия, следующие из непрерывности самой функции $\mathbf{u}$, и имеют вид [16, 17]:

$$[\mathbf{n}\dot{\mathbf{u}} + c_n \nabla \mathbf{u}] = 0 \tag{7}$$

Аналогично, для первых производных вектора $\boldsymbol{\varphi}$:

$$[\mathbf{n}\dot{\boldsymbol{\varphi}} + c_n \nabla \boldsymbol{\varphi}] = 0 \tag{8}$$

Динамические условия совместности, есть следствия основных законов механики. Они были получены [13] для общей нелинейной постановки – физически и геометрически нелинейной редуцированной среды Коссера. Запишем эти соотношения в линеаризованном виде:

баланс массы:

$$[\rho c_n] = 0 \tag{9}$$

баланс импульса:

$$[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} + c_n \rho \dot{\mathbf{u}}] = 0 \tag{10}$$

баланс кинетического момента:

$$[c_n \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}] = 0 \tag{11}$$

баланс энергии:

$$[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}} + c_n (K + \Pi)] = 0, \tag{12}$$

где $K = \frac{1}{2}\rho\dot{\mathbf{u}}^2 + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}$ – объемная плотность кинетической энергии, $\Pi = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot\, \mathbf{C} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\gamma}$ – объемная плотность энергии деформации.

Рассмотрим некоторые следствия из условий совместности (7)–(12). Отметим, прежде всего, что выражение (9) есть тривиальное следствие из условий непрерывности (6) и не имеет самостоятельного значения. Также вследствие условий непрерывности (6) из выражения (11) следует, что $[\dot{\varphi}] = 0$, но тогда из кинематических условий совместности (8) получаем $[\nabla\boldsymbol{\varphi}] = 0$. Таким образом, из кинематических и динамических условий совместности вытекает, что все частные производные вектора $\boldsymbol{\varphi}$ непрерывны при переходе через поверхность разрыва. Другими словами доказан следующий факт: в линейной редуцированной среде Коссера непрерывность вектора поворота $\boldsymbol{\varphi}$ влечет непрерывность всех первых частных производных вектора $\boldsymbol{\varphi}$, т.е. разрывы вектора $\boldsymbol{\varphi}$ не возможны.

Докажем, что условие баланса энергии (12) также не имеет самостоятельного значения, а является следствием кинематических условий совместности (7) и динамических условий совместности (10), (11). Предварительно преобразуем условие (7), добавив непрерывное слагаемое $c_n\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{I}$, и введем для удобства обозначения $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$:

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{n}\dot{\mathbf{u}} + c_n(\nabla\mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{I}), \quad \mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau} + c_n\rho\dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{A}_2 \equiv c_n\mathbf{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\varphi}}.$$

Введенные величины непрерывны при переходе через поверхность Γ:

$$[\mathbf{A}] = 0, \quad [\mathbf{A}_1] = 0, \quad [\mathbf{A}_2] = 0 \tag{13}$$

Докажем равенство

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\cdot\cdot\,\mathbf{A} + \dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{A}_1 + \dot{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\mathbf{A}_2) = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\dot{\mathbf{u}} + c_n(K + \Pi) \tag{14}$$

Имеем

$$\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{A}_1 + \dot{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\mathbf{A}_2 = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\dot{\mathbf{u}} + c_n(\rho\dot{\mathbf{u}}^2 + \dot{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\mathbf{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\dot{\mathbf{u}} + 2c_nK \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\cdot\cdot\,\mathbf{A} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\dot{\mathbf{u}} + c_n\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\cdot\cdot\,(\nabla\mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{I}) \tag{16}$$

При вычислении последнего слагаемого в выражении (16), используем следствия определений (1) и первого уравнения (3), обращение в нуль свертки симметричного и кососимметричного тензоров, обращение в нуль свертки симметричного и кососимметричного тензоров, а также тождество $(\mathbf{a}\times\mathbf{I})\cdot\cdot\,(\mathbf{b}\times\mathbf{I}) = -2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, справедливое для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. В результате, получим $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\cdot\cdot\,(\nabla\mathbf{u} + \boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{I}) = 2\Pi$. Теперь выражение (16) принимает вид

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\cdot\cdot\,\mathbf{A} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\dot{\mathbf{u}} + 2c_n\Pi \tag{17}$$

Складывая формулы (15) и (17) и деля на 2, получаем равенство (14).

Докажем, что левая часть равенства (14) непрерывна при переходе через поверхность Γ. Из условий (13), а также доказанной непрерывности $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ следует, что

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\cdot\cdot\,\mathbf{A} + \dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{A}_1 + \dot{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\mathbf{A}_2)\right] = \frac{1}{2}((\mathbf{n}\cdot[\boldsymbol{\tau}] + c_n\rho[\dot{\mathbf{u}}])\cdot\dot{\mathbf{u}} + \\ + c_n([\boldsymbol{\sigma}]\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon} + [\mathbf{T}]\cdot\boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot[\dot{\mathbf{u}}])\end{aligned} \tag{18}$$

В правой части выражения (18) первое слагаемое – второе равенство в (13) – равно нулю. Для преобразования последнего слагаемого в (18) распишем, равное нулю, согласно (13), выражение

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\cdot\cdot\,[\mathbf{A}] = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot[\dot{\mathbf{u}}] + c_n(\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\,[\boldsymbol{\varepsilon}] + \mathbf{T}\cdot[\boldsymbol{\gamma}]) = 0$$

Из последней формулы выразим слагаемое $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot[\dot{\mathbf{u}}]$ и подставим в уравнение (18). Получим

$$\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\cdot\cdot\,\mathbf{A} + \dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{A}_1 + \dot{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\mathbf{A}_2)\right] = \frac{1}{2}c_n([\boldsymbol{\sigma}]\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon} + [\mathbf{T}]\cdot\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\,[\boldsymbol{\varepsilon}] - \mathbf{T}\cdot[\boldsymbol{\gamma}]) \tag{19}$$

В силу симметрии и непрерывности тензоров упругости $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ имеем

$$[\boldsymbol{\sigma}]\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{C}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}]\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\cdot\,\mathbf{C}]\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}]\cdot\cdot\,\mathbf{C}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}]\cdot\cdot\,\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\,[\boldsymbol{\varepsilon}]$$

$$[\mathbf{T}]\cdot\boldsymbol{\gamma} = [\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\gamma}]\cdot\boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{D}]\cdot\boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\gamma}]\cdot\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\gamma}]\cdot\mathbf{T} = \mathbf{T}\cdot[\boldsymbol{\gamma}],$$

откуда следует, что правая часть выражения (19) равна нулю.

Итак, доказано, что левая часть (а тем самым и правая) равенства (14) непрерывна при переходе через поверхность Γ, а, следовательно, условие баланса энергии (12) является следствием кинематических (7) и динамических (10), (11) условий совместности.

В итоге, получаем следующие существенные условия совместности на поверхности разрыва

$$[\mathbf{n}\dot{\mathbf{u}} + c_n\nabla\mathbf{u}] = 0, \quad [\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau} + c_n\rho\dot{\mathbf{u}}] = 0 \tag{20}$$

Далее докажем, что решение динамической задачи с разрывами единственно. Решением задачи в среде с разрывами будем называть функции $\mathbf{u}$, φ, которые

а) непрерывны в объеме $V = V^+ \cup V^-$;

б) в каждой подобласти V^+ и V^- дважды непрерывно дифференцируемы;

в) в каждой из подобластей V^+ и V^- удовлетворяют уравнениям движения, а также граничным $S_1 : \mathbf{u} = 0, \boldsymbol{\varphi} = 0$, $S_2 : \mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{T}\times\mathbf{I}) = \mathbf{g}$ и начальным $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x,y,z)$, $\dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{v}_0(x,y,z)$, $\boldsymbol{\varphi}_{t=0} = \boldsymbol{\varphi}_0(x,y,z)$, $\dot{\boldsymbol{\varphi}}|_{t=0} = \boldsymbol{\omega}_0(x,y,z)$ условиям линейной редуцированной среды Коссера [14].

Здесь $\mathbf{g}$ — заданная поверхностная нагрузка, $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{v}_0$, $\boldsymbol{\varphi}_0$, $\boldsymbol{\omega}_0$ — заданные начальные значения перемещений, поворотов и их скоростей.

г) первая производная функции $\mathbf{u}$ имеет конечные пределы при стремлении к поверхности Γ, разделяющей области V^+ и V^-, изнутри соответствующих областей;

д) первая производная функций $\mathbf{u}$ на поверхности Γ удовлетворяет кинематическим и динамическим условиям совместности (20);

е) функция $\boldsymbol{\varphi}$ непрерывна вместе со своими первыми производными в объеме V.

Докажем, что если решение с разрывами существует, то оно единственно.

Допустим, что существуют два решения: $\mathbf{u}_1$, $\boldsymbol{\varphi}_1$ и $\mathbf{u}_2$, $\boldsymbol{\varphi}_2$. Обозначим их разности $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{\varphi}_1 - \boldsymbol{\varphi}_2$. Векторы $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varphi}$ удовлетворяют однородным уравнениям движения, однородным граничным и начальным условиям. Кинематические и динамические условия совместности линейны по функциям $\mathbf{u}_i$ и поэтому для разности $\mathbf{u}$ остаются справедливыми. Докажем, что в любой момент времени $\mathbf{u} \equiv 0$, $\boldsymbol{\varphi} \equiv 0$ в области V.

Из уравнения баланса энергии для каждого решения следует формула [13]

$$\frac{\partial}{\partial t}(K_i + \Pi_i) = \mathbf{q}\cdot\dot{\mathbf{u}}_i + \nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}_i\cdot\dot{\mathbf{u}}_i) \tag{21}$$

Из уравнений (2)–(4) и симметрии тензоров $\mathbf{D}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{J}$ несложно доказать, что для разности решений справедлива следующая формула

$$\frac{\partial}{\partial t}(K + \Pi) = \nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\dot{\mathbf{u}}), \tag{22}$$

где $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2$.

Далее воспользуемся теоремой переноса [18]. Пусть $\eta(\mathbf{r},t)$ — некоторая функция, определенная в точках сплошной среды, движущихся по закону $\mathbf{r}(\mathbf{R},t)$, где $\mathbf{R}$ — отсчетные координаты. Пусть функция η непрерывно дифференцируема в объеме V, кроме точек поверхности Γ, и имеет конечные пределы η^+ и η^- при стремлении к поверхности Γ по точкам V^+ и V^-, соответственно. Тогда

$$\frac{d}{dt}\int_V \eta dV = \int_V \dot{\eta} dV - \int_\Gamma [\eta] c_n d\Gamma \tag{23}$$

Положим $\eta = K + \Pi$, тогда $W = \int_V (K + \Pi) dV$ — полная энергия для разности решений. Теперь формула (23) примет следующий вид

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(K + \Pi)\, dV - \int_\Gamma [K + \Pi] c_n d\Gamma$$

Воспользовавшись равенством (22), перепишем последнюю формулу в виде:

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}})\, dV - \int_\Gamma [K + \Pi] c_n d\Gamma \tag{24}$$

Используем формулу Остроградского–Гаусса для функций, имеющих разрыв на поверхности Γ, находящейся внутри объема V [19]:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dS - \int_\Gamma \mathbf{n} \cdot [\mathbf{a}] d\Gamma \tag{25}$$

Положим в равенстве (25) $\mathbf{a} = \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}}$ и подставим результат в выражение (24), тогда (24) примет вид:

$$\frac{dW}{dt} = \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS - \int_\Gamma (\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}}] + [K + \Pi] c_n) d\Gamma \tag{26}$$

Разность решений удовлетворяет однородным граничным условиям. Тогда на S_2: $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$, на S_1: $\mathbf{u} = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{u}} = 0$ и интеграл по $S = S_1 \cup S_2$ в (26) равен нулю. Следовательно,

$$\frac{dW}{dt} = -\int_\Gamma [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}} + (K + \Pi) c_n] d\Gamma \tag{27}$$

Так как разность решений $\mathbf{u}$ удовлетворяет на поверхности Γ кинематическим и динамическим условиям совместности (20), то, по доказанному ранее (12), подынтегральное выражение в правой части формулы (27) равно нулю, откуда $\frac{dW}{dt} = 0 \Rightarrow W = \mathrm{const}(t)$. Поскольку разности решений удовлетворяют однородным начальным условиям, то $W(t) \equiv 0$.

Рассмотрим выражение для энергии разности решений

$$W = \int_V \left(\frac{1}{2}\rho \dot{\mathbf{u}}^2 + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot\cdot \mathbf{C} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\gamma})\right) dV$$

Поскольку ρ больше нуля, а $\mathbf{J}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ – положительно определенные тензоры, то энергия W может быть равна нулю только в случае, если $\dot{\mathbf{u}} = 0$, $\dot{\boldsymbol{\varphi}} = 0$, $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$, $\boldsymbol{\gamma} = 0$. Откуда, с учетом нулевых начальных условий, получаем, что $\mathbf{u} \equiv 0$, $\boldsymbol{\varphi} \equiv 0$ [17]. Что и требовалось доказать.

Итак, в работе приведены кинематические и динамические условия совместности на поверхности разрыва в линейной анизотропной редуцированной среде Коссера. Доказано, что разрывы вектора поворота в среде не возможны. С помощью условий на поверхности разрыва доказано, что начально-краевая задача с разрывами имеет единственное решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н.* Построение аналитического решения волны Лэмба в рамках континуума Коссера // ПМТФ. 2007. Т. 48. № 1 (281). С. 143–150.
2. *Варыгина М.П., Садовская О.В., Садовский В.М.* О резонансных свойствах моментного континуума Коссера // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 3 (301). С. 126–136.
3. *Суворов Е.М., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Плоская задача об ударе твердого тела по полупространству, моделируемому средой Коссера // ПММ. 2012. Т. 76. № 5. С. 850–859.
4. *Зданчук Е.В., Куроедов В.В., Лалин В.В.* Вариационная постановка динамических задач для нелинейной среды Коссера // ПММ. 2017. Т. 81. № 1. С. 97–102.
5. *Schwartz L.M., Johnson D.L., Feng S.* Vibrational Modes in Granular Materials // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. № 10. P. 831–834.

6. *Grekova E.F., Herman G.C.* Wave propagation in rock modelled as reduced Cosserat continuum with weak anisotropy // 67th Europ. Assoc. Geosci. Engin., EAGE Conference and Exhibition, incorporating SPE Europe 2005., Feria de Madrid, June 13–16, 2005. Extended Abstracts. P. 2643–2646.
7. *Harris D.* Double-slip and Spin: A generalisation of the plastic potential model in the mechanics of granular materials // Int. J. Engng. Sci. 2009. V. 47. I. 11–12. P. 208–1215.
8. *Кулеш М.А., Грекова Е.Ф., Шардаков И.Н.* Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера // Акуст. ж. 2009. Т. 55. № 2. С. 216–225.
9. *Grekova E.F., Kulesh M.A., Herman G.C.* Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: isotropic reduced Cosserat model // Bull. Seismol. Soc. Amer. 2009. V. 99. № 2B. P. 1423–1428.
10. *Грекова Е.Ф.* Линейная редуцированная среда Коссера с шаровым тензором инерции, вращения в которой не наблюдаются в экспериментах // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 5. С. 58–64.
11. *Еремеев В.А.* Об условиях распространения волн ускорения в термоупругой микрополярной среде // Вестн. южного научн. центра РАН. 2007. Т. 3. № 4. С. 10–13.
12. *Altenbach H., Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Rendon L.A.* Acceleration waves and ellipticity in thermoelastic micropolar media // Arch. Appl Mechanics. 2010. V. 80 (3). P. 217–227.
13. *Lalin V.V., Zdanchuk E.V.* Conditions on the surface of discontinuity for the reduced Cosserat continuum // Mater. Phys. Mech. 2017. V. 31. №. 1–2. P. 28–31.
14. *Lalin V.V., Zdanchuk E.V.* The initial boundary-value problem for a mathematical model for granular medium // Appl. Mech. Mater. 2015. V. 725–726. P. 863–868.
15. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
16. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980.
17. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986.
18. *Casey J.* On the derivation of jump conditions in continuum mechanics // Intern. J. Struct. Changes in Solids. V. 3. P. 61–84.
19. *Слеттери Дж.С.* Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах. М.: Энергия, 1978.

Surface of Discontinuity for the Anysotropic Reduced Cosserat Continuum. Uniqueness of Solution for Dynamic Issue with Discontinuity

A. E. Anisimov[a,#], E. V. Zdanchuk[a,##], and V. V. Lalin[a,###]

[a] *Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russia*
[#] *e-mail: alex.evg.anisimov@yandex.ru*
[##] *e-mail: zelizaveta@yandex.ru*
[###] *e-mail: vllalin@yandex.ru*

In this work an isolated surface that moves relative to the micropolar media and across which the first derivatives of variables are discontinuous is considered. The reduced Cosserat continuum is an elastic medium, where all translations and rotations are independent. Moreover, a force stress tensor is asymmetric and a couple stress tensor is equal to zero. In paper continuity conditions were established and it is shown that first derivative of the rotation vector cannot have discontinuities. It is shown that the solution for this case is unique.

Keywords: micropolar continuum, discontinuity, granular materials, uniqueness theorem, reduced Cosserat continuum, continuity conditions

REFERENCES

1. *Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N.* // Acoust. Phys., 2006, vol. 52, no. 2, pp. 186–193.
2. *Varygina M.P., Sadovskaya O.V., Sadovskii V.M.* Resonant properties of moment Cosserat continuum // J. Appl. Mech. Techn. Phys., 2010, vol. 51, no. 3, pp. 405–413.
3. *Suvorov Y.M., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V.* The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium // JAMM, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 511–518.

4. *Zdanchuk E.V., Kuroyedov V.V., Lalin V.V.* Variational formulation of dynamic problems for a nonlinear Cosserat medium // JAMM, 2017, vol. 81, no. 1, pp. 66–70.
5. *Schwartz L.M., Johnson D.L., Feng S.* Vibrational modes in granular materials // Phys. Rev. Lett., 1984, vol. 52, no. 10, pp. 831–834.
6. *Grekova E.F., Herman G.C.* Wave propagation in rock modelled as reduced Cosserat continuum with weak anisotropy // 67th Europ. Assoc. Geosci. Engin., EAGE Conference and Exhibition, incorporating SPE Europe 2005., Feria de Madrid, June 13–16, 2005. Extended Abstracts. pp. 2643–2646.
7. *Harris D.* Double-slip and spin: A generalisation of the plastic potential model in the mechanics of granular materials // Int. J. Eng. Science, 2009, vol. 47. I. 11–12, pp. 208–1215.
8. *Kulesh M.A., Grekova E.F., Shardakov I.N.* The problem of surface wave propagation in a reduced Cosserat medium // Acoust. Phys., 2009, vol. 55, no. 2, pp. 218–226.
9. *Grekova E.F., Kulesh M.A., Herman G.C.* Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: isotropic reduced Cosserat model // Bull. Seismol. Soc. Amer., 2009, vol. 99, no. 2B, pp. 1423–1428.
10. *Grekova E.F.* Linear reduced Cosserat medium with spherical tensor of inertia, where rotations are not observed in experiment // Mech. Solids, 2012, vol. 47, no. 5, pp. 538–543.
11. *Maugin G.A.* Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // Intern. J. Engng. Sci., 1974, vol. 12, no. 2, pp. 143–157.
12. *Altenbach H., Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Rendon L.A.* Acceleration waves and ellipticity in thermoelastic micropolar media // Arch. Appl. Mech., 2010, vol. 80, no. 3, pp. 217–227.
13. *Lalin V.V., Zdanchuk E.V.* Conditions on the surface of discontinuity for the reduced Cosserat continuum // Mater. Phys. Mech., 2017, vol. 31, no. 1–2, pp. 28–31.
14. *Lalin V.V., Zdanchuk E.V.* The initial boundary-value problem for a mathematical model for granular medium // Appl. Mech. Mater., 2015, vol. 725–726, pp. 863–868.
15. *Lurie A.I.* Theory of Elasticity Berlin: Springer, 2005. 1050 p.
16. *Petrashen G.I.* Propagation of Waves in Anysitropic Elastic Media (Rasprostranenie voln v anizotropnyh uprugih sredah) Leningrad: Nauka, 1980. (in Russian)
17. *Poruchikov V.B.* Methods of the Classical Theory of Elastodynamics. Berlin: Springer, 1993. 319 p.
18. *Casey J.* On the derivation of jump conditions in continuum mechanics // Intern. J. Struct. Changes in Solids, 2011, vol. 3, pp. 61–84.
19. *Slattery J.C., Sagis L., Oh E.* Interfacial Transport Phenomena. Boston: Springer US, 2007. 828 p.