ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2019, том 83, № 5–6, с. 823–833

УДК 539.3

МЕТОД СЕН-ВЕНАНА–ПИКАРА–БАНАХА ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ

© 2019 г. Е. М. Зверяев[1,*]

[1] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*
**e-mail: zveriaev@mail.ru*

Поступила в редакцию 12.06.2019 г.
После доработки 09.08.2019 г.
Принята к публикации 16.09.2019 г.

Дано систематическое изложение модифицированного полуобратного метода Сен-Венана на примере построения решения дифференциальных уравнений теории упругости с малым параметром для длинной полосы. Метод трактуется как итерационный. Сходимость решения обеспечивается с помощью малого параметра тонкостенности в соответствии с принципом сжатых отображений Банаха. Последовательное вычисление неизвестных происходит с помощью известных в литературе операторов Пикара так, что вычисленные в одном уравнении неизвестные являются входящими для следующего уравнения и т.д. Выполнение граничных условий на длинных краях приводит к уравнениям для медленно и быстро меняющихся сингулярных компонент решения. Решения сингулярно возмущенных уравнений, удовлетворяя потерянным в классической теории условиям, описывают концентрацию напряжений в углах полосы.

Ключевые слова: полуобратный метод Сен-Венана, принцип сжатых отображений, концентрация напряжений в углах

DOI: 10.1134/S0032823519050126

1. Введение. Дифференциальные уравнения механики обладают решениями, в которых могут наблюдаться разрывы, быстрые переходы, неоднородности и т.п., возникающие вследствие приближенного описания. Понижение порядка дифференциального уравнения в сочетании с потерей граничного условия является характерной чертой таких асимптотических явлений [1, 2]. Цель асимптотического анализа задачи заключается в описании решения граничной задачи внутри переходного слоя. Потребность в таких уточненных теориях связана с необходимостью более полного понимания самой классической теории после того, как становятся видны ее обобщения. Уточненные теории позволяют лучше охарактеризовать погрешность классических теорий. Построение теорий последовательных приближений в смысле учета всех малых одного порядка крайне трудно осуществить, не располагая регулярными методами [3].

Считается, что возникающие при построении теории пластин и оболочек противоречия отсутствуют в задаче построения теории изгиба стержня. В основе такого представления лежит различие в методах построения определяющих уравнений. Если построение теорий пластин и оболочек осуществлялось на основе математической теории упругости, то построение теории балок выполнено на основе физических и геометрических соображений в усилиях и моментах без использования уравнений теории упругости. Однако, если эти теории тонкостенных тел, балок, пластин и оболочек строить на одной математической основе с помощью метода простых итераций, удовлетворяющего принципу сжатых отображений, и не переходить от уравнений в напряжениях к уравнениям в усилиях и моментах, различие исчезает [4].

Истоки метода простых итераций в теории упругости лежат в полуобратном методе Сен-Венана [1]. Если в методе Сен-Венана использовать обычно принятые допущения в качестве величин начального приближения, по которым вычисляются остальные искомые неизвестные, можно по полученным величинам вычислить поправку к величинам начального приближения, и по тому, является ли эта поправка существенной или малой, сделать вывод о применимости исходных допущений. Малость поправки говорит о том, что начальные величины выбраны удачно, и данные вычисления могут быть рассмотрены как нулевое приближение некоторого итерационного процесса. Построенный таким образом итерационный процесс нуждается в обосновании своей сходимости. Поскольку Сен-Венан применил свою идею к решению задачи кручения и изгиба длинного и узкого стержня, можно оценить сходимость вычислений к некоторому решению, используя наличие малого параметра, обеспечивающего асимптотическую сходимость. Таким образом, приходим к методу простых итераций, принципу сжатых отображений и теореме Банаха о неподвижной точке.

Вопросы, связанные с существованием и единственностью решений уравнений формулируются в функциональном анализе в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки наиболее общим является принцип сжатых отображений [5].

Отображение $y = Ay$ метрического пространства M в себя называется сжимающим отображением, если существует такое число $\varepsilon < 1$, что для любых двух точек $x, y \in M$ выполняется неравенство $\rho(Ax, Ay) \le \varepsilon\rho(x, y)$, где ρ – метрика пространства M. Точка y называется неподвижной точкой отображения, если $y = Ay$. Иначе говоря, неподвижные точки – это решения уравнения $y = Ay$. Итерационный процесс начинается, исходя из некоторого начального приближения $y_{(0)}$. Если оператор A является сжимающим, процедура сходится к некоторому решению y, независимо от выбора величины начального приближения. Последовательные приближения $y_{(1)}$, $y_{(2)}$, $y_{(3)}$ ... находятся с помощью формулы $y_{(n+1)} = Ay_{(n)}$.

Используемый в настоящей работе метод простых итераций сводится к последовательному применению метода Пикара для решения дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$, разрешенного относительно производной [6]. Это дифференциальное уравнение с условием $y(t_0) = y_0$ равносильно интегральному уравнению

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f\left[t, (y(t))\right] dt + y_0 \tag{1.1}$$

Для него на основании принципа сжатых отображений строится итерационный процесс по следующей схеме

$$y_{(n+1)}(x) = \int_{x_0}^{x} f\left[t, \left(y_{(n)}(t)\right)\right] dt + y_0$$

Метод позволяет построить последовательность функций $y_{(n)}(t)$, сходящихся к решению уравнения, и эти функции получаются гладкими.

Хотя полуобратный метод применялся к линейным и нелинейным задачам для сред с усложненными характеристиками [7–11], его рассмотрение, как итерационного и связанного с оператором Пикара и принципом сжатых отображений, в литературе отсутствует.

Ниже метод простых итераций, с помощью которого решен ряд задач теории упругости тонкостенных тел [4, 12–15], описывается как общий метод Сен-Венана–Пикара–Банаха на примере наиболее простой задачи для прямоугольника – деформации длинной тонкой упругой полосы, уравнения которой содержат малый параметр, обеспечивающий асимптотическую сходимость метода в соответствии с принципом сжатых отображений.

2. Произвольно нагруженная по длинным сторонам полоса. Длинная прямоугольная полоса рассматривается в прямоугольной системе координат x^*, z^*, так что $0 \le x^* \le l$, $-h \le z^* \le h$. Длинные стороны полосы $z^* = \pm h$ несут произвольную нагрузку, короткие стороны полосы могут быть закреплены или нагружены. Известные уравнения плоской задачи теории упругости, описывающие напряженно-деформированное состояние такой полосы в безразмерных координатах $x = x^*/l$, $z = z^*/h$, перемещениях $u = u^*/h$, $w = w^*/h$ вдоль осей x^*, z^*, соответственно, и нормальных $\sigma_x = \sigma_x^*/E$, $\sigma_z = \sigma_z^*/E$ и касательных $\tau = \tau^*/E$ напряжениях (размерные перемещения и напряжения отмечены звездочкой) принимают вид

$$\sigma_{z,z} + \varepsilon\tau' = 0, \quad \tau_{,z} + \varepsilon\sigma_x' = 0$$

$$\sigma_x = \frac{1}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_z), \quad \tau = \frac{1}{2(1+\nu)}\gamma, \quad \sigma_z = \frac{1}{1-\nu^2}(\varepsilon_z + \nu\varepsilon_x) \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_z = w_{,z}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon u', \quad \gamma = u_{,z} + \varepsilon w'$$

Здесь E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, ε_z, ε_z – безразмерные продольная и поперечная деформации, γ – сдвиг. Штрихом обозначена операция дифференцирования по безразмерному аргументу x, и введено обозначение для малого параметра $\varepsilon = h/l$.

Расположив уравнения системы (2.1) в определенной последовательности и задав в качестве известных величин некоторые w и γ, можно свести вычисления к методу последовательных приближений в соответствии со следующей схемой

$$u_{(n),z} = -\varepsilon w_{(n)}' + \gamma_{(n)}, \quad \tau_{(n)} = \gamma_{(n)}/2(1+\nu), \quad \sigma_{z(n),z} = -\varepsilon\tau_{(n)}'$$

$$\varepsilon_{z(n+1)} = (1-\nu^2)\sigma_{z(n)} - \nu\varepsilon_{x(n)}, \quad \varepsilon_{x(n)} = \varepsilon u_{(n)}', \quad \sigma_{x(n)} = \varepsilon_{x(n)} + \nu\sigma_{z(n)}$$

Здесь и далее нижним индексом в скобках обозначен номер приближения. Затем уточняются начальные приближения ε_z и γ при переходе к следующей итерации

$$w_{(n),z} = \varepsilon_{z(n)}, \quad \tau_{(n+1),z} = -\varepsilon\sigma_{x(n)}', \quad \gamma_{(n+1)} = \tau_{(n+1)}/2(1+\nu)$$

Далее будут рассматриваться уравнения нулевого и первого приближений при выборе величин начального приближения $w_{(0)} = w_0(x)$ и $\gamma_{(0)} = \gamma_0(x)$. Такой выбор величин начального приближения имеет ясный геометрический и механический смысл, т.к. выведенные в нулевом приближении соотношения согласуются с известными в теории пластин и оболочек гипотезами Кирхгоффа и уточнениями Тимошенко–Рейсснера.

В силу независимости величин начального приближения от z, все неизвестные вычисляются в результате интегрирования по z

$$w_{(0)} = w_0(x), \quad \gamma_{(0)} = \gamma_0(x), \quad u_{(0)} = -\varepsilon\int w_0' dz + \int\gamma_0 dz + u_0(x)$$

$$\tau_0 = \gamma_0/2(1+\nu), \quad \sigma_{z(0)} = -\varepsilon\int\tau_0' dz + \sigma_{z0}(x), \quad \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u_{(0)}'$$

$$\sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + \nu\sigma_{z(0)}, \quad \tau_{(1)} = -\varepsilon\int\sigma'_{x(0)}dz + \tau_0(x), \quad \gamma_{(1)} = 2(1+\nu)\tau_{(1)}$$

$$\varepsilon_{z(0)} = (1-\nu^2)\sigma_{z(0)} - \nu\varepsilon_{x(0)}, \quad w_{(1)} = \int\varepsilon_{z(0)}dz + w_0(x)$$

Нижним индексом 0 без скобок обозначены произвольные функции интегрирования, зависящие только от одного аргумента x. Заданные величины начального приближения w и γ вычисляются также в первом приближении, чтобы вычислить величину поправки.

Теперь можно записать выражения для всех неизвестных задачи

$$\begin{gathered}
w = w_0 + [(1-\nu^2)\sigma_{z0} - \varepsilon\nu u_0']z + [\varepsilon^2\nu w_0'' - \varepsilon(1+\nu)^2\tau_0']\frac{z^2}{2} \\
u = u_0 + [-\varepsilon w_0' + 2(1+\nu)\tau_0]z \\
\varepsilon_x = \varepsilon u_0' - \varepsilon^2 w_0'' z + \varepsilon(2+\nu)\tau_0' z \\
\sigma_x = \varepsilon u_0' + \nu\sigma_{z0} + [-\varepsilon^2 w_0'' + (2+\nu)\varepsilon\tau_0']z \\
\varepsilon_z = (1-\nu^2)\sigma_{z0} - \varepsilon\nu u_0' + [\varepsilon^2\nu w_0'' - \varepsilon(1+\nu)^2\tau_0']z \\
\tau = \tau_0 - (\varepsilon^2 u_0'' + \varepsilon\nu\sigma_{z0}')z + [\varepsilon^3 w_0''' - (2+\nu)\varepsilon^2\tau_0'']\frac{z^2}{2}
\end{gathered} \tag{2.2}$$

в виде полиномов по степеням z. Величины τ, σ_z, w записаны в первом приближении, остальные – в нулевом. При этом все неизвестные выражены в зависимости от произвольных функций интегрирования $\tau_0(x)$, $\sigma_{z0}(x)$, $w_0(x)$, $u_0(x)$, относительные порядки которых по ε будут определены из граничных условий на длинных сторонах и концах полосы.

3. Граничные условия на длинных сторонах полосы. На лицевых поверхностях полосы $z^* = \pm h$ должны удовлетворяться граничные условия, соответствующие условиям нагружения. В безразмерном виде эти условия записываются как

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= Z_+(x), \quad \tau = X_+(x) \quad \text{при} \quad z = 1 \\
\sigma_z &= Z_-(x), \quad \tau = X_-(x) \quad \text{при} \quad z = -1,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где безразмерные нагрузки получены путем деления размерных на жесткость E. Будем считать нагрузки медленно изменяющимися функциями координаты x. Пусть условия (3.1) удовлетворяются величинами первого приближения из соотношений (2.2), в предположении, что они с достаточной точностью аппроксимируют искомые величины. В результате получим уравнения относительно неизвестных w_0, τ_0, определяющих задачу изгиба

$$\begin{gathered}
\varepsilon^3 w_0''' - (2+\nu)\varepsilon^2\tau_0'' + 2\tau_0 = X_+ + X_- \\
-\varepsilon^4 w_0'''' + (2+\nu)\varepsilon^3\tau_0''' - 6\varepsilon\tau_0' = 3(Z_+ - Z_-)
\end{gathered} \tag{3.2}$$

и относительно u_0, σ_{z0}, определяющих задачу растяжения–сжатия

$$-\varepsilon^2 u_0'' - \varepsilon\nu\sigma_{z0}' = (X_+ - X_-)/2 \tag{3.3}$$

Замечание 1. Продифференцируем первое уравнение (3.2) по x, умножим на ε, сложим со вторым и проинтегрируем. В результате получим соотношение

$$\varepsilon\tau_0(x) = -\int\left[\frac{3}{4}(Z_+ - Z_-) + \varepsilon\frac{1}{4}(X_+' + X_-')\right]dx + C$$

Частное решение этого уравнения имеет малую изменяемость, общее – постоянная C. Подстановка этой величины в уравнения (3.2), вообще говоря, неправомерна, поскольку в нем присутствует только медленно изменяющая часть величины τ_0 и отсутствует быстроменяющаяся, т.к. при сложении произошла потеря старших производных.

Пусть частные решения $w_0^{(p)}$, $\tau_0^{(p)}$ системы (3.2) найдены. Представим решения однородных уравнений w_0, τ_0 в виде сумм

$$w_0 = w_0^s(x) + w_0^q(x/\varepsilon), \quad \tau_0 = \tau_0^s(x) + \tau_0^q(x/\varepsilon), \tag{3.4}$$

обозначив верхним индексом s медленно меняющуюся часть решения, а индексом q – быстро меняющуюся. Под медленно меняющейся функцией понимается такая, которая при дифференцировании по аргументу x не меняет своего асимптотического порядка по ε, тогда как быстро меняющаяся при дифференцировании по x увеличивается в ε^{-1} раз, т.е.

$$w_0^{s\prime} \sim \varepsilon^0 w_0^s(x), \quad \tau_0^{s\prime} \sim \varepsilon^0 \tau_0^s(x), \quad \tau_0^{q\prime} \sim \varepsilon^{-1}\tau_0^q(x/\varepsilon) \tag{3.5}$$

В первом уравнении системы (3.2) член $(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0^{s\prime\prime}$ имеет порядок ε^2 по сравнению с третьим и может быть отброшен. То же самое справедливо относительно второго уравнения. Соответственно, однородные уравнения системы (3.2) в медленно меняющихся неизвестных записываются как

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0^{s\prime\prime\prime} + 2\tau_0^s &= 0 \\ -\varepsilon^4 w_0^{s\prime\prime\prime\prime} - 6\varepsilon\tau_0^{s\prime} &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Исключив $\tau_0^{s\prime}$ из второго уравнения с помощью первого, получим классическое (однородное) уравнение изгиба балки

$$\frac{2}{3}\varepsilon^4 w_0^{s\prime\prime\prime\prime} = 0 \tag{3.7}$$

Таким образом, можно считать доказанным, что решение w_0^s имеет нулевую (малую) и только нулевую изменяемость, при которой асимптотический порядок дифференцируемых функций меняется в ε^0 раз. В соответствии с этим верхний индекс s у w_0^s можно отбросить.

Вычитая из уравнений (3.2) попарно уравнения (3.6), с учетом предположений (3.5), получим сингулярно возмущенные уравнения

$$-(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0^{q\prime\prime} + 2\tau_0^q = 0 \tag{3.8}$$

$$(2+\nu)\varepsilon^3\tau_0^{q\prime\prime\prime} - 6\varepsilon\tau_0^{q\prime} = 0 \tag{3.9}$$

решения которых зависят от аргумента x/ε. Их решения можно использовать для удовлетворения потерянных граничных условий и сглаживания разрывов в медленно меняющихся решениях [2].

Замечание 2. Продифференцируем уравнение (3.8) по x, умножим на ε и сложим с уравнением (3.9). Получим соотношение $4\varepsilon\tau_0^{q\prime} = 0$, которое показывает, что уравнения (3.8) и (3.9) отличаются на постоянную величину $4\varepsilon\tau_0^q = C_0$, и, поскольку она учтена в решении для w_0, то в уравнении (3.9) может быть отброшена. Вычитая уравнение $4\varepsilon\tau_0^{q'} = 0$ из (3.9) и интегрируя, получим два совпадающих уравнения вида

$$-\varepsilon^2\tau_0^{q''} + k^2\tau_0^q = 0, \quad k^2 = 2/(2+\nu) \tag{3.10}$$

Уравнение (3.10) имеет решение

$$\tau_0^q = \begin{cases} C_1 \exp\left(-k\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \\ C_2 \exp\left(-k\dfrac{(1-x)}{\varepsilon}\right) \end{cases},$$

где верхнее решение справедливо при $x \geq 0$, а нижнее при $x \leq 1$. Если принять $C_1 = -\dfrac{k}{2\varepsilon}$, можно показать, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{k}{\varepsilon}\exp\left(-k\dfrac{x}{\varepsilon}\right) = \delta(x)$. То есть, уравнение (3.8) позволяет установить связь между обычной числовой функцией τ_0^q и обобщенной δ-функцией Дирака.

4. Граничные условия на коротких сторонах полосы. В инженерной практике существует зависящее от вида конструкции многообразие способов закрепления концов балок. В сопротивлении материалов и строительной механике чаще встречаются жесткое защемление, свободное опирание, свободный конец. В рассматриваемой здесь уточненной теории, вследствие появления нетрадиционных неизвестных w_0, u_0, σ_{z0}, τ_0, необходимо для них сформулировать условия на коротких сторонах.

Пример 1. Рассмотрим полосу, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой $Z_+ = p$, $X_+ = X_- = Z_- = 0$, $p = \mathrm{const}$. Пусть на концах полосы $x = 0$ и $x = 1$ выполняются для перемещений равенства $w = u = 0$, что соответствует в классической теории случаю жесткого защемления.

Разрешающие уравнения (3.2), (3.3) для нахождения частных решений имеют вид

$$\varepsilon^3 w_0^{(p)'''} - (2+\nu)\varepsilon^2\tau_0^{(p)''} + 2\tau_0^{(p)} = 0$$

$$-\varepsilon^4 w_0^{(p)''''} + (2+\nu)\varepsilon^3\tau_0^{(p)'''} - 6\varepsilon\tau_0^{(p)'} = 3p$$

$$\varepsilon^2 u_0^{(p)''} + \varepsilon\nu\sigma_{z0}^{(p)'} = 0$$

$$\varepsilon^3 u_0^{(p)'''} + \varepsilon^2\nu\sigma_{z0}^{(p)''} + 2\sigma_{z0}^{(p)} = p$$

и сводятся к простым соотношениям

$$\frac{2}{3}\varepsilon^4 w_0^{(p)''''} = p, \quad 2\sigma_{z0}^{(p)} = p, \quad u_0^{(p)''} = 0 \tag{4.1}$$

Разрешающие уравнения для нахождения общих решений, отмеченных индексом (g), выглядят следующим образом

$$w_0^{s(g)''''} = 0, \quad \sigma_{z0}^{s(g)} = 0, \quad \varepsilon^2 u_0^{s(g)''} = 0 \tag{4.2}$$

Из уравнений (3.2), (3.3) с учетом (3.5) следуют оценки

$$(w_0^{(p)}, w_0^{(g)}) \sim \varepsilon^{-4}p, \quad (\tau_0^{s(p)}, \tau_0^{s(g)}) \sim \varepsilon^3 w_0^{(p)}, \tag{4.3}$$

при получении которых предполагалось, что частное и общее решения имеют одинаковый асимптотический порядок.

Условия отсутствия перемещений на концах $x = 0$ и $x = 1$ на основании первых двух выражений (2.2) имеют вид

$$[-\varepsilon w_0' + 2(1+\nu)\tau_0]z + u_0 = 0$$

$$[\varepsilon^2\nu w_0'' - (1+\nu)^2\varepsilon\tau_0']\frac{z^2}{2} + [(1-\nu^2)\sigma_{z0} - \varepsilon\nu u_{00}']z + w_0 = 0$$

В этих соотношениях коэффициенты при каждой степени z должны обращаться в ноль

$$u_0 = 0, \quad (1-\nu^2)\sigma_{z0} - \varepsilon\nu u_0' = 0 \tag{4.4}$$

$$w_0 = 0 \tag{4.5}$$

$$-\varepsilon w_0' + 2(1+\nu)\tau_0 = 0 \tag{4.6}$$

$$\varepsilon^2\nu w_0'' - (1+\nu)^2\varepsilon\tau_0' = 0 \tag{4.7}$$

Первые два условия и уравнения из (4.1), (4.2) для u_0 и σ_{z0} сводятся к решению $u_0 \equiv 0$, и, с учетом этого, второе условие из (4.4) – к $\sigma_{z0} = p/2$. Последнее условие можно понимать как требование обращения нагрузки в крайних точках $x = 0$ и $x = 1$ в ноль. Этого можно добиться с помощью уравнения (3.9). При этом быстро меняющаяся компонента $\tau_0 \sim p$ будет в ε^{-1} раз меньше, чем $\tau_0^{s(p)}$, $\tau_0^{s(g)}$, поэтому ее вклад в соотношениях (2.2) пренебрежимо мал, что находится в соответствии с классическими представлениями о допущении разрывов во внешней нагрузке.

В условии (4.6), в силу оценок (4.3), второй член на два порядка меньше первого и может быть отброшен. Получаем условие $w_0' = 0$, совпадающее с классическим, требующим отсутствия угла поворота оси балки в защемлении. Теперь первое уравнение из (4.1) и (4.2) имеет вместе с (4.5) достаточно условий на концах и его решение можно записать в виде

$$w_0 = \varepsilon^{-4}\frac{p}{16}x^2(x-1)^2 \tag{4.8}$$

Отброшенный член соответствует влиянию сдвига на прогиб балки, и его отбрасывание не приводит к потере граничного условия.

Причина появления условия (4.7) объясняется следующим образом. За счет продольного напряжения и коэффициента Пуассона поперечный размер полосы изменился на величину $\varepsilon^2\nu w_0''$. Это перемещение должно быть устранено с помощью быстро меняющегося решения уравнения (3.10):

$$\tau_0 = \begin{cases} C_1\exp(-kx/\varepsilon) \\ C_2\exp(k(1-x)/\varepsilon) \end{cases}; \quad k^2 = 2/(2+\nu) \tag{4.9}$$

Первое решение пригодно для использования на конце $x = 0$, второе – на конце $x = 1$.

Рассмотрим конец $x = 0$. Определенная из условия (4.7) постоянная будет иметь вид

$$C_1 = -\varepsilon^{-2}\frac{\nu p}{8(1+\nu)^2}\sqrt{\frac{2+\nu}{2}}$$

С учетом вычисленных величин выражение для w из (2.2) сводится к соотношению

$$w = w_0 + \varepsilon^{-2}\frac{p\nu}{8}\left[(6x^2 - 6x + 1) - \exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) - \exp\left(-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right)\right]\frac{z^2}{2},$$

где второй член в фигурных скобках является величиной $O(\varepsilon^2)$ по сравнению с первым, данным формулой (4.8), и может быть отброшен.

При этом выражение для напряжения σ_x из (2.1) будет иметь вид

$$\sigma_x = -\varepsilon^{-2}\frac{p}{8}(6x^2 - 6x + 1)z + \varepsilon^{-2}\frac{p\nu(2+\nu)}{8(1+\nu)^2}\left[\exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) + \exp\left(-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right)\right]z$$

Член в квадратных скобках описывает концентрацию напряжений в углах полосы, которые соизмеримы с напряжениями, определяемыми по классической теории в середине балки.

Пример 2. Рассмотрим полосу, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой $Z_+ = p$, $X_+ = X_- = Z_- = 0$, $p = \text{const}$. Напряженно-деформированное состояние в нулевом приближении описывается уравнениями (4.1), (4.2) и (3.7). Концы полосы, если ее рассматривать как балку, считаются свободно опертыми. В терминах сопротивления материалов это означает, что на концах должны обращаться в ноль прогиб (вертикальные перемещения нейтральной оси) и изгибающий момент. В представлениях теории упругости нулю должны быть равны перемещения w в нижних углах на опорах и напряжение σ_x на коротких сторонах. Кроме того, на коротких сторонах должны отсутствовать касательные напряжения τ. Вертикальное перемещение из соотношений (2.2) в нижних углах должно быть равно нулю

$$w_0 - [(1-\nu^2)\sigma_{z0} - \varepsilon\nu u_0'] + \frac{1}{2}[\varepsilon^2\nu w_0'' - \varepsilon(1+\nu)^2\tau_0'] = 0 \tag{4.10}$$

при $x = 0$ и $x = 1$, $z = -1$.

Условие $\sigma_x = 0$ на концах полосы, следующее из соотношений (2.2),

$$\sigma_x = \varepsilon u_0' + \nu\sigma_{z0} + [-\varepsilon^2 w_0'' + (2+\nu)\varepsilon\tau_0']z = 0 \quad \text{при} \quad x = 0;1$$

и условие (4.10) после отбрасывания малых величин $\sigma_{z0} \sim p$, $u_0 \sim \varepsilon^{-1}p$, $\tau_0 \sim \varepsilon^{-1}p$ по сравнению с главными $(w_0, w_0'') \sim \varepsilon^{-4}p$ сводятся к классическим условиям для свободно опертой балки $w_0 = w_0'' = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$. Удовлетворяющее им решение уравнения прогиба имеет вид

$$w_0 = \varepsilon^{-4}\frac{p}{16}(x^4 - 2x^3 + x)$$

Осталось удовлетворить условию отсутствия касательных напряжений на торцевых сечениях полосы. Преобразованное с помощью уравнений (3.6), (3.8) выражение для τ при заданной нагрузке может быть записано следующим образом

$$\tau = (\tau_0^s + \tau_0^q)(1 - z^2) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0;1$$

Удовлетворив условию $\tau_0^q = -\tau_0^s$ при $x = 0$ и $x = 1$, где τ_0^q определена соотношением (4.9), а τ_0^s – первой формулой из (3.6), можно записать выражение для искомого касательного напряжения

$$\tau = \varepsilon^{-1}\frac{3}{8}p\left\{(-2x+1) - \exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) + \exp\left(-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right)\right\}(1 - z^2)$$

Напряжение σ_z можно определить по найденному напряжению τ с помощью второго уравнения из (2.1), а произвольную функцию интегрирования σ_{z0} – из условия $\sigma_z|_{z=1} = p$:

$$\sigma_z = p\left[\frac{3}{4}\left(z - \frac{z^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\right] - pg\left[\frac{3}{4}\left(z - \frac{z^3}{3}\right) - \frac{1}{2}\right],$$

где $g = k\exp(-kx/\varepsilon)/\varepsilon + k\exp[-k(1-x)/\varepsilon]$, $k^2 = 2/(2-\nu)$.

Видно, что на нижней стороне полосы при $z = -1$ первый член в квадратных скобках обращается в ноль. На верхней стороне при $z = 1$ имеем $\sigma_z = p$. В нижней угловой точке $z = -1$ и $x = 0$ напряжение имеет вид $\sigma_z = k\exp(-kx/\varepsilon)/\varepsilon$, а в точке $z = -1$, $x = 1$ имеем $\sigma_z = k\exp[-k(1-x)/\varepsilon]/\varepsilon$. Заметим, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} k\exp(-kx/\varepsilon)/\varepsilon = \infty$, тогда как $k/\varepsilon\int_0^c \exp(-kx/\varepsilon)dx = -1$, где $0 < c < 1$ выбирается на таком расстоянии от точки $x = 0$, чтобы можно было считать величину экспоненты пренебрежимо малой. Таким образом в углах полосы возникают локальные поперечные напряжения, совпадающие при $\varepsilon \to 0$ с δ-функциями Дирака. В терминах сопротивления материалов эти напряжения являются реакциями на опорах.

Заключение. Предложенный Сен-Венаном метод решения уравнений теории упругости продолжен до итерационного и до совпадения с методом простых итераций. Для этого оператор исходных уравнений преобразован так, чтобы он позволял вычислять неизвестные величины последовательно: вычисленные в одном уравнении величины входят в следующее уравнение как известные, при этом умноженные на малый параметр. Такая последовательность обеспечивается операторами Пикара и выбором величин начального приближения, не зависящими от поперечной координаты, называемыми гипотезами Кирхгоффа или гипотезами недеформируемой нормали. В течение одной итерации вычисляются путем прямого интегрирования все неизвестные задачи, которые содержат четыре произвольные функции интегрирования, зависящие от продольной координаты и играющие роль коэффициентов в полиномах по степеням поперечной координаты. В случае изотропного материала уравнения, описывающие изгиб и растяжение-сжатие, разделяются. Заметим, что для случая произвольного слоистого материала разделение не происходит [14].

В процессе последовательного вычисления неизвестных в течение нулевой итерации имеет место четырехкратное интегрирование по поперечной координате и четырехкратное дифференцирование по продольной. Однако это дифференцирование носит символический характер, т.к. при выполнении граничных условий на длинных сторонах производные приравниваются к нагрузке, которая является величиной $O(1)$, и соответствующие уравнения интегрируются, обеспечивая вместе с однородными сингулярно возмущенными уравнениями непрерывность и ограниченность решения в любом случае. Процесс вычисления можно трактовать как расщепление сложного оператора (2.1) на четыре оператора Пикара (1.1) относительно поперечной координаты и четыре – относительно продольной. Близость полученного решения к точному решению оценивается порядком первого отброшенного члена по ε для медленно меняющихся величин и оценкой, данной в [4], для быстроменяющихся. Можно показать, что последняя оценка может быть улучшена.

Автор благодарит П.С. Красильникова за ряд конструктивных замечаний по работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 676 с.
2. *Friedrichs K.O.* Asymptotic phenomena in mathematical physics // Bull. Amer. Math. Soc. 1955. V. 61. № 6. P. 485–504.
3. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. М.: ВИНИТИ, 1973. 271 с.
4. *Зверяев Е.М.* Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 472–481.
5. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.

6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1976. 576 с.
7. *De Pascalis R., Destrade M., Saccomandi G.* The stress field in a pulled cork and some subtle points in the semi-inverse method of nonlinear elasticity // Proc. R. Soc. Ser. A. Math., Phys., Engng. Sci. 2007. V. 463 (2087). P. 2945–2959.
8. *De Pascalis R., Rajagopal K.R., Saccomandi G.* Remarks on the use and misuse of the semi-inverse method in the nonlinear theory of elasticity // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2009. V. 62. № 4. P. 451–464.
9. *Bulgariu E.* On the Saint-Venant's problem in microstretch elasticity // Libertas Mathematica. 2011. V. XXXI. P. 147–162.
10. *Chiriëta S.* Saint-Venant's problem and semi-inverse solutions in linear viscoelasticity // Acta Mechanica. 1992. V. 94. P. 221–232.
11. *Placidi L.* Semi-inverse method a la Saint-Venant for two-dimensional linear isotropic homogeneous second-gradient elasticity // Math. Mech. Solids. 2015. P. 1–19.
12. *Zveryaev E.M.* Interpretation of Semi-Invers Saint-Venant Method as Iteration Asymptotic Method. Shell Structures: Theory and Application. London: Taylor & Francis Group, 2006. P. 191–198.
13. *Зверяев Е.М.* Непротиворечивая теория оболочек // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 5. С. 590–596.
14. *Зверяев Е.М., Макаров Г.И.* Общий метод построения теорий типа Тимошенко // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 308–321.
15. *Зверяев Е.М., Олехова Л.В.* Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений. Препринт № 95, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2014. 30 с.

Saint-Venant–Picard–Banach Method for Integrating Thin-Walled Systems Equations of the Theory of Elasticity

E. M. Zveryaev[a,#]

[a] *Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS, Moscow, Russia*
[#] *e-mail: zveriaev@mail.ru*

A systematic presentation of the modified Saint-Venant semi-inverse method is given in the example of constructing a differential equations of the theory of elasticity solution with a small parameter for a long strip. The method is interpreted as iterative. The convergence of the solution is provided by the thin wall small parameter in accordance with the Banach mapping contraction principle. The sequential computation of the unknowns takes place with the help of known in the literature the Picard operators so that the unknowns computed in one equation are incoming for the next equation, and so on. The fulfillment of the boundary conditions on the long edges leads to the equations for the slowly and quickly varying singular components of the solution. The solutions of singularly perturbed equations, satisfying the conditions lost in the classical theory, describe the stress concentration at the angles of the strip.

Keywords: Saint-Venant semi-inverse method, mapping contraction principle, stress concentration in angles

REFERENCES

1. *Love A.E.H.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927. 662 p.
2. *Friedrichs K.O.* Asymptotic phenomena in mathematical physics // Bull. Amer. Math. Soc., 1955, vol. 61, no. 6, pp. 485–504.
3. *Grigolyuk E.I., Selezov I.T.* Non-classical theory for vibrations of bars, plates and shells, Results of science and technology – In: Mechanics of rigid deformable body, Iss. 5. Moscow: VINITI, 1973. 271 p. (in Russian)

4. *Zveryayev Ye.M.* Analysis of the hypotheses used when constructing the theory of beams and plates // JAMM, 2003, vol. 67, no. 3, pp. 425–434.
5. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. N.Y.: Dover Publ., 1999. 128 p.
6. *Kamke E.* Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Leipzig: Akadem. Verlagsg., 1942. 642 p. (in German)
7. *De Pascalis R., Destrade M., Saccomandi G.* The stress field in a pulled cork and some subtle points in the semi-inverse method of nonlinear elasticity // Proc. R. Soc. Ser. A. Math., Phys., Engng. Sci., 2007, vol. 463, (2087), pp. 2945–2959.
8. *De Pascalis R., Rajagopal K. R., Saccomandi G.* Remarks on the use and misuse of the semi-inverse method in the nonlinear theory of elasticity // Quart. J. Mech. Appl. Math., 2009, V. 62, no. 4, pp. 451–464.
9. *Bulgariu E.* On the Saint-Venant's problem in microstretch elasticity // Libertas Mathematica, 2011, vol. XXXI, P. 147–162.
10. *Chiriëta S.* Saint-Venant's problem and semi-inverse solutions in linear viscoelasticity // Acta Mechanica, 1992, vol. 94, pp. 221–232.
11. *Placidi L.* Semi-inverse method a la Saint-Venant for two-dimensional linear isotropic homogeneous second-gradient elasticity // Math. Mech. Solids, 2015, pp. 1–19.
12. *Zveryaev E.M.* Interpretation of Semi-Invers Saint-Venant Method as Iteration Asymptotic Method. Shell Structures: Theory and Application. London: Taylor&Francis Group, 2006. pp. 191–198.
13. *Zveryayev Ye.M.* A consistent theory of thin elastic shells // JAMM, 2016, vol. 80, no. 5, pp. 409–420.
14. *Zveryayev Ye.M., Makarov G.I.* A general method for constructing Timoshenko-type theories // JAMM, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 197–207.
15. *Zveriaev E.M., Olekhova L.V.* Reduction 3D equations of composite plate to 2D equations on base of mapping contraction principle, Preprint no. 95, IPM RAS, 2014, 30 p. (in Russian)