ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2019, том 83, № 5–6, с. 691–703

УДК 531.36:521.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА ВОКРУГ НОРМАЛИ К ПЛОСКОСТИ ОРБИТЫ

А. П. Маркеев[1,2,*]

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
[2] *Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия*
* *e-mail: anat-markeev@mail.ru*

Поступила в редакцию 21.05.2019 г.
После доработки 16.09.2019 г.
Принята к публикации 01.10.2019 г.

Изучается вращательное движение спутника – твердого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите. Решается задача об устойчивости стационарного движения, когда ось симметрии спутника перпендикулярна плоскости орбиты, а сам спутник вращается относительно оси симметрии с постоянной по величине угловой скоростью (цилиндрическая прецессия). Задача зависит от двух параметров: безразмерной величины абсолютной угловой скорости вращения спутника и от отношения его осевого и экваториального моментов инерции. Получены строгие выводы об устойчивости и неустойчивости для значений параметров, которые ранее не были исследованы. Вместе с известными результатами отечественных и зарубежных авторов полученные выводы дают строгое и полное решение задачи об устойчивости цилиндрической прецессии спутника на круговой орбите для всех значений параметров задачи.

Ключевые слова: твердое тело, прецессия, устойчивость

DOI: 10.1134/S0032823519050072

Существование стационарных режимов вращения (регулярных прецессий) динамически симметричного спутника-твердого тела на круговой орбите установлено около 60-ти лет назад в работах [1, 2]. Эти работы затем были продолжены в статьях [3–7]. Имеется история исследования стационарных вращений [8–10]. Для движений, отвечающих стационарным вращениям, ось симметрии спутника занимает фиксированное положение в орбитальной системе координат (ОСК), а сам спутник вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью. Показано, что существует три типа стационарных вращений: для одного из них ось симметрии перпендикулярна плоскости орбиты (цилиндрическая прецессия), для второго типа она лежит в плоскости, перпендикулярной радиус-вектору центра масс (гиперболоидальная прецессия), а для третьего типа ось симметрии спутника находится в плоскости, перпендикулярной вектору скорости центра масс (коническая прецессия). Все три типа прецессий, очевидно, неустойчивы по отношению к возмущениям угла собственного вращения.

В статье изучается устойчивость по отношению к возмущениям положения оси симметрии в орбитальной системе координат и скоростям изменения этих возмущений. Причем исследование ограничивается только задачей об устойчивости цилиндрической прецессии. При помощи методов Ляпунова и КАМ-теории [11–13] эта задача рассмотрена довольно подробно в целом ряде работ [1–7, 14–18]. Но строгое и полное решение задачи для всех физически допустимых значений параметров до сих пор не получено. Ниже излагаются результаты исследования, дополняющие упомянутые работы [1—7, 14—18] и вместе с ними дающие ответ на вопрос об устойчивости цилиндрической прецессии для всех значений параметров. Кроме того, иногда даются уточнения опубликованных численных результатов, а в некоторых случаях приводятся более простые доказательства сделанных ранее выводов об устойчивости и неустойчивости.

1. Введение. Рассмотрим движение спутника в центральном ньютоновском гравитационном поле. Линейные размеры спутника предполагаем малыми по сравнению с размерами орбиты. Поэтому влиянием вращения спутника относительно его центра масс O на орбиту самого центра масс можно пренебречь [8]. Спутник будем считать твердым телом, центральный эллипсоид которого является эллипсоидом вращения, орбиту центра масс предполагаем круговой.

Пусть $OXYZ$ — орбитальная система координат (ОСК), ось OZ которой направлена вдоль радиус-вектора центра масс спутника, OX — по трансверсали, а OY — по нормали к плоскости орбиты. Система координат $Oxyz$ образована главными центральными осями инерции спутника (ось Oz направлена вдоль его оси динамической симметрии). Положение связанной системы координат относительно ОСК задается при помощи углов Эйлера θ, ψ, φ (θ — угол нутации, ψ — угол прецессии, φ — угол собственного вращения).

Проекция r абсолютной угловой скорости спутника на его ось симметрии постоянна во все время движения ($r = r_0 = \text{const}$). Это позволяет [8—10] свести систему дифференциальных уравнений шестого порядка вращательного движения спутника относительно центра масс к системе четвертого порядка, описывающей движение оси симметрии Oz спутника относительно ОСК $OXYZ$. Обобщенными координатами при этом будут углы θ и ψ, соответствующие им канонически сопряженные импульсы обозначим через p_θ и p_ψ. За независимую переменную примем безразмерную величину $\nu = \omega_0 t$, где t — время, а ω_0 — угловая скорость в круговом движении центра масс спутника.

Цилиндрической прецессии спутника отвечает [8—10] частное решение уравнений движения, в котором $\theta = \pi/2$, $\psi = \pi$, $p_\theta = p_\psi = 0$. Для этого решения ось симметрии спутника перпендикулярна плоскости орбиты, а спутник вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью $d\varphi/dt$, равной $r_0 - \omega_0$.

Для исследования устойчивости введем возмущения q_i, p_i $(i = 1,2)$, положив

$$\theta = \pi/2 + q_1, \quad \psi = \pi + q_2, \quad p_\theta = A\omega_0 p_1, \quad p_\psi = A\omega_0 p_2$$

Функция Гамильтона возмущенного движения имеет вид [10]

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\cos^2 q_1}\right) + p_1 \sin q_2 + p_2\left(\frac{\alpha\beta \sin q_1}{\cos^2 q_1} - \operatorname{tg} q_1 \cos q_2\right) + \\ + \frac{1}{2}\alpha^2\beta^2 \operatorname{tg}^2 q_1 - \frac{\alpha\beta \cos q_2}{\cos q_1} + \frac{3}{2}(\alpha - 1)\sin^2 q_1 \tag{1.1}$$

Здесь через α и β обозначены безразмерные параметры задачи:

$$\alpha = \frac{C}{A}, \quad \beta = \frac{r_0}{\omega_0} \quad (0 < \alpha \le 2, -\infty < \beta < \infty) \tag{1.2}$$

Соответствующие функции (1.1) уравнения движения допускают обобщенный интеграл энергии $H = h = \text{const}$. На невозмущенном движении $h = -\alpha\beta$.

Функция Гамильтона (1.1) представима в виде сходящегося ряда

$$H = H_2 + H_4 + \cdots + H_{2k} + \cdots \tag{1.3}$$

Несущественная аддитивная постоянная $-\alpha\beta$ здесь отброшена, а H_{2k} — формы степени $2k$ относительно q_1, q_2, p_1, p_2. Далее разложение (1.3) потребуется с точностью до форм восьмой степени включительно. Здесь для краткости приведем только выражения для форм второй и четвертой степеней:

$$H_2 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}(\alpha^2\beta^2 - \alpha\beta + 3\alpha - 3)q_1^2 + \frac{1}{2}\alpha\beta q_2^2 + (\alpha\beta - 1)q_1 p_2 + q_2 p_1 \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} H_4 = {} & \frac{1}{24}(8\alpha^2\beta^2 - 5\alpha\beta - 12\alpha + 12)q_1^4 + \frac{1}{6}(5\alpha\beta - 2)q_1^3 p_2 + \\ & + \frac{1}{2}q_1^2 p_2^2 + \frac{1}{4}\alpha\beta q_1^2 q_2^2 - \frac{1}{6}p_1 q_2^3 + \frac{1}{2}q_1 q_2^2 p_2 - \frac{1}{24}\alpha\beta q_2^4 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Введем обозначения

$$s_1 = \alpha\beta - 1, \quad s_2 = \alpha\beta + 3\alpha - 4, \quad s_3 = \alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta + 3\alpha - 1, \quad \Delta = s_3^2 - 4s_1 s_2$$

В плоскости параметров α, β существует (см. рис. 1) две области I и II устойчивости в первом приближении, которые задаются соответственно неравенствами $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ и $s_1 < 0$, $s_2 < 0$, $\Delta > 0$ [1–7].

Граница области I состоит из участков гипербол: один участок ($s_1 = 0$) соединяет точки $Q_1(2,1/2)$ и $Q_2(1,1)$, а другой ($s_2 = 0$), начавшись в точке $Q_2(1,1)$, идет при возрастании β влево и вверх, приближаясь к асимптоте $\alpha = 0$.

Граница области II образована тремя участками. Один является частью гиперболы $s_2 = 0$ и соединяет точки $Q_3(2,-1)$ и $Q_2(1,1)$, этот участок пересекает ось $\beta = 0$ в точке $Q_4(4/3,0)$. Другой участок является частью гиперболы $s_1 = 0$, он соединяет точки $Q_2(1,1)$ и $Q_5(2/3,3/2)$. Третий участок границы области II задается уравнением $\Delta = 0$, он начинается в точке $Q_5(2/3,3/2)$ и при уменьшении β проходит через точку $Q_6(1,0)$ оси $\beta = 0$, а далее при $\beta \to -\infty$ приближается к вертикальной асимптоте $\alpha = 0$.

Если параметры α, β не лежат внутри областей I и II или на их границах, то цилиндрическая прецессия неустойчива, так как [11] характеристическое уравнение линеаризованных уравнений возмущенного движения (им отвечает квадратичная часть (1.4) функции Гамильтона (1.3)) имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью. На рис. 1 области неустойчивости закрашены серым цветом.

Внутри областей I и II и на их границах частоты ω_1 и ω_2 ($\omega_1 \geq \omega_2 \geq 0$) малых колебаний оси симметрии спутника определяются уравнением

$$\omega^4 - s_3\omega^2 + s_1 s_2 = 0$$

На границах областей I и II либо $\omega_1 = \omega_2$ (участок $\Delta = 0$ границы области II), либо меньшая из частот ω_2 обращается в нуль, либо сразу обе частоты ω_1 и ω_2 равны нулю; последнее реализуется в точке $Q_5(2/3,\ 3/2)$ пересечения кривых $s_1 = 0$ и $\Delta = 0$. Во всех граничных точках цилиндрическая прецессия спутника неустойчива в первом (линейном) приближении [10, 16].

2. Результаты нелинейного анализа устойчивости в области I и на ее границах. Из проведенного ранее нелинейного анализа следует, что внутри области I и во всех точках ее границы цилиндрическая прецессия устойчива. Для точек, лежащих внутри области I, это впервые показано [5] при помощи второго метода Ляпунова. Устойчивость на границах области I была показана в статье [16] при помощи методов КАМ-теории. Ниже дается иной способ доказательства устойчивости, который применим как для внутренних точек области I, так и для ее граничных точек. Доказательство опирается только на теорему Ляпунова об устойчивости движения [11].

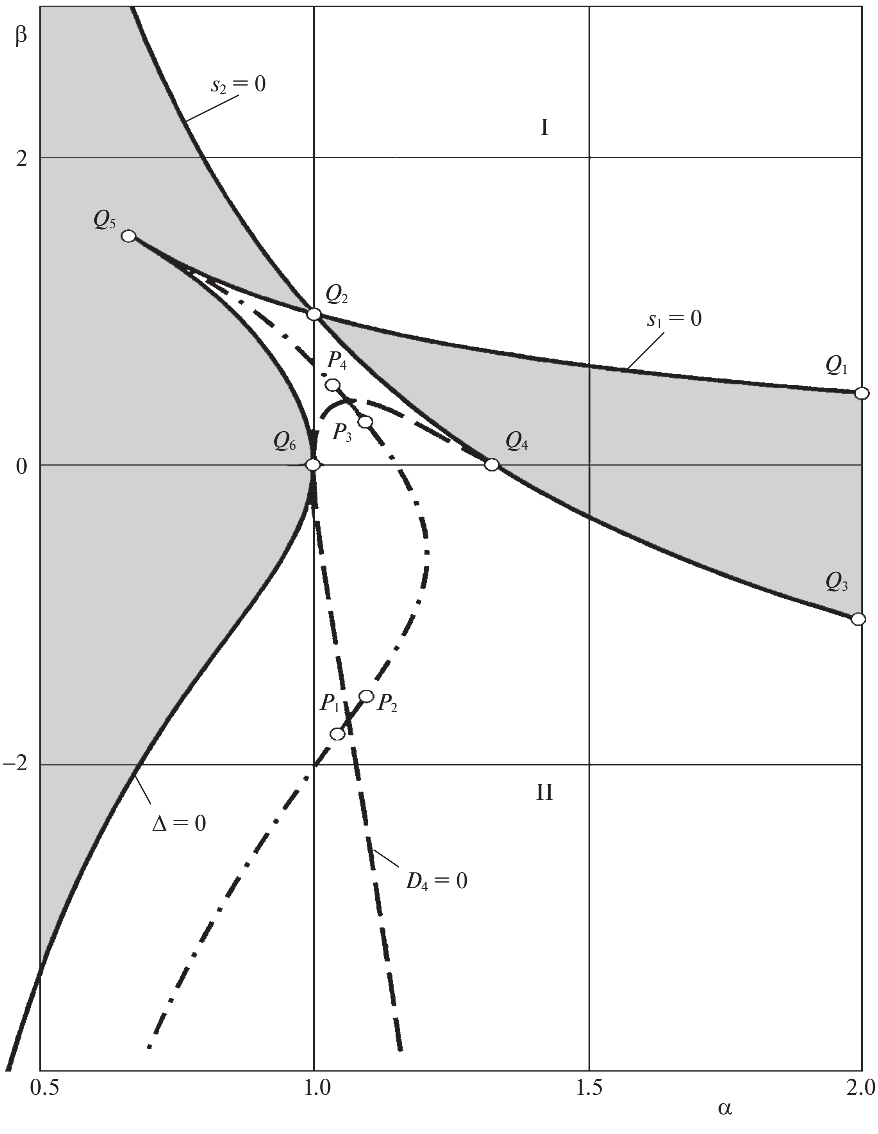

Рис. 1.

Запишем функцию Гамильтона (1.1) в лагранжевых переменных q_i, $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2)$ (точкой обозначается производная по независимой переменной ν).

Проделав хорошо известные выкладки [19], получим следующее выражение для обобщенного интеграла энергии (интеграла Якоби):

$$H = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \cos^2 q_1 \dot{q}_2^2) + W(q_1, q_2; \alpha, \beta) = \mathrm{const}, \tag{2.1}$$

где

$$W = \frac{1}{2}(1 - \cos q_1 \cos q_2)^2 + (\alpha\beta - 1)(1 - \cos q_1 \cos q_2) + \frac{3}{2}(\alpha - 1)\sin^2 q_1 \tag{2.2}$$

При получении выражения (2.1) для удобства записи к функции H добавлена несущественная аддитивная постоянная $\alpha\beta$.

Из интеграла (2.1) и теоремы Ляпунова следует, что если функция (2.2) будет определенно-положительной в окрестности точки $q_1 = q_2 = 0$, то имеет место устойчивость. Разложение функции (2.2) в ряд имеет вид

$$W = \frac{1}{2}(s_2 q_1^2 + s_1 q_2^2) + \cdots, \tag{2.3}$$

где многоточием обозначена совокупность членов выше третьей степени относительно q_1, q_2. Из выражения (2.3) видно, что при выполнении неравенств $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ функция W будет определенно-положительной. Поэтому, как и следовало ожидать [5], внутри области I цилиндрическая прецессия устойчива.

На участке $s_1 = 0$ границы области I (т.е. когда $\beta = 1/\alpha$, $\alpha \geq 1$) функция (2.2), очевидно, определенно-положительна. А на участке $s_2 = 0$ (когда $\beta = 4/\alpha - 3$, $\alpha \leq 1$) эту функцию можно преобразовать к виду

$$W = \frac{(\cos q_1(\cos^2 q_2 + 3 - 3\alpha) + (3\alpha - 4)\cos q_2)^2 + 3(\alpha - 1)(3\alpha - 4)\sin^2 q_2}{2(\cos^2 q_2 + 3 - 3\alpha)},$$

откуда следует, что при $\alpha \leq 1$ функция W является определенно-положительной. Таким образом, в согласии с известным результатом [16], показано, что на границе области I цилиндрическая прецессия устойчива.

3. Об устойчивости на границе области II. Сначала рассмотрим левую границу $\Delta = 0$ области II, а затем – ее правую границу, состоящую из участков Q_3Q_2 и Q_2Q_5.

3.1. Случай $\Delta = 0$. Здесь $-\infty < \beta \leq 3/2$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, причем ω – монотонно убывающая функция β $(0 \leq \omega < 2.147709)$. Ранее показано [16], что на интервалах $(-\infty < \beta < 0)$ и $(0 < \beta < 3/2)$, на которые точка $Q_6(1,0)$ разбивает кривую $\Delta = 0$, цилиндрическая прецессия устойчива.

О неустойчивости в точке $Q_6(1,0)$. При $\beta = 0$ цилиндрическая прецессия представляет собой поступательное движение спутника в абсолютном пространстве, когда его ось симметрии Oz перпендикулярна плоскости орбиты. В точке $Q_6(1,0)$ это движение, очевидно, неустойчиво [16] (следствие того, что при $\alpha = 1$ центральный эллипсоид инерции спутника – сфера и гравитационный момент обращается в нуль). Поэтому при $\alpha = 1$, $\beta = 0$ возмущенное движение спутника представляет собой его равномерное вращение вокруг неизменного направления вектора угловой скорости спутника в абсолютном пространстве. При таком движении ось Oz с течением времени может отклониться на конечный угол от направления нормали к плоскости орбиты, как бы ни была мала величина угловой скорости возмущенного движения спутника.

О неустойчивости в точке $Q_5(2/3,3/2)$. В этой точке обе частоты малых колебаний спутника обращаются в нуль $(\omega_1 = \omega_2 = 0)$. При помощи теоремы Четаева о неустойчивости показано [16], что в точке $Q_5(2/3,3/2)$ цилиндрическая прецессия неустойчива. Ниже приводится доказательство неустойчивости, менее громоздкое, предложенного ранее [16].

Сделаем в функции Гамильтона возмущенного движения (1.3) каноническое унивалентное преобразование $q_1, q_2, p_1, p_2 \to x_1, x_2, y_1, y_2$, приводящее эту функцию к ее простейшей (нормальной) форме до членов четвертой степени включительно. Вычисления показывают, что эту замену можно представить в виде последовательности двух канонических преобразований. Первое преобразование $q_1, q_2, p_1, p_2 \to \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ – линейное и задается [10] равенствами

$$q_1 = -\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2, \quad q_2 = -\frac{1}{2}\eta_1 + \eta_2, \quad p_1 = -\frac{1}{2}\eta_1 - \eta_2, \quad p_2 = \xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2,$$

а вторая замена $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \to x_1, x_2, y_1, y_2$ – нелинейная, близкая к тождественной. Она задается неявно при помощи соотношений

$$\eta_i = y_i + \frac{\partial S_4}{\partial \xi_i}, \quad x_i = \xi_i + \frac{\partial S_4}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2),$$

где S_4 – форма четвертой степени относительно ξ_1, ξ_2, y_1, y_2:

$$\begin{aligned} S_4 = {} & \frac{5}{16}\xi_1 y_1 y_2^2 - \frac{1}{8}\xi_1^2\xi_2 y_2 - \frac{1}{16}\xi_1 y_1^2 y_2 + \frac{83}{640}\xi_2 y_1^2 y_2 - \frac{37}{320}\xi_1^2\xi_2 y_1 + \\ & + \frac{1}{12}\xi_1 y_2^3 - \frac{13}{48}\xi_2^3 y_2 - \frac{31}{384}\xi_2^3 y_1 - \frac{1}{64}\xi_2 y_1^3 - \frac{3}{16}\xi_2 y_2^3 - \frac{7}{24}\xi_1^3 y_2 + \\ & + \frac{5}{384}\xi_1 y_1^3 + \frac{1}{24}\xi_1^3 y_1 + \frac{5}{16}\xi_2 y_1 y_2^2 - \frac{23}{320}\xi_1\xi_2^2 y_2 \end{aligned}$$

В новых переменных x_1, x_2, y_1, y_2 функция Гамильтона (1.3) принимает вид

$$H = \frac{1}{2}y_1^2 - x_1 x_2 + \frac{1}{8}y_2^4 + \frac{1}{2}x_2^2 y_2^2 + \frac{1}{4}y_1^2 y_2^2 + \cdots, \tag{3.1}$$

где многоточием обозначена совокупность членов выше пятой степени относительно x_1, x_2, y_1, y_2.

Укороченная система, определяемая только первыми тремя слагаемыми в нормальной форме (3.1), допускает [16] частное, неограниченно возрастающее решение:

$$x_1^* = 2ay_2^{*3/2}, \quad x_2^* = 24a^3 y_2^{*5/2}, \quad y_1^* = 6a^2 y_2^{*2}$$

$$y_2^* = y_2^*(\nu) = \frac{y_2^*(0)}{[1 - a\sqrt{y_2^*(0)}\nu]^2}; \quad a = \frac{1}{2\,15^{1/4}}$$

Для доказательства неустойчивости возьмем функцию Четаева в виде

$$V = V_1^{15}\, V_2^{10}\, V_3^{12},$$

где

$$V_1 = y_2^4 - (x_1 - 2ay_2^{3/2})^2, \quad V_2 = y_2^6 - (x_2 - 24a^3 y_2^{5/2})^2, \quad V_3 = y_2^5 - (y_1 - 6a^2 y_2^2)^2,$$

а за область $V > 0$ примем область, в которой $y_2 > 0$, а

$$x_1 = 2ay_2^{3/2} + by_2^2 \quad x_2 = 24a^3 y_2^{5/2} + by_2^3, \quad y_1 = 6a^2 y_2^2 + by_2^{5/2} \quad (-1 < b < 1) \tag{3.2}$$

Для производной функции V в силу уравнений движения с полной (неукороченной) функцией Гамильтона (3.1) получаем в области (3.2) такое выражение:

$$dV/d\nu = u^9 (P(u) + O(y_2^{1/2})) y_2^{121/2}; \quad u = 1 - b^2, \tag{3.3}$$

где $P(u)$ – многочлен шестой степени относительно u вида

$$\begin{aligned} P = {} & 3(10 - 15^{3/4})u^6 + (7 \cdot 15^{3/4} - 30)\, u^5 + 24\left(1 - \frac{15^{1/2}}{5}\right) u^3 + \\ & + 4\left(\frac{6}{5}15^{1/2} + 15^{3/4} - 6\right) u^2 - 10\, 15^{1/4} u + 4\, 15^{3/4} + 10\, 15^{1/4} \end{aligned}$$

Легко проверить, что в области $V > 0$ этот многочлен положителен, а его минимальное значение равно 46.69931 (достигается при $b = \pm 0.819997$). Поэтому функция (3.3) определенно-положительна в области $V > 0$. Неустойчивость доказана.

3.2. Об устойчивости на правой границе области II. Сначала рассмотрим участки Q_3Q_4, Q_4Q_2 и Q_2Q_5 правой границы, а затем отдельно рассмотрим точку $Q_4(4/3, 0)$.

Об устойчивости на участках Q_3Q_4, Q_4Q_2 и Q_2Q_5. Здесь $\omega_2 = 0$, а $\omega_1 = \sqrt{9\alpha^2 - 15\alpha + 7}$ на участках Q_3Q_4 и Q_4Q_2 и $\omega_1 = \sqrt{3\alpha - 2}$ на участке Q_2Q_5. При помощи канонической замены переменных $q_i, p_i \to u_i, v_i$ $(i = 1, 2)$ функция Гамильтона (1.3) приводится к нормальной форме вида

$$H = \frac{1}{2}\omega_1(u_1^2 + v_1^2) + \frac{1}{2}\delta v_2^2 + \sum_{n=4}^{m}\sum_{\ell=0}^{[n/2]} a_{n-2\ell,2\ell}(u_1^2 + v_1^2)^{\ell} u_2^{n-2\ell} + O_{m+2}, \tag{3.4}$$

где O_{m+2} — совокупность членов не ниже $(m + 2)$-й степени относительно u_1, u_2, v_1, v_2, величина $\delta = \pm 1$, ее конкретное значение определяется в процессе линейной нормализации квадратичной части (1.4) функции Гамильтона [10]. Нелинейная нормализация проводится до такой степени m, чтобы коэффициент $a_{m,0}$ нормальной формы (3.4) был отличен от нуля. Согласно известному результату [20], при $\delta a_{m,0} > 0$ имеет место устойчивость, а при $\delta a_{m,0} < 0$ — неустойчивость.

Вычисления показали [10, 16], что на всех трех рассматриваемых участках правой границы величина δ равна -1. Для величины же $a_{4,0}$ на участках Q_3Q_4, Q_4Q_2 и Q_2Q_5 можно получить [16] соответственно такие выражения:

$$a_{4,0} = \frac{9(\alpha - 1)^2(4 - 3\alpha)}{8\omega_1^4} \quad \text{и} \quad a_{4,0} = \frac{9(\alpha - 1)^2}{8\omega_1^4}$$

Поэтому на участке Q_3Q_4 цилиндрическая прецессия устойчива, а на участках Q_4Q_2 и Q_2Q_5 неустойчива [16].

Анализ устойчивости в точке $Q_4(4/3, 0)$. После линейной канонической замены переменных

$$q_1 = -\frac{1}{3^{1/2}}\xi_2 - \frac{2}{3^{3/4}}\eta_1, \quad q_2 = \frac{1}{3^{1/4}}\xi_1 + \frac{2}{3^{1/2}}\eta_2$$
$$p_1 = \frac{1}{3^{1/4}}\xi_1 - \frac{1}{3^{1/2}}\eta_2, \quad p_2 = -\frac{1}{3^{1/2}}\xi_2 + \frac{1}{3^{3/4}}\eta_1$$

и последующего нелинейного канонического преобразования $\xi_i, \eta_i \to u_i, v_i$ $(i = 1, 2)$, нормализующего члены четвертой степени в функции Гамильтона, получим функцию (3.4) в следующем виде:

$$H = \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1^2 + v_1^2) - \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{\sqrt{3}}{9}(u_1^2 + v_1^2)u_2^2 - \frac{1}{144}(u_1^2 + v_1^2)^2 + O_6$$

Так как $a_{4,0} = 0$, то вопрос об устойчивости не решается рассмотрением членов до четвертой степени включительно в разложении (1.3). Требуется, вообще говоря, нормализация членов более высоких степеней. Но в рассматриваемой конкретной задаче можно без этого обойтись. Дело в том, что при $\alpha = 4/3$, $\beta = 0$ положение равновесия $\theta = \pi/2$, $\psi = \pi$, отвечающее цилиндрической прецессии, не является изолированным, так как при указанных параметрах существует семейство положений равновесия $\theta = \theta_0 = \text{const}$, $\psi = \pi$, где θ_0 — любое значение угла нутации из интервала $(0, \pi)$; эти равновесия отвечают конической прецессии спутника. Было показано [18], что в таких ситуациях реализуется трансцендентный случай в задаче об устойчивости: коэффициент $a_{m,0}$ в нормальной форме (3.4) равен нулю для любого значения m. Там же показано, что в трансцендентном случае имеет место неустойчивость.

Таким образом, в точке $Q_4(4/3, 0)$ цилиндрическая прецессия спутника неустойчива.

4. Исследование устойчивости для значений параметров, лежащих внутри области II. В области II функция Гамильтона (1.3) знакопеременна. Исследование устойчивости цилиндрической прецессии для значений параметров α, β из этой области проводилось ранее [14, 15, 17]. Это исследование требует громоздких вычислений и проведено не полностью. Осталась, например, нерассмотренной часть области II, в которой $\beta < -20$. Ниже кратко излагаются результаты анализа устойчивости во всей области II. Анализ опирается на результаты по устойчивости автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы [12, 13, 17] и на алгоритмы компьютерных символьных вычислений.

Если нет резонанса до порядка $2m$ включительно (т.е. $k_1\omega_1 \neq k_2\omega_2$ для натуральных k_1 и k_2, удовлетворяющих неравенству $0 < k_1 + k_2 \leq 2m$), то при помощи преобразования Биркгофа q_i, $p_i \to q_i'$, p_i' функция Гамильтона (1.3) приводится к нормальной форме вида

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + H^{(0)}(r_1, r_2) + O((r_1 + r_2)^{m+1})$$
$$H^{(0)} = \sum_{\nu+\mu=2}^{m} c_{\nu\mu} r_1^{\nu} r_2^{\mu} \quad (q_j' = \sqrt{2r_j}\sin\varphi_j,\ p_j' = \sqrt{2r_j}\cos\varphi_j) \tag{4.1}$$

Если величина

$$D_{2m} = \sum_{i=0}^{m} c_{m-i,i}\,\omega_1^i \omega_2^{m-i} \tag{4.2}$$

отлична от нуля, то начало координат $q_i = p_i = 0$ $(i = 1, 2)$ устойчиво [12, 13].

Если же реализуется резонанс порядка $2m$, то к функции (4.1) добавляются резонансные слагаемые $r_1^{k_1/2} r_2^{k_2/2}(a_{k_1k_2}\sin\varphi + b_{k_1k_2}\cos\varphi)$, где $\varphi = k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2$. Положим

$$f_{k_1k_2} = |H^{(0)}(k_1, k_2)| - k_1^{k_1/2} k_2^{k_2/2}\sqrt{a_{k_1k_2}^2 + b_{k_1k_2}^2} \tag{4.3}$$

Начало координат будет устойчивым, если величина (4.3) положительна, и неустойчивым, если она отрицательна [13]. Если же $f_{k_1k_2} = 0$, то надо вычислять нормальную форму функции Гамильтона до членов, степень которых относительно q_i', p_i' превосходит $2m$. Например, при резонансе четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$ функция Гамильтона, нормализованная до членов шестой степени включительно, имеет вид

$$\begin{gathered} H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + r_1^{1/2} r_2^{3/2}(a_{13}\sin\varphi + b_{13}\cos\varphi) + \\ + c_{30} r_1^3 + c_{21} r_1^2 r_2 + c_{12} r_1 r_2^2 + c_{03} r_2^3 + r_1^{3/2} r_2^{3/2}(a_{33}\sin\varphi + b_{33}\cos\varphi) + \\ + r_1^{1/2} r_2^{5/2}(a_{15}\sin\varphi + b_{15}\cos\varphi) + O((r_1 + r_2)^4) \\ \varphi = \varphi_1 + 3\varphi_2 \end{gathered} \tag{4.4}$$

И для исследования устойчивости в случае $f_{13} = 0$, следует [17] вычислить величину e по формуле

$$\begin{gathered} e = (c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02})(c_{30} + 3c_{21} + 9c_{12} + 27c_{03}) - \\ - 27[a_{13}(a_{33} + 3a_{15}) + b_{13}(b_{33} + 3b_{15})] \end{gathered} \tag{4.5}$$

При $e > 0$ имеет место устойчивость, а при $e < 0$ — неустойчивость.

О кривых $D_4 = 0$ *и* $\omega_1 = 3\omega_2$. Отсутствие форм нечетных степеней в разложении (1.3) функции Гамильтона возмущенного движения сильно упрощает вычисления, необходимые для получения ее нормальной формы. Например, наличие резонанса третьего порядка $\omega_1 = 2\omega_2$ не влияет на структуру нормальной формы (4.1) при $m = 2$. Вычисления показывают, что для величины (4.2) при $m = 2$ справедливо выражение

$$D_4 = -\frac{(s_1-1)^4 s_2^2}{16\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1^2-\omega_2^2)^2(\omega_1^2-s_2)^2(\omega_2^2-s_2)^2} f \tag{4.6}$$

$$\begin{gathered} f = 4\alpha^6(3\alpha-5)\beta^6 + 3\alpha^5(3\alpha^2-86\alpha+99)\beta^5 - 4\alpha^4(108\alpha^2-525\alpha+443)\beta^4 + \\ + 6\alpha^3(9\alpha^3+384\alpha^2-1259\alpha+882)\beta^3 + 2\alpha^2(243\alpha^3-3303\alpha^2+7437\alpha-4393)\beta^2 + \\ + 9\alpha(\alpha-1)(9\alpha^3-189\alpha^2+845\alpha-857)\beta - 12(\alpha-1)(3\alpha-4)(9\alpha^2-36\alpha+59) \end{gathered} \tag{4.7}$$

Кривая $D_4 = 0$ изображена на рис. 1 штриховой линией. В области положительных значений β кривая соединяет точки $Q_6(1,0)$ и $Q_4(4/3,0)$ и имеет экстремум в точке (1.073499, 0.426688). При малых значениях $|\beta|$ в окрестности точки $Q_6(1,0)$ кривая $D_4 = 0$ представима рядом вида

$$\alpha = 1 + \frac{1}{12}\beta^2 + \frac{1}{8}\beta^3 + \frac{449}{2304}\beta^4 + O(\beta^5),$$

а вблизи точки $Q_4(4/3,0)$ – рядом

$$\alpha = \frac{4}{3} - \frac{5}{9}\beta + \frac{559}{2916}\beta^2 - \frac{191\,393}{944\,784}\beta^3 + O(\beta^4)$$

При $\beta \to -\infty$ кривая $D_4 = 0$ имеет вертикальную асимптоту $\alpha = 5/3$, причем

$$\alpha = \frac{5}{3} + \frac{27}{5\beta} + \frac{3528}{125\beta^2} + \frac{1\,022\,571}{12\,500\beta^3} + O\left(\frac{1}{\beta^4}\right)$$

Кривая $\omega_1 = 3\omega_2$ резонанса четвертого порядка показана на рис. 1 штрихпунктирной линией и задается уравнением

$$\begin{gathered} g(\alpha,\beta) \equiv 9\alpha^4\beta^4 - 36\alpha^3\beta^3 + 2\alpha^2(27\alpha-41)\beta^2 - \\ - 8\alpha(51\alpha-67)\beta + 81\alpha^2 + 246\alpha - 391 = 0 \end{gathered}$$

Его можно представить в параметрической форме

$$\alpha = \frac{1}{27}(-9\tau^4 - 50\tau^2 + 18 + 10\tau\sqrt{9\tau^4+34\tau^2+9}), \quad \beta = \frac{1-\tau^2}{\alpha}, \tag{4.8}$$

где $0 \le \tau < \tau_*$, а $\tau_* = 2.166504$ – корень уравнения $9\tau^8 - 136\tau^4 - 300\tau^2 + 36 = 0$.

Кривая $\omega_1 = 3\omega_2$ начинается в точке $Q_5(2/3,\ 3/2)$, ось $\beta = 0$ она пересекает при $\alpha = (20\sqrt{13} - 41)/27 = 1.152260$, в точке (1.207392, –0.587632) имеет вертикальную касательную, а при $\beta \to -\infty$ кривая стремится к асимптоте $\alpha = 0$:

$$\alpha = -\frac{3.693741}{\beta} - \frac{4.285473}{\beta^2} - \frac{1.391780}{\beta^3} + O\left(\frac{1}{\beta^4}\right)$$

Используя хорошо известные алгоритмы теории многочленов [21], можно показать, что в области II кривые $D_4 = 0$ и $\omega_1 = 3\omega_2$ пересекаются только в двух точках: (1.062223, 0.424015) и (1.064888, –1.677124) (см. рис. 1).

Согласно сформулированным в начале раздела условиям устойчивости и неустойчивости, можно утверждать, что если параметры α, β не лежат на кривой резонанса четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$ и на кривой $D_4 = 0$, то цилиндрическая прецессия устойчива [14, 15, 17]. Устойчивость при значениях параметров, лежащих на этих кривых, требует отдельного рассмотрения.

Об устойчивости при резонансе $\omega_1 = 3\omega_2$. Используя параметрическое представление (4.8) кривой $\omega_1 = 3\omega_2$, можно показать, что равенство $f_{13} = 0$ для функции $f_{k_1k_2}$ из (4.3) приводится к уравнению $F(\tau) = 0$, где $F(\tau) = G(\tau)G(-\tau)$, а $G(\tau)$ – многочлен двадцатой степени относительно τ с целочисленными коэффициентами:

$$\begin{gathered} G(\tau) = 3\,881\,871\tau^{20} + 3\,856\,896\tau^{19} + 27\,061\,506\tau^{18} + 22\,021\,632\tau^{17} + \\ + 28\,509\,747\tau^{16} - 1\,029\,888\tau^{15} - 173\,015\,496\tau^{14} - 179\,421\,696\tau^{13} - \\ - 466\,131\,874\tau^{12} - 279\,150\,336\tau^{11} - 309\,401\,012\tau^{10} - 63\,843\,840\tau^{9} + \\ + 35\,912\,478\tau^{8} + 49\,109\,760\tau^{7} + 79\,477\,944\tau^{6} + 27\,191\,808\tau^{5} + \\ + 29\,362\,707\tau^{4} + 3\,670\,272\tau^{3} + 5\,705\,154\tau^{2} + 767\,151 \end{gathered} \tag{4.9}$$

Анализ показывает, что на допустимом интервале $0 < \tau < \tau_*$ изменения параметра τ существуют ровно четыре корня уравнения $F(\tau) = 0$. Этим корням соответствуют четыре точки кривой $\omega_1 = 3\omega_2$ (см. рис. 1):

$$\begin{gathered} P_1(1.051817, -1.742396), \quad P_2(1.086709, -1.566741) \\ P_3(1.071653,\ 0.384642), \quad P_4(1.056063,\ 0.449338) \end{gathered} \tag{4.10}$$

Они выделяют на резонансной кривой интервалы P_1P_2 и P_3P_4, в которых функция f_{13} отрицательна и, следовательно, имеет место неустойчивость. Вне этих интервалов $f_{13} > 0$, и там будет устойчивость. Концевые точки P_i $(i = 1,\dots,4)$ интервалов, в которых $f_{13} = 0$, отвечают критическому случаю резонанса четвертого порядка, когда для исследования устойчивости необходимо в разложении (1.3) учитывать члены выше четвертой степени и получать нормальную форму вида (4.4).

Обозначим через e_i значение величины (4.5), вычисленной в точке P_i. Вычисления показали, что

$$e_1 = 0.076305, \quad e_2 = -0.096586, \quad e_3 = -3.158340, \quad e_4 = 5.475326,$$

поэтому [17] цилиндрическая прецессия спутника в точках P_1 и P_4 устойчива, а в точках P_2 и P_3 неустойчива.

Таким образом, задача об устойчивости цилиндрической прецессии решена для всех значений параметров, лежащих на резонансной кривой $\omega_1 = 3\omega_2$.

Анализ устойчивости на кривой $D_4 = 0$. Для завершения исследования осталось рассмотреть устойчивость для параметров, лежащих на кривой $D_4 = 0$. На этой кривой есть четыре точки (1.025959, 0.360377), (1.026302, –0.847311) и (1.126083, 0.384775), (1.134791, –3.233129), в которых реализуются два резонанса шестого порядка: $2\omega_1 = 4\omega_2$ и $\omega_1 = 5\omega_2$ соответственно. Первый из них, на самом деле, является резонансом третьего порядка, но, как отмечалось выше, из-за отсутствия в разложении (1.3) формы H_3 наличие этого резонанса проявляется при учете в (1.3) форм не ниже шестой степени. Аналогично, резонансы пятого порядка: $\omega_1 = 4\omega_2$ и $2\omega_1 = 3\omega_2$, которые реализуются на кривой $D_4 = 0$ (в двух точках каждый), не играют роли при нормализации функции Гамильтона до членов шестой степени.

Проведенные ранее вычисления [15] показали, что во всех четырех точках кривой $D_4 = 0$, отвечающих резонансам шестого порядка, величина (4.3) положительна, поэтому в этих точках имеет место устойчивость.

Вне точек резонансов шестого порядка и вне резонанса $\omega_1 = 3\omega_2$ на кривой $D_4 = 0$ функция Гамильтона (1.3) приводится к нормальной форме, задаваемой равенством (4.1), в котором $m = 3$. Для решения вопроса об устойчивости надо рассмотреть функцию D_6, определяемую формулой (4.2). На кривой $D_4 = 0$ для функции D_6 справедливы такие аналитические представления:

$$D_6 = \frac{\sqrt{6}}{54|\beta|}\left(11 - \frac{31}{4}\beta - \frac{1585}{384}\beta^2 + O(\beta^3)\right) \quad \text{вблизи точки} \quad Q_6(1,0)$$

$$D_6 = \frac{\sqrt{3}}{72\sqrt{\beta}}\left(37 - \frac{38561}{648}\beta - \frac{4567357}{839808}\beta^2 + O(\beta^3)\right) \quad \text{вблизи точки} \quad Q_4(4/3,0)$$

Если $\beta \to -\infty$ вдоль кривой $D_4 = 0$, то

$$D_6 = -\frac{33}{20\beta}\left(1 + \frac{534}{275\beta} - \frac{15381}{13750\beta^2} + O\left(\frac{1}{\beta^3}\right)\right)$$

Вычисления показали, что на кривой $D_4 = 0$ есть только две точки: $R_1(1.066320, -1.707488)$ и $R_2(1.063991, 0.424808)$, в которых функция D_6 обращается в нуль. Эти точки лежат очень близко к точкам пересечения кривых $D_4 = 0$ и $\omega_1 = 3\omega_2$. На рис. 1 они не показаны. Существование точки R_2 отмечалось ранее в статье [15], точка же R_1 там не была обнаружена из-за недостаточной точности вычислений.

В точках R_1 и R_2 имеем соответственно $\omega_1 = 2.874051$, $\omega_2 = 0.946201$ и $\omega_1 = 1.160814$, $\omega_2 = 0.380520$. Отсюда видно, что резонансы до восьмого порядка в этих точках не реализуются, поэтому нормальной формой функции Гамильтона (1.3) будет функция вида (4.1), в которой $m = 4$. Вычисления показывают, что величина D_8 в точках R_1 и R_2 равна соответственно 1.900220 и 4.508041. Так как $D_8 \neq 0$, то в обеих точках имеет место устойчивость.

Следовательно, внутри области II неустойчивость имеет место на интервалах P_1P_2 и P_3P_4 кривой $\omega_1 = 3\omega_2$ и в двух концевых точках P_2 и P_3 этих интервалов. Во всех остальных точках области II цилиндрическая прецессия устойчива.

Заключение. Таким образом, вопрос об устойчивости цилиндрической прецессии решен для всех физически допустимых значений параметров α, β.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете) и в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубошин Г.Н.* О вращательном движении искусственных небесных тел // Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР. 1960. Т. 7. № 7. С. 511–520.
2. *Кондурарь В.Т.* Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара // Астрон. ж. 1959. Т. 36. Вып. 5. С. 890–901.
3. *Thomson W.T.* Spin stabilitzation of attitude against gravity torque // J. Astronaut. Sci. 1962. V. 9. № 1. P. 31–33.
4. *Kane T.R., March E.L., Wilson W.G.* Discussion on the paper: “Spin stabilization of attitude against gravity torque”, by W.T. Thomson // J. Astronaut. Sci. 1962. V. 9. № 4. P. 108–109.

5. *Черноусько Ф.Л.* Об устойчивости регулярной прецессии спутника // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 155–157.
6. *Likins P.W.* Stability of symmetrical satellite in attitude fixed in an orbiting reference frame // J. Astronaut. Sci. 1965. V. 12. № 1. P.18–24.
7. *Kane T.R.* Attitude stability of Earth-pointing satellites // AIAA J. 1965. V. 3. № 4. P. 726–731.
8. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
9. *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1978. 223 с.
10. *Маркеев А.П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.; Ижевск: НИЦ “Регул. и хаотич. динамика”, Ин-т компьют. исслед., 2009. 396 с.
11. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
12. *Арнольд В.И., Козлов В.В., А.И. Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
13. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
14. *Маркеев А.П.* Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 738–744.
15. *Маркеев А.П.* К задаче об устойчивости одного случая регулярной прецессии твердого тела в гравитационном поле // Темат. сб. научн. тр. Моск. авиац. ин-та. 1978. № 460. С. 13–17.
16. *Сокольский А.Г.* К задаче об устойчивости регулярных прецессий симметричного спутника // Космич. исслед. 1980. Т. 18. № 5. С. 698–706.
17. *Маркеев А.П.* К задаче об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы при резонансе 3:1 // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 653–660.
18. *Bardin B.S., Maciejewski A.J.* Transcendental case in stability problem of Hamiltonian system with two degrees of freedom in presence of first order resonance // Qualit. Theory Dynam. Syst. 2013. V. 12. Iss. 1. P. 207–216.
19. *Гантмахер Ф.Л.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.
20. *Сокольский А.Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 1. С. 24–33.
21. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Физматгиз, 1962. 431 с.

On the Stability of a Steady Rotation of a Satellite around Normal to the Orbital Plane

A. P. Markeev[a,b,#]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*
[b] *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*
[#] *e-mail: anat-markeev@mail.ru*

We study the rotational motion of a satellite (a rigid body) around the center of mass in a central Newtonian gravitational field in a circular orbit. The stability problem of a steady motion is solved when the symmetry axis of the satellite is perpendicular to the orbital plane, and the satellite itself rotates about the symmetry axis with a constant angular velocity (cylindrical precession). The problem depends on two parameters, the dimensionless value of the absolute angular velocity of rotation of the satellite and the ratio of its axial and equatorial moments of inertia. The rigorous stability and instability conclusions were obtained for the parameter values that were not previously studied. Together with the known results of domestic and foreign authors, the conclusions obtained give a rigorous and complete solution to the stability problem of the cylindrical precession of the satellite in a circular orbit for all values of the problem parameters.

Keywords: rigid body, precession, stability

REFERENCES

1. *Duboshin G.N.* On the rotational motion of artificial celestial bodies // Bull. Inst. Theor. Astronomy of USSR Academy of Sci., 1960, vol. 7, no. 7, pp. 511–520.
2. *Condurar V.T.* Particular solutions to the general problem of translational–rotational motion of a spheroid under the action of ball attraction // Astron. J., 1959, vol. 36, no. 5, pp. 890–901. (in Russian)
3. *Thomson W.T.* Spin stabilitzation of attitude against gravity torque // J. Astronaut. Sci., 1962, vol. 9, no. 1, pp. 31–33.
4. *Kane T.R., March E.L., Wilson W.G.* Discussion on the paper: "Spin stabilization of attitude against gravity torque" by W.T. Thomson // J. Astronaut. Sci., 1962, vol. 9, no. 4, pp. 108–109.
5. *Chernous'ko F.L.* On the stability of regular precession of a satellite // JAMM, 1964, vol. 28, no. 1, pp. 181–184.
6. *Likins P.W.* Stability of symmetrical satellite in attitude fixed in an orbiting reference frame // J. Astronaut. Sci., 1965, vol. 12, no. 1, pp. 18–24.
7. *Kane T.R.* Attitude stability of Earth-pointing satellites // AIAA J., 1965, vol. 3, no. 4, pp. 726–731.
8. *Beletskii V.V.* Satellite's Motion about Center of Mass in a Gravitational Field (Dvizheniye sputnika otnositel'no tsentra mass v gravitatsionnom pole). Moscow: MGU, 1975. 308 p. (in Russian)
9. *Sarychev V.A.* Orientation prroblems for artificial satellites (Voprosy oriyentatsii iskusstvennykh sputnikov) // Itogi nauki i tekhniki, vol. 11, Moscow: VINITI, 1978. 223 p. (in Russian)
10. *Markeev A.P.* Linear Hamiltonian Systems and Some Problems on Stability of Motion of a Satellite about Its Center of Mass. (Lineynyye gamil'tonovy sistemy i nekotoryye zadachi ob ustoychivosti dvizheniya sputnika otnositel'no tsentra mass) Izhevsk: R&C Dynamics; Inst. Comput. Sci., 2009. 396 p. (in Russian)
11. *Malkin I.G.* Theory of Stability of Motion. Washington D.C.: Office of Technical Information, 1952. 456 p.
12. *Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I.* Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. 3rd ed., Encyclopedia Math. Sci., vol. 3. Berlin: Springer, 2006. 505 p.
13. *Markeev A.P.* Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics. (Tochki libratsii v nebesnoy mekhanike i kosmodinamike) Moscow: Nauka, 1978. 312 p. (in Russian).
14. *Markeev A.P.* Stability of a canonical system with two degrees of freedom in the presence of resonance // JAMM, 1968, vol. 32, no. 4, pp. 766–772.
15. *Markeev A.P.* On the problem of stability of one case of regular precessions of a rigid body in a gravitational field // Thematic collection of scientific papers of the Moscow Aviation Institute. 1978. no. 460, pp. 13–17. (in Russian)
16. *Sokol'skii A.G.* On the problem of stability of regular precessions of a symmetrical satellites // Cosmic Res., 1980, vol. 18, no. 5, pp. 698–706. (in Russian)
17. *Markeyev A.P.* The problem of the stability of the equilibrium position of a Hamiltonian system at 3:1 resonance // JAMM, 2001, vol. 65, no. 4, pp. 639–645.
18. *Bardin B.S., Maciejewski A.J.* Transcendental case in stability problem of hamiltonian system with two degrees of freedom in presence of first order resonance // Qualitative Theory Dyn. Syst., 2013, vol. 12, no. 1, pp. 207–216.
19. *Gantmacher F.R.* Lectures in Analytical Mechanics. Moscow: Mir, 1975. 264 p.
20. *Sokol'skii A.G.* On stability of an autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom under first-order resonance // JAMM, 1977. vol. 41, no. 1, pp. 20–28.
21. *Kurosch A.G.* Vorlesungen über Allgemeine Algebra. Zürich: Harri Deutsch, 1964. 302 S. (in German)