ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2019, том 83, № 5–6, с. 770–778

УДК 532.516:534:1

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А. А. Гурченков[1,2,*]

[1] *Федеральный исследовательский центр Информатика и управление РАН, Москва, Россия*
[2] *Национальный исследовательский университет "МАИ", Москва, Россия*
**e-mail: challenge2005@mail.ru*

Поступила в редакцию 19.04.2019 г.
После доработки 17.06.2019 г.
Принята к публикации 24.09.2019 г.

Изучаются движения вязкой электропроводной несжимаемой жидкости, вращающейся вначале как твердое тело с постоянной угловой скоростью вместе с ограничивающими ее параллельными стенками, под действием внезапно начинающихся продольных колебаний одной из стенок и внезапно включенным магнитным полем, приложенным к одной из стенок. Стенки составляют произвольный угол с осью вращения. Магнитное поле действует по нормали к стенкам. В общем случае решение представлено в виде ряда. Представлены векторы касательных напряжений, действующие из жидкости на стенки щели. Рассматривается ряд частных случаев движения стенки. На основе полученных результатов исследуются отдельные структуры пограничных слоев у стенок. Данное исследование обобщает результаты [1–3].

Ключевые слова: вязкая несжимаемая электропроводная жидкость, магнитное поле, аналитическое решение

DOI: 10.1134/S0032823519050047

Данное исследование обобщает результаты [1–3].

Введение. В настоящей работе изучается нестационарный поток вязкой электропроводной несжимаемой жидкости во вращающейся щели при наличии внешнего однородного магнитного поля. Неустановившийся поток индуцируется некрутильными колебаниями одной из стенок щели. Схематично постановка задачи представлена на рис. 1. Задача в такой постановке, насколько известно автору, поставлена впервые. Показано, что при отсутствии вращения и магнитного поля, и при удалении неподвижной стенки на бесконечность, решение переходит в известное решение задачи о нестационарном движении жидкости, ограниченной перемещающейся плоской стенкой [1]. При отсутствии магнитного поля и удалении неподвижной стенки на бесконечность решение совпадает с результатами работы [2], а при отсутствии магнитного поля решение переходит в решение работы [3]. В одной из последних работ [4] рассматривается течение электропроводной жидкости между параллельными стенками, но жидкость предполагается идеальной и рассмотрено стационарное течение.

1. Точные решения уравнений магнитной гидродинамики. Задача рассматривается в следующей постановке. Щель шириной l, образованная двумя бесконечными параллельными стенками Q_0 и Q_1 с изолирующими свойствами, заполнена вязкой электропроводной несжимаемой жидкостью. Щель вместе с жидкостью вращается как одно

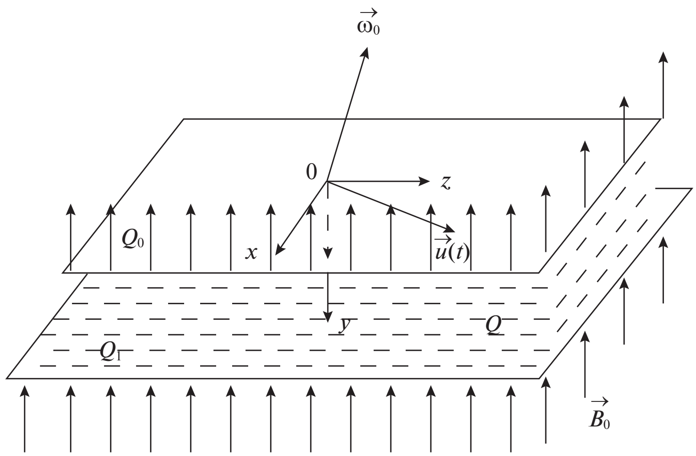

Рис. 1. Схематичная постановка рассматриваемой задачи.

целое с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \text{const}$, причем вектор $\vec{\omega}_0$ образует с этими плоскостями постоянный угол β $\left(0 < \beta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$. Частный случай в отсутствие магнитного поля $\left(\beta = \dfrac{\pi}{2}\right)$ был исследован ранее [5].

Свяжем с пластиной Q_0 декартову систему координат O_{xyz} с ортами $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ так, что плоскость O_{xz} совпадает с плоскостью Q_0, а ось y направлена по нормали к ней внутрь жидкости. В этой системе координат стенки и жидкость покоятся. В момент $t > 0$ стенка Q_0 начинает двигаться в продольном направлении со скоростью $\vec{u}(t)$. В тот же момент времени вносится внешнее однородное магнитное поле с индукцией $B_0 = \text{const}$, направленной по нормали к стенкам. Схематично постановка задачи представлена на рис. 1.

Далее исследуется распространение возмущения в однородной проводящей среде под действием однородного магнитного поля и продольных колебаний стенки.

Движение жидкости в системе O_{xyz}, вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$, в магнито-гидродинамическом приближении (бесконечно проводящая жидкость) описывается уравнениями магнитной гидродинамики, а также граничными и начальными условиями, которые в обычных обозначениях имеют вид

$$\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nabla U + \nu\Delta\vec{v} + \frac{1}{\mu\rho}\operatorname{rot}\vec{B} \times \vec{B}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{B}), \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad \text{при} \quad \vec{r} \in Q$$

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{r},t) &= \vec{u}(t) \quad \text{при} \quad \vec{r} \in Q_0, \quad t > 0 \\ \vec{v}(\vec{r},t) &= 0 \quad \text{при} \quad \vec{r} \in Q_1, \quad t > 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\vec{B} = B_0\vec{e}_y \quad \text{при} \quad \vec{r} \in Q_0, \quad t > 0; \quad \vec{B} = B_0\vec{e}_y \quad \text{при} \quad \vec{r} \in Q_1, \quad t > 0$$

$$\vec{v}(\vec{r},0) = 0 \quad \text{при} \quad t = 0; \quad \vec{B}(\vec{r},0) = 0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

здесь $\vec{r}$ — радиус-вектор относительно полюса O, $\vec{v}$ — скорость жидкости, P — давление, ρ — плотность, ν — кинетическая вязкость, U — потенциал внешних массовых сил, B_0 — магнитная индукция, μ — магнитная проницаемость, Q — объем жидкости.

Решение системы уравнений (1.1) будем искать в виде

$$P = \rho\left(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}\right)^2/2 + \rho U + \rho q(y,t)$$
$$\vec{v} = v_x(y,t)\vec{e}_x + v_z(y,t)\vec{e}_z$$
$$\vec{B} = B_x(y,t)\vec{e}_x + B_0\vec{e}_y + B_z(y,t)\vec{e}_z,$$

где $q(y,t)$ неизвестная функция давления.

Тогда система (1.1) распадается на две подсистемы

$$\begin{gathered}\frac{\partial v_x}{\partial t} + 2\Omega v_z = \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{1}{\mu\rho}B_0\frac{\partial B_x}{\partial y}\\ \frac{\partial v_z}{\partial t} - 2\Omega v_x = \nu\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{1}{\mu\rho}B_0\frac{\partial B_z}{\partial y}\\ \frac{\partial B_x}{\partial t} = B_0\frac{\partial v_x}{\partial y};\quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = B_0\frac{\partial v_z}{\partial y},\quad \Omega = \vec{\omega}_0\cdot\vec{e}_y\end{gathered}\tag{1.2}$$

с граничными и начальными условиями вида

$$\vec{v}(0,t) = \vec{u}(t)\quad \text{при}\quad y = 0,\quad t > 0;\quad \vec{v}(l,t) = 0,\quad t > 0$$
$$\vec{B}(0,t) = B_0\vec{e}_y\quad \text{при}\quad y = 0,\quad t > 0;\quad \vec{B}(l,t) = B_0\vec{e}_y\quad \text{при}\quad y = l,\quad t > 0$$
$$\vec{v}(y,0) = 0,\quad \vec{B}(y,0) = 0\quad \text{при}\quad t = 0,\quad y > 0$$

Уравнение для определения поля давлений записывается как

$$\frac{\partial q}{\partial y} = 2\vec{v}\left(\vec{\omega}_0 \times \vec{e}_y\right) - \frac{1}{\mu\rho}\left(B_x\frac{\partial B_x}{\partial y} + B_z\frac{\partial B_z}{\partial y}\right);\quad 0 \le y \le l \tag{1.3}$$

Введем комплексную структуру

$$\hat{v} = v_x(y,t) + iv_z(y,t);\quad \hat{B} = B_x(y,t) + iB_z(y,t)$$

Тогда система уравнений (1.2) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial\hat{v}}{\partial t} - i2\Omega\hat{v} = \nu\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial y^2} + \frac{B_0}{\mu\rho}\frac{\partial\hat{B}}{\partial y}\\ \frac{\partial\hat{B}}{\partial t} = B_0\frac{\partial\hat{v}}{\partial y}\end{gathered}\tag{1.4}$$

граничные и начальные условия запишутся в виде

$$\hat{v}(0,t) = \hat{u}(t)\quad \text{при}\quad y = 0,\quad \hat{B}(0,t) = B_0\quad \text{при}\quad y = 0$$
$$\hat{v}(l,t) = 0\quad \text{при}\quad y = l,\quad \hat{B}(l,t) = B_0\quad \text{при}\quad y = l$$
$$\hat{v}(y,0) = 0,\quad \hat{B}(y,0) = 0\quad \text{при}\quad t = 0,\quad y > 0$$

Исключая магнитную индукцию из уравнений (1.4), получаем

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} - \left(i2\Omega + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} - \frac{B_0^2}{\mu\rho}\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} = 0 \\ \hat{v}(0,t) = \hat{u}(t) \\ \hat{v}(l,t) = 0, \quad \hat{v}(y,0) = 0\end{gathered} \tag{1.5}$$

Решение уравнения (1.5) запишем с использованием интеграла Дюамеля

$$\hat{v}(y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \hat{u}(t-\tau)\,\hat{v}_1(y,\tau)\,d\tau \tag{1.6}$$

Здесь $v_1(y,t)$ – решение краевой задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial t^2} - \left(i2\Omega + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial \hat{v}_1}{\partial t} - \frac{B_0^2}{\mu\rho}\frac{\partial^2 \hat{v}_1}{\partial y^2} = 0 \\ \hat{v}_1(0,t) = \begin{cases}1, & t > 0\\ 0, & t < 0\end{cases} \quad \hat{v}_1(l,t) = 0\end{gathered} \tag{1.7}$$

В образах Лапласа $\tilde{v}(y,p)$ [6] уравнение (1.7) примет вид

$$\begin{gathered}p^2\tilde{v}_1(y,p) - \left(i2\Omega + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)p\tilde{v}_1(y,p) - \frac{B_0^2}{\mu\rho}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{v}_1(y,p) = 0 \\ \tilde{v}_1(0,p) = \frac{1}{p}, \quad \tilde{v}_1(l,p) = 0\end{gathered} \tag{1.8}$$

имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \tilde{v}_1(y,p)}{\partial y^2} - \frac{p^2 - i2\Omega p}{\nu p + \dfrac{B_0^2}{\mu\rho}}\hat{v}_1(y,p) = 0 \\ \tilde{v}_1(0,p) = \frac{1}{p}; \quad \tilde{v}_1(l,p) = 0\end{gathered} \tag{1.9}$$

Решение уравнения (1.9) имеет вид

$$\tilde{v}_1(y,p) = c_1 e^{\lambda y} + c_2 e^{-\lambda y}, \quad \text{где} \quad \lambda^2 = \frac{p^2 - i2\Omega p}{\nu p + \dfrac{B_0^2}{\mu\rho}}$$

Определяя из граничных условий постоянные интегрирования c_1, c_2, получаем

$$\tilde{v}(y,p) = \frac{1}{p}\frac{\operatorname{sh}(l-y)\lambda}{\operatorname{sh}\lambda l} \tag{1.10}$$

Введем функцию $\Psi = \dfrac{\operatorname{sh}\lambda(l-y)}{\operatorname{sh}\lambda l}$ разложим ее на простые дроби [7]

$$\Psi = 1 - \frac{y}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2}\cdot \sin\pi n\left(1 - \frac{y}{l}\right)$$

Обозначим $\lambda_n = \pi n/l$. Тогда

$$\Psi = 1 - \frac{y}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\lambda_n(l-y)\frac{p^2 - i2\Omega p}{p^2 + p(\lambda_n^2\nu - i2\Omega) + \dfrac{\lambda_n^2 B_0^2}{\mu\rho}} \tag{1.11}$$

Согласно известным из операционного исчисления формулам [6], получаем

$$L^{-1}\left(\frac{p+\alpha_n}{(p+\alpha_n)^2 + \omega_n^2} - \frac{\alpha_n + i2\Omega}{(p+\alpha_n)^2+\omega_n^2}\right) = e^{-\alpha_n t}\left(\cos\omega_n t - \frac{\alpha_n + i2\Omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right), \tag{1.12}$$

где L^{-1} – обратный оператор Лапласа, а

$$\alpha_n = \frac{\lambda_n^2\nu - i2\Omega}{2}, \quad \omega_n^2 = \frac{\lambda_n^2 B_0^2}{\mu\rho} - \frac{(\lambda_n^2\nu - i2\Omega)^2}{4}$$

Подставляя (1.11) в (1.10) с учетом (1.12), в пространстве оригиналов получим решение уравнений (1.7)

$$\hat{v}_1(y,t) = 1 - \frac{y}{l} - \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n y}{\lambda n}e^{-\alpha_n t}\left(\cos\omega_n t - \frac{\alpha_n + i2\Omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right) \tag{1.13}$$

Таким образом, решение задачи (1.5) определяется формулами (1.6), (1.13). Подставляя (1.13) в (1.6), получим искомое поле скоростей вязкой электропроводной жидкости.

$$\hat{v}(y,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \hat{u}(t-\tau)\hat{v}_1(y,\tau)\,d\tau \tag{1.14}$$

Векторы касательных напряжений, действующие со стороны жидкости на верхнюю и нижнюю стенки щели, находятся по формулам

$$\hat{f}_0 = \rho\nu\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \hat{u}(\tau)\frac{\partial\hat{v}_1}{\partial y}(0, t-\tau)\,d\tau$$

$$\left.\frac{\partial\hat{v}_1}{\partial y}\right|_{y=0} = -\frac{1}{l}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha_n t}\left(\cos\omega_n t - \frac{\alpha_n + i2\Omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)\right)$$

$$\hat{f}_l = \rho\nu\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \hat{u}(\tau)\frac{\partial\hat{v}_1}{\partial l}(l, t-\tau)\,d\tau$$

$$\left.\frac{\partial\hat{v}_1}{\partial l}\right|_{y=e} = -\frac{1}{l}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-\alpha_n t}\left(\cos\omega_n t - \frac{\alpha_n + i2\Omega}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)\right)$$

Полученные поле скоростей, вектор магнитной индукции и векторы касательных напряжений, действующие из жидкости на пластины, могут быть использованы для учета силовых воздействий при движении жидкости в каналах различной формы, а также в задачах фильтрации и при моделировании различных физических явлений в движущейся жидкости.

2. Поле скоростей потока, индуцированного движением одной из стенок. Пусть одна из плоскостей Q_0, составляющих границы щели, движется в продольном направлении со скоростью $u(t) = u(0)e^{\lambda t}$, $\lambda = -\alpha + i\omega$.

Рассмотрим “нормальные” колебания вязкой электропроводной жидкости во вращающейся щели, т.е. будем изучать класс движений, в которых все временные факторы зависят от времени посредством множителя $e^{\lambda t}$. Тогда система уравнений (1.4) примет вид

$$\begin{gathered}\lambda\hat{v} - i2\Omega\hat{v} = \nu\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial y^2} + \frac{B_0}{\mu\rho}\frac{\partial\hat{B}}{\partial y} \\ \lambda\hat{B} = B_0\frac{\partial\hat{v}}{\partial y}\end{gathered} \tag{2.1}$$

Граничные и начальные условия:

$$\hat{v}(0,t) = \hat{u}(0) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad \hat{B}(0,t) = B_0 \quad \text{при} \quad y = 0$$

$$\hat{v}(l,t) = 0 \quad \text{при} \quad y = l, \quad \hat{B}(l,t) = B_0 \quad \text{при} \quad y = l$$

$$\hat{v}(y,0) = 0, \quad \hat{B}(y,0) = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad y > 0$$

Исключая из (2.1) магнитную индукцию, для функции $\hat{v}(y)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial y^2} = \frac{\lambda - i2\Omega}{\nu + \dfrac{B_0^2}{\mu\rho\lambda}}\hat{v}, \quad 0 < y < l \tag{2.2}$$

и граничные условия

$$\hat{v}(0) = \hat{u}(0), \quad \hat{u}(l) = 0 \tag{2.3}$$

Общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$\hat{v}(y) = \hat{C}_1 e^{qy} + \hat{C}_2 e^{-qy},$$

где $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2$ – произвольные комплексные постоянные, а

$$q = \sqrt{\frac{\lambda - i2\Omega}{\nu + \dfrac{B_0^2}{\mu\rho\lambda}}}, \tag{2.4}$$

Определяя постоянные интегрирования из граничных условий (2.3), получаем “нормальные” колебания вязкой электропроводной жидкости в постоянном магнитном поле во вращающейся щели

$$\tilde{v}(y,t) = e^{\lambda t}\hat{u}(0)\frac{\operatorname{sh}(l - y)q}{\operatorname{sh} ql} \tag{2.5}$$

Отсюда видно, что в качестве q можно взять любое из двух значений корня (2.4). С помощью (2.5) находим векторы касательных напряжений, действующие со стороны жидкости на верхнюю и нижнюю пластины щели

$$\hat{f}_0 = -\rho\nu q e^{\lambda t}\hat{u}(0)\frac{\operatorname{ch} ql}{\operatorname{sh} ql} \tag{2.6}$$

$$\hat{f}_l = -\rho\nu q e^{\lambda t}\hat{u}(0)\frac{1}{\operatorname{sh} ql} \tag{2.7}$$

Из выражений (2.5)–(2.7) видно, что поле скоростей жидкости и силы трения существенно зависят от комплексного параметра q, связывающего параметры гармонических колебаний пластин и вращения щели.

3. Структура пограничных слоев. Исследуем подробнее выражение (2.5) для поля скоростей. Выражение для частот q представим в виде

$$q = \frac{1}{\delta} + ik, \tag{3.1}$$

где δ — толщина пограничного слоя, k — волновое число.

Рассмотрим

$$\frac{\lambda - i2\Omega}{\nu + \dfrac{B_0^2}{\mu\rho\lambda}} = \frac{-\alpha + i(\omega - 2\Omega)}{\nu - \dfrac{\alpha B_0^2}{\mu\rho(\alpha^2 + \omega^2)} - i\dfrac{\omega B_0^2}{\mu\rho(\alpha^2 + \omega^2)}}$$

Обозначим

$$m = \nu - \frac{\alpha B_0^2}{\mu\rho(\alpha^2 + \omega^2)}; \quad n = -\frac{\omega B_0^2}{\mu\rho(\alpha^2 + \omega^2)}$$

Тогда $m^2 + n^2 = \nu^2 + \dfrac{B_0^2(B_0^2 - 2\nu\alpha\mu\rho)}{\mu^2\rho^2(\alpha^2 + \omega^2)}$

Имеем

$$\frac{\lambda - i2\Omega}{\nu + \dfrac{B_0^2}{\mu\rho\lambda}} = \frac{-\alpha m + n(\omega - 2\Omega) + i(\alpha n + m(\omega - 2\Omega))}{m^2 + n^2}$$

Обозначим

$$C = \frac{-\alpha m + n(\omega - 2\Omega)}{m^2 + n^2}; \quad D = \frac{\alpha n + m(\omega - 2\Omega)}{m^2 + n^2}$$

Рассмотрим

$$q_{1,2} = \sqrt{C + iD}$$

Введем для удобства следующие обозначения:

$$\sqrt{C + iD} = q_{1,2} = \frac{1}{\delta_{1,2}} + ik_{1,2}$$

Тогда величины $\delta_{1,2}$, $k_{1,2}$, имеющие физический смысл толщины пограничного слоя и волнового числа, определены посредством формул

$$\frac{1}{\delta_{1,2}^2} = \frac{\sqrt{C^2 + D^2} + C}{2}; \quad k_{1,2}^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{C^2 + D^2} - C}\right)^{-1} \tag{3.2}$$

Поле скоростей (2.5) представим в виде суперпозиции двух бегущих волн:

$$\hat{v}(y,t) = \hat{A}e^{-i(ky+\omega t)} + \hat{B}e^{i(ky+\omega t)}, \tag{3.3}$$

где

$$\hat{A} = \frac{\exp[-\alpha t - y/\delta]\hat{u}(0)}{2\,\mathrm{sh}\,ql}e^{ql}, \quad \hat{B} = \frac{\exp[-\alpha t + y/\delta]\hat{u}(0)}{2\,\mathrm{sh}\,ql}e^{-ql} \tag{3.4}$$

При этом волновые числа имеют вид

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 + (\omega - 2\Omega)^2}{\nu^2 + \frac{B_0^2(B_0^2 - 2\nu\alpha\mu\rho)}{\mu^2\rho^2(\alpha^2 + \omega^2)}}} + \frac{\alpha\nu + \frac{B_0^2(\omega^2 - \alpha^2 - 2\omega\Omega)}{\mu^2\rho^2(\alpha^2 + \omega^2)}}{\nu^2 + \frac{B_0^2(B_0^2 - 2\nu\alpha\mu\rho)}{\mu^2\rho^2(\alpha^2 + \omega^2)}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.5}$$

$$\delta = \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha^2 + (\omega - 2\Omega)^2}{\nu^2 + \frac{B_0^2(B_0^2 - 2\nu\alpha\mu\rho)}{\mu^2\rho^2(\alpha^2 + \omega^2)}}} - \frac{\alpha\nu + \frac{B_0^2(\omega^2 - \alpha^2 - 2\omega\Omega)}{\mu^2\rho^2(\alpha^2 + \omega^2)}}{\nu^2 + \frac{B_0^2(B_0^2 - 2\nu\alpha\mu\rho)}{\mu^2\rho^2(\alpha^2 + \omega^2)}}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.6}$$

Эти волны распространяются по оси y навстречу друг другу с одинаковой фазовой скоростью и зависят от частоты. Это означает, что поток вязкой электропроводной жидкости представляет собой диспергирующую среду.

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k} \tag{3.7}$$

Групповые скорости этих волн $v_{\text{гр}} = \dfrac{d\omega}{dk} = \dfrac{1}{dk/d\omega}$ также совпадают. Они зависят от коэффициента затухания, параметров движения стенок, скорости вращения системы, магнитной индукции и параметров жидкости.

Амплитуды этих волн зависят от глубины щели, величины проекции угловой скорости на ось y, параметров движения стенки, магнитной индукции и параметров жидкости.

Выберем индукцию поля $B_0^2 = 2\nu\alpha\mu\rho$. Рассмотрим случай резонанса $\omega = 2\Omega$, тогда

$$k = \sqrt{\frac{\alpha}{\nu}}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4\Omega^2}}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}\sqrt{1 + \frac{4\Omega^2}{\alpha^2}} \tag{3.8}$$

В этом резонансном случае волновое число и величина пограничного слоя зависят только от вязкости жидкости, коэффициента затухания и проекции угловой скорости вращения щели на ось Oy. Волновое число и величина пограничного слоя не зависят от магнитной проницаемости и электропроводности жидкости.

При $\alpha = 0$ волновое число $k = 0$ и движение жидкости сводится к колебательному процессу. Пограничный слой при этом заполняет всю ширину щели. В этом случае говорят, что погранслой отсутствует.

Заключение. Проведен анализ задачи неустановившегося течения вязкой электропроводной несжимаемой жидкости в плоско-параллельной конфигурации. Найдены точные решения трехмерных нестационарных уравнений магнитной гидродинамики. При этом никаких ограничений на характер движения пластины не накладывается. Определены поле скоростей в потоке и векторы касательных напряжений, действующие из жидкости на стенки щели. Для случая "нормальных" колебаний одной из стенок рассмотрен случай резонанса и исследована структура пограничных слоев, примыкающих к стенкам. Математическая процедура интегрирования системы дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи может быть использована при исследовании более сложных задач. Кроме того, полученные результаты могут быть использованы для учета силовых воздействий при движении жидкости в каналах различной формы, а также в задачах фильтрации и при моделировании различных физических явлений в движущейся жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Слезкин Н.А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 521 с.
2. *Гурченков А.А., Яламов Ю.И.* Нестационарный поток на пористой пластине при наличии вдува (отсоса) среды // ПМТФ. 1980. № 4. С. 66–69.
3. *Гурченков А.А.* Неустановившееся движение вязкой жидкости между вращающимися параллельными стенками // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 251–255.
4. *Холодова Е.С.* Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук, С.-Петербургский государственный университет, С.-Петербург. 2019, 451 с.
5. *Thornley Cl.* On Stokes and Rayleigh layers in a rotating system // Quart J. Mech. Appl. Math. V. 21. № 4. P. 455–462.
6. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды.М.: Наука, 1981. 632 с.

Unsteady Motion of a Viscous Electrically Conductive Fluid between Rotating Parallel Walls in the Presence of a Transverse Magnetic Field

A. A. Gurchenkov[a,b,#]

[a] *Federal Research Center "Computer Science and Control" of the RAS, Moscow, Russia*
[b] *National Research University "MAI", Moscow, Russia*
[#] *e-mail: challenge2005@mail.ru*

We study the motion of a viscous electrically conductive incompressible fluid, which initially rotates as a solid with a constant angular velocity together with parallel walls bounding it, under the influence of suddenly beginning longitudinal vibrations of one of the walls and a suddenly switched on magnetic field applied to one of the walls. The walls make an arbitrary angle with the axis of rotation. The magnetic field acts normally to the walls. In the general case, the solution is presented as a series. The vectors of tangential stresses acting from the liquid on the walls of the slit are presented. A number of particular cases of wall motion are considered. Based on the results obtained, the individual structures of the boundary layers near the walls are investigated.

Keywords: viscous incompressible electrically conducting fluid, magnetic field. analytical solution

REFERENCES

1. *Slezkin N.A.* Dynamics of a Viscous Incompressible Fluid. M.: Gostekhizdat, 1955. 521 p. (in Russian)
2. *Gurchenkov A.A., Yalamov Yu.I.* Unsteady flow on porous plate in the presence of injection (suction) of the medium // PMTF, 1980, no. 4, pp. 66–69. (in Russian)
3. *Gurchenkov A.A.* Unsteady motion of a viscous fluid between rotating parallel walls // PMM, 2002, vol. 66, no. 2, pp. 251–255. (in Russian)
4. *Kholodova E.S.* Thesis for the degree of Doctor of Phys.-Math.Sciences, St. Petersburg State Univ., St. Petersburg. 2019, 451 p. (in Russian)
5. *Thornley Cl.* On Stokes and Rayleigh layers in a rotating system // Quart J. Mech. Appl. Math., vol. 21, no. 4, pp, 455–462.
6. *Dech G.* Guide to the Practical Application of the Laplace Transform and z-Transform. M.: Nauka, 1971. 288 p. (in Russian)
7. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integrals and Series, Moscow: Nauka, 1981. 632 p. (in Russian)