ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2019, том 83, № 5–6, с. 704–733

УДК 629.7

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДУАЛЬНЫХ КВАТЕРНИОНОВ

Ю. Н. Челноков[1,*]

[1] *Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов, Россия*
**e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Поступила в редакцию 11.04.2019 г.
После доработки 11.06.2019 г.
Принята к публикации 03.10.2019 г.

Разработан в нелинейной динамической постановке с использованием дуальных кватернионов (бикватернионов Клиффорда) новый метод аналитического построения управления пространственным движением твердого тела (в частности, космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело). Управление обеспечивает асимптотическую устойчивость в целом любого выбранного программного движения в инерциальной системе координат и желаемую динамику управляемого движения тела. Для построения законов управления предложены новые бикватернионные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела, в которых использованы ненормированные бикватернионы конечных перемещений, бикватернионы угловых и линейных скоростей и ускорений тела с ненулевыми дуальными скалярными частями; концепция решения обратных задач динамики, принцип управления с обратной связью и подход, основанный на приведении уравнений возмущенного движения тела к линейным стационарным дифференциальным формам выбранной структуры, инвариантным относительно любого выбранного программного движения, за счет соответствующего выбора дуальных нелинейных обратных связей в предложенных бикватернионных законах управления. Построены аналитические решения бикватернионных дифференциальных уравнений, описывающие динамику процесса управления пространственным движением тела с использованием предлагаемых бикватернионных законов управления. Проанализированы свойства и закономерности такого управления.

Ключевые слова: твердое тело, пространственное движение, уравнения возмущенного движения, программное и стабилизирующее управления, законы управления, бикватернион, дуальный кватернион

DOI: 10.1134/S0032823519050035

Введение. Кватернионы поворотов Гамильтона, компонентами которых являются широко известные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), и бикватернионы конечных перемещений Клиффорда (дуальные кватернионы), компонентами которых являются дуальные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), используются для описания вращательного (углового) и поступательного движений твердого тела. Именно использование вещественных и дуальных параметров Эйлера, число которых равно четырем, в качестве кинематических параметров движения тела привело к широкому использованию в механике четырехмерных гиперкомплексных чисел (переменных): кватернионов Гамильтона и бикватернионов Клиффорда.

С математической точки зрения кватернионный и бикватернионный формализмы, используемые в статье, обладают следующими достоинствами: геометрической наглядностью векторного и винтового исчислений с одной стороны, а с другой — большей общностью и гибкостью, чем векторное и винтовое исчисления. Так, в кватернионном и бикватернионном исчислениях, в отличие от векторного и винтового, операция деления определена, причем она легко алгоритмизируема, а операция умножения обладает свойством ассоциативности. Кроме этого, в кватернионных и бикватернионных уравнениях, в отличие от векторных и винтовых, могут непосредственно использоваться векторные и винтовые величины, определенные своими проекциями не в одной, а в разных системах координат. Все это вместе делает кватернионный и бикватернионный аппараты более мощными и гибкими средствами решения многих задач механики и управления движением, чем векторный и винтовой аппараты.

Кватернионные и бикватернионные кинематические уравнения в вещественных и дуальных параметрах Эйлера (Родрига—Гамильтона), входящие в состав исходных используемых в статье уравнений движения твердого тела и связывающие кватернион и бикватернион конечного перемещения тела, а также их первые призводные с вектором угловой скорости и кинематическим винтом в отображениях на связанный с телом базис, являются линейными (когда угловая и линейная скорости являются известными функциями времени) и не вырождаются ни при каком положении твердого тела в пространстве, в отличие от нелинейных кинематических уравнений в вещественных и дуальных углах Эйлера—Крылова, содержащих особые точки типа сингулярности (деления на ноль), появляющиеся при определенных положениях тела в пространстве. Такими же свойствами линейности и регулярности обладают кинематические уравнения движения твердого тела в вещественных и дуальных направляющих косинусах. Однако число параметров Эйлера равно четырем, поэтому они имеют одно уравнение связи, в отличие от шести уравнений связи для девяти направляющих косинусов (отметим, что кинематические уравнения в направляющих косинусах имеют размерность, равную девяти, и называются, как известно, уравнениями Пуассона).

Применение параметров Эйлера позволяет исключить из рассмотрения операции с тригонометрическими функциями, что повышает эффективность аналитического и численного (особенно на бортовых компьютерах) решения задач механики и управления движением. Кватернионные и бикватернионные уравнения механики, использующие для описания движения вещественные и дуальные параметры Эйлера, имеют симметричные, компактные, а в ряде случаев и линейные или близкие к линейным структуры. Кроме того, параметры Эйлера (вещественные и дуальные), а с ними кватернионы и бикватернионы, позволяют наиболее эффективно решать многие вопросы теории конечных перемещений твердого тела, устойчивости и управления его движением. Отметим, что в настоящее время вещественные параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона) и кватернионы широко используются для решения геометрических и кинематических задач механики твердого тела и механических систем, а также задач управления их вращательным движением в кинематической и динамической постановках. Бикватернионы пока что такого широкого распространения не получили, хотя в последние годы за рубежом опубликовано большое количество работ по применению бикватернионов (дуальных кватернионов) для управления движением твердого тела, космического аппарата, а также роботов-манипуляторов (термин “бикватернион” был введен Клиффордом и широко использовался А.П. Котельниковым, на западе вместо него используется термин “дуальный кватернион”). Также отметим, что в последнее время бикватернионы нашли широкое применение в теории и алгоритмах инерциальной навигации, поэтому реализация бикватернионных законов управления движением может быть эффективно осуществлена с использованием этих алгоритмов.

Использование кватернионов поворотов Гамильтона в теории и практике управления вращательным движением движущихся объектов в настоящее время стало общепринятым, поскольку они, как уже отмечалось, являются наиболее простым и удобным средством математического описания вращательного движения твердого тела (например, космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело). Применение дуальных кватернионов (параболических бикватернионов Клиффорда [1–5]) в задачах управления пространственным движением твердого тела (управления винтовым движением тела, эквивалентным композиции его углового (вращательного) и поступательного (траекторного) движений) было начато в кинематических задачах управления движением тела. В этих задачах управления в качестве математических моделей движения твердого тела используются бикватернионные кинематические уравнения пространственного движения тела, в которых в качестве фазовой переменной выступает бикватернион конечного перемещения Клиффорда, а в качестве управления – кинематический винт тела. Цель кинематического управления – перевод тела из его заданного начального положения (углового и линейного) в требуемое конечное положение за счет сообщения телу требуемых угловой и линейной скоростей. Такая задача решается в классе задач построения программных (в частности, оптимальных) траекторий движения и программных управлений движением тела или в классе задач построения нелинейных стабилизирующих (в частности, оптимальных стабилизирующих) управлений движением тела по принципу обратной связи.

Кинематическая задача построения оптимального в смысле быстродействия винтового перемещения свободного твердого тела из заданного начального положения в требуемое конечное в бикватернионной постановке изучалась Н.А. Стрелковой и В.В. Маланиным [6, 7]. Для получения аналитического решения задачи ими было использовано бикватернионное кинематическое уравнение винтового движения свободного твердого тела, предложенное автором статьи [8, 9] (см. также [4]).

Кинематическое управление движением свободного твердого тела рассматривали с использованием дуальных кватернионов Dapeng Han, Qing Wei и Zexiang Li [10]. Введенное ими логарифмическое представление дуального кватерниона использовано для построения кинематического логарифмического закона управления движением свободного твердого тела по принципу обратной связи. Работы [11] и [12] также посвящены решению кинематических задач управления движением механических систем и свободного твердого тела с использованием дуальных кватернионов и законов управления, построенных с использованием отрицательной бикватернионной логарифмической обратной связи. E. Ozgur, Y. Mezouar [13] рассмотрели управление движением руки робота с использованием дуальных кватернионов и кинематического бикватернионного стабилизирующего закона управления, предложенного ранее [10].

Автором статьи рассмотрена [14] в бикватернионной постановке кинематическая задача построения с использованием принципа обратной связи кинематического винта скоростей, сообщение которого свободному твердому телу обеспечивает его асимптотически устойчивый перевод из произвольного начального положения на любую выбранную программную траекторию винтового движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение по этой траектории с заданным (программным) кинематическим винтом скоростей. Стабилизирующее кинематическое управление формируется в виде нелинейной бикватернионной функции компонент бикватерниона ошибки по положению твердого тела (угловому и линейному) так, чтобы кинематические нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного движения свободного твердого тела, замкнутые построенными законами управления, принимали эталонный вид, инвариантный относительно любого выбранного программного движения: вид дуальных линейных стационарных дифференциальных уравнений первого или второго порядка относительно бикватернионной переменной, характеризующей конечные ошибки по угловому и линейному положению твердого тела. Постоянные коэффициенты (дуальные скалярные или матричные, или бикватернионные) этих (эталонных) уравнений имеют смысл коэффициентов усиления нелинейных обратных связей по положению тела, реализуемых системой управления движением тела, а сами уравнения описывают эталонную "динамику" переходных процессов. Это позволяет аналитически точно определять коэффициенты усиления нелинейных обратных связей, исходя из желаемых качественных и количественных характеристик переходного процесса.

Было получено [15] явное аналитическое решение в кинематической бикватернионной постановке задачи оптимальной (в смысле интегрального квадратичного функционала качества) нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела.

В последнее время дуальные кватернионы стали широко использоваться для решения задач управления пространственным движением твердого тела, в частности, космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело, в динамической постановке [16–33]. Уравнения динамики твердого тела записываются в бикватернионной форме, объединяющей динамические уравнения вращательного и поступательного движений твердого тела, и дополняются бикватернионным кинематическим уравнением. Для построения законов управления по принципу обратной связи часто используется один из современных методов теории управления – управление с прогнозирующей моделью (Model Predictive Control или MPC) [34]. MPC позволяет получить квазиоптимальное решение для нелинейных объектов при наличии ограничений на управление и фазовых ограничений, но имеет и ряд недостатков, среди которых – неаналитичность, достаточно высокое потребление вычислительных ресурсов, поскольку этот метод требует численного интегрирования дифференциальных уравнений движения. Для синтеза законов управления по принципу обратной связи также используется метод “бэкстеппинг” (“backstepping”). Это – рекурсивная процедура, в которой совмещены задачи нахождения функции Ляпунова и соответствующего ей закона управления. Метод был предложен П. Кокотовичем в 1990 году. В соответствии с этим методом задача построения закона управления для всей системы разбивается на последовательность соответствующих подзадач для систем меньшего порядка. Алгоритм бэкстеппинга заключается в том, чтобы сделать каждый интегратор объекта устойчивым путем добавления обратной связи, вычисленной по этому алгоритму, и представляет собой набор действий, выполняемых для каждого дифференциального уравнения математической модели объекта. Для задачи управления пространственным движением твердого тела на первом этапе рассматривается кинематическая задача управления движением тела, описываемая бикватернионным кинематическим уравнением. На этом этапе кинематический бикватернионный стабилизирующий закон управления часто берется в виде логарифмической обратной связи, т.е. в виде, использующем логарифмическое представление дуального кватерниона пространственного перемещения тела.

Многие известные решения задачи управления угловым движением твердого тела (космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело) с использованием кватернионов ориентируются на реализацию конкретно выбранного программного углового движения тела, например, на перевод тела из некоторого начального углового положения в другое конечное положение при нулевых угловых скоростях тела в этих положениях, или на реализацию плоского эйлерова поворота тела и других конкретных движений. Стабилизирующие управления угловым движением строятся по принципу обратной связи в виде линейных или нелинейных функций компонент кватерниона ошибки по угловому положению и проекций вектора ошибки по угловой скорости тела, исходя из соображений простоты, накопленного опыта, геометрических и других соображений. Уравнения возмущенного движения тела, замкнутые такими управлениями, получаются нелинейными, а при ненулевых программных угловых скоростях и нестационарными. Устойчивость таких предлагаемых законов управления доказывается с помощью функций Ляпунова. Однако при этом остается открытой проблема обеспечения желаемых динамических характеристик управляемого углового движения тела, поскольку точное нахождение необходимых коэффициентов усиления обратных связей, обепечивающих эти характеристики, осуществляемое на основе уравнений возмущенного движения, невозможно в силу нелинейности и сложности этих уравнений. Аналогичные трудности существуют и при решении задачи управления линейным (поступательным) движением твердого тела и более общей задачи управления пространственным (угловым и линейным) движением тела с использованием бикватернионов. Поэтому актуальны исследования по преодолению этих трудностей.

Автором статьи рассматривалась [35–39] задача аналитического построения по принципу обратной связи (с использованием кватернионов) асимптотически устойчивых в большом или в целом стабилизирующих управлений угловым движением твердого тела для его любого выбранного программного углового движения. В основу решения задачи положен подход, использующий приведение нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений (ДУ) возмущенного углового движения тела к эталонным линейным стационарным дифференциальным формам, инвариантным относительно любого выбранного программного движения, за счет использования соответствующих обратных связей в предложенных законах управления. Такой подход позволяет обойти вышеуказанные трудности аналитического синтеза стабилизирующих управлений угловым движением тела, проводимого на основе нелинейных уравнений возмущенного движения.

В настоящей работе решается с использованием подходов, предложенных ранее [35–39] для синтеза стабилизирующих управлений угловым движением твердого тела по принципу обратной связи, более общая задача синтеза стабилизирующих управлений пространственным движением твердого тела, обеспечивающих асимптотическую устойчивость в целом любого выбранного программного пространственного движения тела и желаемую динамику процесса управления. Отметим, что предлагаемые законы стабилизирующих управлений могут быть использованы для решения задачи перевода тела из его произвольного пространственного начального состояния (по положению и скорости) в требуемое состояние без использования программных управлениий и траекторий движения тела в силу обеспечения (при использовании этих законов) асимптотической устойчивости в целом любого пространственного состояния тела (частный случай этой задачи – перевод тела из его произвольного пространственного начального положения покоя в требуемое положение покоя).

Отметим также, что в задачах управления движением традиционно используются нормированные бикватернионы конечных перемещений тела и трехмерные винты скоростей и ускорений пространственного движения тела (бикватернионы скоростей и ускорений с нулевыми скалярными частями). Однако, как показали наши исследования, законы формирования стабилизирующих управлений пространственным движением твердого тела по принципу обратной связи, полученные с помощью приведения бикватернионных нелинейных нестационарных ДУ возмущенного пространственного движения тела в указанных переменных к дуальным линейным стационарным дифференциальным формам (за счет соответствующего выбора дуальных нелинейных обратных связей в законах управления), имеют особую точку $\varphi = 180°$, в которой эти законы вырождаются (φ – эйлеров угол поворота тела в его возмущенном угловом движении). В этой точке дуальные скалярные величины, фигурирующие в знаменателях полученных законов управления, становятся равными нулю. Поэтому такого рода законы стабилизирующих управлений обеспечивают (при соответствующем выборе постоянных коэффициентов усиления дуальных нелинейных обратных связей) асимптотическую устойчивость любого выбранного пространственного движения тела в большом, но не в целом.

Регулярные в целом (не содержащие особых точек) законы управления могут быть получены в нелинейной динамической постановке, как будет показано ниже, если в рамках предлагаемого подхода к синтезу стабилизирующих управлений использовать ненормированный бикватернион положения тела и “четырехмерные” скорости и ускорения пространственного движения тела (бикватернионы скоростей и ускорений с ненулевыми дуальными скалярными частями).

В статье рассматриваются два вида управляемого пространственного движения твердого тела: программное движение тела относительно инерциальной системы координат и движение тела относительно программной (неинерциальной) системы координат (относительное движение). В статье излагаются бикватернионные дифференциальные уравнения и того и другого вида движения тела. Использование бикватернионов позволяет записывать и те и другие уравнения в компактном, удобном для решения задачи управления виде. Основное внимание в статье уделяется бикватернионным дифференциальным уравнениям возмущенного движения тела и синтезу с их использованием стабилизирующих управлений движением твердого тела (т.е. управлений движением твердого тела по принципу обратной связи в неинерциальной системе координат).

Предлагается аналитический метод построения законов управления пространственным движением твердого тела в нелинейной бикватернионной постановке и новые кватернионные и бикватернионные регулярные законы управления, обеспечивающие асимптотически устойчивый в целом перевод твердого тела, имеющего произвольные начальные угловую и линейную скорости, из его произвольного заранее незаданного начального углового и линейного положений на любую выбранную программную траекторию пространственного (углового и линейного) движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение тела по этой траектории с необходимыми (программными) угловыми и линейными скоростями и ускорениями. Переходный процесс управления при этом имеет желаемые качественные и количественные характеристики.

Отличительные черты предлагаемого метода — его аналитичность (возможность аналитического решения задачи синтеза управлений в нелинейной пространственной динамической постановке) и возможность обоснованного выбора необходимых дуальных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей в законах управления, исходя из требуемой (желаемой) динамики процесса управления движением.

1. Уравнения движения. Рассмотрим свободное твердое тело или несвободное твердое тело, способное совершать относительно основной системы координат мгновенное винтовое движение, эквивалентное композиции поступательного движения тела вместе с произвольно выбранной точкой тела и вращения тела вокруг этой точки. Тело находится под действием произвольного главного вектора и главного момента внешних сил, включающих в себя вектор управляющей силы и вектор управляющего момента. Управляемое пространственное движение тела будем рассматривать относительно инерциальной системы координат $O_1\xi_1\xi_2\xi_3$ (ИСК ξ) (ее начало O_1 находится в центре масс Земли, а координатные оси направлены на удаленные звезды), а также относительно опорной (программной) системы координат $O_2Z_1Z_2Z_3$ (ПСК Z), задающей в инерциальном пространстве программное пространственное движение тела. С телом жестко свяжем систему координат $CX_1X_2X_3$ (ССК X) с началом в центре масс тела C.

Введем обозначения: $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ — радиус-вектор и вектор скорости центра масс тела в ИСК, $\boldsymbol{\lambda}$ — нормированный кватернион ориентации тела (с нормой, равной единице) в этой системе координат, компонентами которого являются параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона) λ_j $(j = \overline{0,3})$, одинаковые в базисах ξ и X (эти параметры могут быть выражены через углы Эйлера—Крылова), $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — векторы абсолютной угловой скорости и абсолютного углового ускорения тела, $\mathbf{F}_c$ и $\mathbf{M}_c$ — векторы управляющей силы и управляющего момента, приложенных к телу, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\mathbf{M} = \mathbf{M}(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega})$ — главный вектор других внешних сил, действующих на тело (сил гравитации, сопротивления движению и других сил взаимодействия тела с внешней средой), и главный момент этих сил, вычисленный относительно центра масс тела, полагаемые известными функциями времени t и переменных $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$.

Исходные ДУ движения тела, записанные в ССК X, имеют вид

$$m[\dot{\mathbf{v}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{v}_x] = \mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x) + \mathbf{F}_{cx}, \quad \dot{\mathbf{r}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{r}_x = \mathbf{v}_x \tag{1.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x = \mathbf{J}^{-1}[\mathbf{M}_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_x) - \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_x + \mathbf{M}_{cx}] \tag{1.2}$$

$$2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}_v = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \mathbf{i}_k, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\lambda}_0 + \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = \dot{\lambda}_0 + \sum_{k=1}^{3} \dot{\lambda}_k \mathbf{i}_k \tag{1.3}$$

$$\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_{22} & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь в уравнениях (1.1) и (1.2) $\mathbf{r}_x$, $\mathbf{v}_x$, $\boldsymbol{\omega}_x$, $\boldsymbol{\varepsilon}_x$, $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{F}_{cx}$, $\mathbf{M}_{cx}$ – векторы-столбцы размерами 3×1 или, далее, кватернионы с нулевыми скалярными частями, составленные из проекций x_k, v_k, ω_k, ε_k, F_k, M_k, F_{ck}, M_{ck} $(k = 1, 2, 3)$ векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{F_c}$, $\mathbf{M_c}$ на оси ССК X; m – масса тела, $\mathbf{J}$ – постоянная матрица инерции тела; $\mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)$ – кососимметрическая матрица угловых скоростей тела, сопоставляемая вектору ω; $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ – орты гиперкомплексного пространства (векторные мнимые единицы Гамильтона); $\mathbf{a}_y$ – отображение вектора $\mathbf{a}$ на базис $Y(Y = \xi, X, Z)$, определяемое как кватернион $\mathbf{a}_y = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3$, компоненты которого – проекции a_k вектора $\mathbf{a}$ на базис Y; верхняя точка – производная по времени t (при вычислении производной от кватерниона орты $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ полагаются неизменными), знак $\circ$ – кватернионное умножение.

Первое матричное уравнение (1.1) и матричное уравнение (1.2) – динамические, а второе матричное уравнение (1.1) и кватернионное уравнение (1.3) – кинематические уравнения пространственного движения тела, представляющего собой композицию поступательного (траекторного) и углового (вращательного) движений. Они образуют систему нелинейных, нестационарных ДУ 13-го порядка относительно переменных x_k, v_k и λ_j, ω_k. В случае, когда с телом жестко связывается система координат $OX_1X_2X_3(X)$ с началом в другой произвольно выбранной точке O тела, в состав главного вектора $\mathbf{F}$ и главного момента $\mathbf{M}$ внешних сил включаются переносная сила инерции и ее момент относительно точки O тела.

2. Задачи управления. Поставим следующую задачу: построить управления

$$\mathbf{F}_{cx} = \mathbf{F}_{cx}(\mathbf{r}_z^*(t), \mathbf{v}_z^*(t), \dot{\mathbf{v}}_z^*, \boldsymbol{\omega}_z^*(t), \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x, \boldsymbol{\omega}_x), \quad \mathbf{M}_{cx} = \mathbf{M}_{cx}(\boldsymbol{\lambda}^*(t), \boldsymbol{\omega}_z^*(t), \boldsymbol{\varepsilon}_z^*(t), \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_x),$$

обеспечивающие асимптотически устойчивый в целом перевод твердого тела из произвольного, заранее незаданного начального состояния $\mathbf{r}_x(t_0)$, $\mathbf{v}_x(t_0)$, $\boldsymbol{\lambda}(t_0)$, $\boldsymbol{\omega}_x(t_0)$ на любую выбранную программную траекторию

$$\mathbf{r}_z^* = \mathbf{r}_z^*(t), \quad \mathbf{v}_z^* = \mathbf{v}_z^*(t), \quad \boldsymbol{\lambda}^* = \boldsymbol{\lambda}^*(t), \quad \boldsymbol{\omega}_z^* = \boldsymbol{\omega}_z^*(t)$$

и дальнейшее асимптотически устойчивое движение тела по этой траектории. При этом переходный процесс (возмущенное движение тела) должен иметь желаемые качественные и количественные характеристики.

Здесь $\mathbf{r}_z^*$ и $\mathbf{v}_z^*$ – отображения программных радиуса-вектора $\mathbf{r}^*$ и вектора $\mathbf{v}^*$ скорости центра масс тела в ИСК на оси ПСК Z, $\boldsymbol{\lambda}^*$ – кватернион программной ориентации тела в ИСК, компоненты которого — параметры Эйлера λ_j^* ($j = \overline{0,3}$), одинаковые в базисах ξ и Z, $\boldsymbol{\omega}_z^*$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_z^*$ — отображения векторов программных абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}^*$ и абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ тела на оси ПСК Z.

Поставленную задачу будем решать, используя концепцию решения обратных задач динамики и принцип управления с обратной связью. Законы формирования управляющей силы и управляющего момента в соответствии с концепцией решения обратных задач динамики получаются на основе уравнений (1.1), (1.2) и имеют вид

$$\mathbf{F}_{cx} = m[\dot{\mathbf{v}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{v}_x] - \mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{M}_{cx} = \mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_x - \mathbf{M}_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_x) \tag{2.2}$$

Вторые и третьи слагаемые в этих законах управления носят компенсационный характер и обеспечивают, в том числе, компенсацию действующих внешних сил неуправляющего характера и их моментов. Они могут быть сформированы по известному вектору $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega})$ текущего состояния тела, вырабатываемому, например, бесплатформенной инерциальной навигационной системой. Входящие в первые слагаемые законов управления (2.1) и (2.2) требуемая составляющая $\dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{w}_x$ абсолютного линейного ускорения и требуемое абсолютное угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ могут быть построены на основе матричных (2.3) и кватернионных (2.4) уравнений:

$$\dot{\mathbf{v}}_x = \mathbf{w}_x, \quad \dot{\mathbf{r}}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{r}_x = \mathbf{v}_x \tag{2.3}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x, \quad 2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_x, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_x = \varepsilon_1\mathbf{i}_1 + \varepsilon_2\mathbf{i}_2 + \varepsilon_3\mathbf{i}_3 \tag{2.4}$$

получающихся из уравнений (1.1)—(1.3).

Фигурирующие в этих уравнениях величины $\mathbf{w}_x$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ рассматриваются нами в дальнейшем как новые управления.

Таким образом, задача построения управляющей силы $\mathbf{F}_{cx}$ и управляющего момента $\mathbf{M}_{cx}$ в рассматриваемой постановке сводится к синтезу требуемой составляющей $\mathbf{w}_x$ абсолютного линейного ускорения и требуемого абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_x$, входящих в качестве управлений в уравнения (2.3) и (2.4). Задача синтеза управлений $\mathbf{w}_x$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ носит общий характер для всех движущихся объектов, рассматриваемых как твердое тело, так как уравнения (2.3) и (2.4) справедливы для любого такого движущегося объекта. Специфика объекта (его массово-инерционные и другие характеристики, действующие внешние возмущающие силы и их моменты) учитываются при построении управляющей силы $\mathbf{F}_{cx}$ и управляющего момента $\mathbf{M}_{cx}$ на основе конечных соотношений (2.1) и (2.2).

Введем в рассмотрение кинематический винт $\mathbf{U}$ тела, отображение которого $\mathbf{U}_x$ на связанный с телом базис X определяется бикватернионом

$$\mathbf{U}_x = U_1\mathbf{i}_1 + U_2\mathbf{i}_2 + U_3\mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\omega}_x + s\mathbf{v}_x,$$

где

$$\boldsymbol{\omega}_x = \omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{v}_x = v_1\mathbf{i}_1 + v_2\mathbf{i}_2 + v_3\mathbf{i}_3,$$

s — символ (комплексность) Клиффорда, обладающий свойством $s^2 = 0$, $U_k = \omega_k + sv_k$ ($k = 1, 2, 3$) — дуальные ортогональные проекции кинематического винта $\mathbf{U}$ на базис X.

Тогда векторные (2.3) и кватернионные (2.4) ДУ можно заменить двумя бикватернионными ДУ

$$\dot{\mathbf{U}}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x = \mathbf{H}_x, \quad 2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \mathbf{U}_x$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \varepsilon_1\mathbf{i}_1 + \varepsilon_2\mathbf{i}_2 + \varepsilon_3\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{w}_x = w_1\mathbf{i}_1 + w_2\mathbf{i}_2 + w_3\mathbf{i}_3 \tag{2.5}$$
$$\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_0 + \Lambda_1\mathbf{i}_1 + \Lambda_2\mathbf{i}_2 + \Lambda_3\mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0, \quad \Lambda_j = \lambda_j + s\lambda_j^0, \quad j = 0,1,2,3,$$

в которых фазовыми переменными являются бикватернион $\mathbf{U}_x$ (отображение кинематического винта $\mathbf{U}$ тела на связанный базис X) и нормированный бикватернион $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0$ конечного перемещения тела в инерциальном пространстве, главная часть которого (нормированный кватернион $\boldsymbol{\lambda}$) характеризует ориентацию тела в ИСК, а моментная (кватернион $\boldsymbol{\lambda}^0$) – местоположение тела в этой системе координат (декартовые координаты ξ_k (k = 1, 2, 3) центра масс тела в этой системе координат), а дуальным управлением – бикватернион $\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x$, являющийся дуальной композицией требуемого абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ и требуемой составляющей $\mathbf{w}_x = \dot{\mathbf{v}}_x$ абсолютного линейного ускорения тела.

Декартовые координаты ξ_k центра масс тела (т.е. проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}$ центра масс тела на оси ИСК ξ) и проекции x_k этого вектора на оси ССК X находятся через компоненты кватернионов $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\lambda}^0$ по формулам [4, 8, 9]

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1\mathbf{i}_1 + \xi_2\mathbf{i}_2 + \xi_3\mathbf{i}_3 = 2\boldsymbol{\lambda}^0 \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3 = 2\bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0$$

Здесь и далее верхняя черта – символ кватернионного или бикватернионного сопряжения.

Управления $\mathbf{w}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ складываются из программного и стабилизирующего управлений. В соответствии с этим эти управления будем формировать в ССК X по формулам

$$\mathbf{w}_x = \mathbf{w}_z^*(t) + \delta\mathbf{w}_x = \sum_{k=1}^{3}(w_k^*(t) + \delta w_k)\mathbf{i}_k \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_z^*(t) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x = \sum_{k=1}^{3}(\varepsilon_k^*(t) + \delta\varepsilon_k)\mathbf{i}_k \tag{2.7}$$

или по формулам

$$\mathbf{w}_x = \mathbf{w}_x^*(t, \mathbf{v}_x) + \Delta\mathbf{w}_x = \bar{\mathbf{v}}_x \circ \mathbf{w}_z^*(t) \circ \mathbf{v}_x + \sum_{k=1}^{3}\Delta w_k\mathbf{i}_k \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x^*(t, \mathbf{v}_x) + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x = \bar{\mathbf{v}}_x \circ \boldsymbol{\varepsilon}_z^*(t) \circ \mathbf{v}_x + \sum_{k=1}^{3}\Delta\varepsilon_k\mathbf{i}_k \tag{2.9}$$

Здесь w_k^* и ε_k^* – проекции составляющей $\mathbf{w}^*$ абсолютного программного линейного ускорения и абсолютного программного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ тела на оси ПСК Z, δw_k и $\delta\varepsilon_k$ (или Δw_k и $\Delta\varepsilon_k$) – проекции составляющей $\delta\mathbf{w}$ (или $\Delta\mathbf{w}$) абсолютного стабилизирующего линейного ускорения и абсолютного стабилизирующего углового ускорения $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ (или $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$) тела на оси ССК X; $\mathbf{v}_x$ – собственный нормированный кватернион ошибки ориентации тела (определенный своими компонетами в связанном базисе X), характеризующий отклонение действительной ориентации тела от его программной ориентации и определяемый формулой

$$\mathbf{v}_x = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) \circ \boldsymbol{\lambda},$$

в которой $\boldsymbol{\lambda}^*$ – нормированный кватернион программной ориентации тела в ИСК.

Нормированный бикватернион $\mathbf{\Lambda}^*$ (его компоненты Λ_j^* одинаковы в базисах ξ и Z), характеризующий угловое и линейное программные движения тела в ИСК, и бикватернионы $\mathbf{U}_z^*$ и $\mathbf{H}_z^*$ программных угловых и линейных скоростей тела и программных управлений его движением, определенные в ПСК Z, удовлетворяют бикватернионным уравнениям, аналогичным (2.5):

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{U}}_z^* = \boldsymbol{\varepsilon}_z^* + s\mathbf{w}_z^* = \mathbf{H}_z^*, \quad 2\dot{\mathbf{\Lambda}}^* = \mathbf{\Lambda}^* \circ \mathbf{U}_z^* \\ \boldsymbol{\varepsilon}_z^* = \varepsilon_1^*\mathbf{i}_1 + \varepsilon_2^*\mathbf{i}_2 + \varepsilon_3^*\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{w}_z^* = w_1^*\mathbf{i}_1 + w_2^*\mathbf{i}_2 + w_3^*\mathbf{i}_3 \\ \mathbf{\Lambda}^* = \Lambda_0^* + \Lambda_1^*\mathbf{i}_1 + \Lambda_2^*\mathbf{i}_2 + \Lambda_3^*\mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\lambda}^* + s\boldsymbol{\lambda}^{0*}, \quad \Lambda_j^* = \lambda_j^* + s\lambda_j^{0*}, \quad j = 0,1,2,3 \\ \mathbf{U}_z^* = U_1^*\mathbf{i}_1 + U_2^*\mathbf{i}_2 + U_3^*\mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\omega}_z^* + s\mathbf{v}_z^* = \omega_1^*\mathbf{i}_1 + \omega_2^*\mathbf{i}_2 + \omega_3^*\mathbf{i}_3 + s(v_1^*\mathbf{i}_1 + v_2^*\mathbf{i}_2 + v_3^*\mathbf{i}_3)\end{gathered} \tag{2.10}$$

Величины $\mathbf{\Lambda}^*$, $\mathbf{U}_z^*$, $\mathbf{H}_z^*$ строятся на основе уравнений (2.10) в виде явных функций времени: $\mathbf{\Lambda}^* = \mathbf{\Lambda}^*(t)$, $\mathbf{U}_z^* = \mathbf{U}_z^*(t)$, $\mathbf{H}_z^* = \mathbf{H}_z^*(t)$. Их построение определяется конкретно решаемой задачей, выбранным оптимизируемым функционалом качества и может быть выполнено с помощью методов оптимального управления, например, с помощью принципа максимума Понтрягина с учетом ограничений, налагаемых на программные управления $\boldsymbol{\varepsilon}_z^*$ и $\mathbf{w}_z^*$.

Стабилизирующие управления $\delta\mathbf{w}$ (или $\Delta\mathbf{w}$) и $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ (или $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$) строятся в виде некоторых функций ошибок по линейному и угловому положениям тела, а также ошибок по линейной и угловой скоростям твердого тела на основе принципа обратной связи. Одна из существующих здесь актуальных задач заключается в синтезе стабилизирующих управлений местоположением и ориентацией тела (по принципу обратной связи), обеспечивающих асимптотическую устойчивость в целом произвольного программного пространственного движения тела и другие требуемые характеристики его управляемого движения.

В силу сказанного во введении (о существовании особой точки в законах управления в случае использования для синтеза стабилизирующих управлений нормированных бикватернионов конечных перемещений тела и трехмерных винтов скоростей и ускорений пространственного движения тела (бикватернионов скоростей и ускорений с нулевыми скалярными частями)) в дальнейшем для синтеза стабилизирующих управлений пространственным движением твердого тела вместо бикватернионных моделей его движения (2.5) будут использованы бикватернионные уравнения управляемого пространственного движения тела

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{U}}_x^\oplus = \varepsilon_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_x + s(w_0 + \mathbf{w}_x) = \mathbf{H}_x^\oplus, \quad 2\dot{\mathbf{\Lambda}}^\oplus = \mathbf{\Lambda}^\oplus \circ \mathbf{U}_x^\oplus \\ \mathbf{\Lambda}^\oplus = \Lambda_0^\oplus + \Lambda_1^\oplus\mathbf{i}_1 + \Lambda_2^\oplus\mathbf{i}_2 + \Lambda_3^\oplus\mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\lambda}^\oplus + s\boldsymbol{\lambda}^{0\oplus}, \quad \Lambda_j^\oplus = \lambda_j^\oplus + s\lambda_j^{0\oplus}, \quad j = 0,1,2,3 \\ \mathbf{U}_x^\oplus = U_0 + U_1\mathbf{i}_1 + U_2\mathbf{i}_2 + U_3\mathbf{i}_3 = U_0 + \mathbf{U}_x = \omega_0 + \boldsymbol{\omega}_x + s(v_0 + \mathbf{v}_x)\end{gathered} \tag{2.11}$$

В этих уравнениях для описания движения тела используются ненормированный бикватернион конечного перемещения тела $\mathbf{\Lambda}^\oplus$ и бикватернион скоростей тела $\mathbf{U}_x^\oplus = U_0 + \mathbf{U}_x$ с ненулевой скалярной дуальной частью $U_0 = \omega_0 + sv_0$.

Уравнения (2.11) – система дуальных нелинейных ДУ 8-го порядка относительно дуальных переменных $\Lambda_j^\oplus$ и $U_j^\oplus$ $(j = \overline{0,3})$, эквивалентная системе вещественных нелинейных ДУ 16-го порядка относительно вещественных переменных $\lambda_j^\oplus$, $\lambda_j^{0\oplus}$, ω_j, v_j $(j = \overline{0,3})$. В этих уравнениях $\mathbf{H}_x^\oplus = \varepsilon_0 + sw_0 + \mathbf{H}_x = \varepsilon_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_x + s(w_0 + \mathbf{w}_x)$ – бикватернионное управление, эквивалентное 4-м дуальным скалярным управлениям $H_j^{\oplus} = \varepsilon_j + sw_j$ $(j = \overline{0,3})$ или 8-ми вещественным скалярным управлениям ε_j и $w_j (j = \overline{0,3})$.

Скалярная часть $U_0 = \omega_0 + sv_0$ бикватерниона скоростей $\mathbf{U}_x^{\oplus}$ определяет собой изменение нормы

$$\|\mathbf{\Lambda}^{\oplus}\| = \mathbf{\Lambda}^{\oplus} \circ \overline{\mathbf{\Lambda}}^{\oplus} = \Lambda_0^{\oplus 2} + \Lambda_1^{\oplus 2} + \Lambda_2^{\oplus 2} + \Lambda_3^{\oplus 2}$$

бикватерниона $\mathbf{\Lambda}^{\oplus}$ конечного перемещения тела. Связь дуальной переменной U_0 с нормой $\|\mathbf{\Lambda}^{\oplus}\|$ имеет вид дифференциальных соотношений

$$\frac{d}{dt}(\|\mathbf{\Lambda}^{\oplus}\|) = U_0\|\mathbf{\Lambda}^{\oplus}\|, \quad U_0 = \frac{d}{dt}(\ln\|\mathbf{\Lambda}^{\oplus}\|) \tag{2.12}$$

вытекающих из второго уравнения системы (2.11).

Поведение дуальной переменной U_0 в свою очередь определяется (в силу первого уравнения системы (2.11)) дуальной скалярной частью $H_0^{\oplus} = \varepsilon_0 + sw_0$ бикватерниона стабилизирующего управления $\mathbf{H}_x^{\oplus}$, к нахождению которого сведена задача синтеза управления пространственным движением тела.

При выполнении условий

$$U_0 = 0, \quad H_0^{\oplus} = 0, \quad \|\mathbf{\Lambda}^{\oplus}(t_0)\| = 1$$

бикватернион $\mathbf{\Lambda}^{\oplus} = \mathbf{\Lambda}$, а его компоненты $\Lambda_j^{\oplus} = \Lambda_j$ будут являться дуальными параметрами Эйлера. Уравнения (2.11) переходят в этом случае в уравнения (2.5).

3. Дифференциальные бикватернионные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела. Введем ошибки (отклонения) по положению и скорости твердого тела. В случае использования нормированных бикватернионов конечных перемещений в соответствии с бикватернионными формулами сложения этих перемещений [4, 5] нормированный бикватернион ошибки положения $\mathbf{N}_\xi$, определенный своими компонентами $N_{\xi j}$ в ИСК ξ, находится по формуле

$$\mathbf{N}_\xi = \boldsymbol{\nu}_\xi + s\boldsymbol{\nu}_\xi^0 = \mathbf{\Lambda} \circ \overline{\mathbf{\Lambda}}^*(t), \tag{3.1}$$

а нормированный бикватернион ошибки положения $\mathbf{N}_x$, определенный своими компонентами N_{xj} в ССК X, – по формуле

$$\mathbf{N}_x = \boldsymbol{\nu}_x + s\boldsymbol{\nu}_x^0 = \overline{\mathbf{\Lambda}}^*(t) \circ \mathbf{\Lambda} \tag{3.2}$$

Отметим, что из соотношений (3.1) и (3.2) следует равенство скалярных частей бикватернионов $\mathbf{N}_\xi$ и $\mathbf{N}_x$: $N_{\xi 0} = N_{x0}$.

Бикватернион ошибки по скорости, определенный своими дуальными компонентами в связанном базисе X, может быть введен по одной из следующих формул:

$$\delta\mathbf{U}_x = \mathbf{U}_x - \mathbf{U}_z^*(t)\sum_{k=1}^{3}(U_k - U_k^*(t))\mathbf{i}_k \tag{3.3}$$

$$\Delta\mathbf{U}_x = \mathbf{U}_x - \mathbf{U}_x^* = \mathbf{U}_x - \overline{\mathbf{N}}_x \circ \mathbf{U}_z^*(t) \circ \mathbf{N}_x \tag{3.4}$$

Компоненты бикватерниона ошибки по линейной и угловой скоростям $\Delta\mathbf{U}_x$, определяемого соотношением (3.4), равны дуальным ортогональным проекциям винтовой разности $\Delta\mathbf{U} = \mathbf{U} - \mathbf{U}^*$ на оси ССК X, в то время как компоненты бикватерниона ошибки по линейной и угловой скоростям $\delta\mathbf{U}_x$, определяемого соотношением (3.3), не имеют смысла дуальных ортогональных проекций этой винтовой разности, а выражаются линейным образом через дуальные ортогональные проекции винтов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}^*$ на оси разных систем координат (связанной X и программной Z).

В соответствии с соотношениями (2.6)–(2.9) дуальное управление $\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_x + s\mathbf{w}_x$, являющееся дуальной композицией требуемого абсолютного углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ и требуемой составляющей $\mathbf{w}_x = \dot{\mathbf{v}}_x$ абсолютного линейного ускорения тела, формируется в ССК X либо по формуле

$$\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_z^*(t) + \delta\mathbf{H}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_z^*(t) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s(\mathbf{w}_z^*(t) + \delta\mathbf{w}_x) \tag{3.5}$$

соответствующей выражению (3.3), либо по формуле

$$\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_x^*(t, \boldsymbol{\nu}_x) + \Delta\mathbf{H}_x = \overline{\boldsymbol{\nu}}_x \circ \boldsymbol{\varepsilon}_z^*(t) \circ \boldsymbol{\nu}_x + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s(\overline{\boldsymbol{\nu}}_x \circ \mathbf{w}_z^*(t) \circ \boldsymbol{\nu}_x + \Delta\mathbf{w}_x), \tag{3.6}$$

соответствующей выражению (3.4), в виде винтовой суммы программного $\mathbf{H}^*$ и стабилизирующего $\delta\mathbf{H}$ (или $\Delta\mathbf{H}$) управлений. В (3.6) бикватернион $\Delta\mathbf{H}_x = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s\Delta\mathbf{w}_x$, как и бикватернион $\delta\mathbf{H}_x = \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s\delta\mathbf{w}_x$, фигурирующий в (3.5), имеет смысл стабилизирующего управления. Стабилизирующее управление $\Delta\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_x - \mathbf{H}_x^*(t, \nu_x)$ отвечает винтовой разности $\Delta\mathbf{H} = \mathbf{H} - \mathbf{H}^*$ и закон его формирования будет отличаться от закона формирования стабилизирующего управления $\delta\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_x - \mathbf{H}_z^*(t)$, компоненты которого формируются в виде разности дуальных ортогональных проекций винтов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}^*$ на оси разных систем координат (X и Z).

В случае использования ненормированных бикватернионов конечных перемещений твердого тела ошибки по угловому и линейному положениям и угловой и линейной скоростям тела будем определять бикватернионными соотношениями, аналогичными (3.1)–(3.4):

$$\mathbf{N}_\xi^\oplus = \boldsymbol{\nu}_\xi^\oplus + s\boldsymbol{\nu}_\xi^{0\oplus} = \boldsymbol{\Lambda}^\oplus \circ \overline{\boldsymbol{\Lambda}}^*(t) \tag{3.7}$$

$$\mathbf{N}_x^\oplus = \boldsymbol{\nu}_x^\oplus + s\boldsymbol{\nu}_x^{0\oplus}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^*(t) \circ \boldsymbol{\Lambda}^\oplus \tag{3.8}$$

$$\delta\mathbf{U}_x^\oplus = \mathbf{U}_x^\oplus - \mathbf{U}_z^*(t) = U_0 + \mathbf{U}_x - \mathbf{U}_z^*(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{3}(U_k - U_k^*(t))\mathbf{i}_k \tag{3.9}$$

$$\Delta\mathbf{U}_x^\oplus = \mathbf{U}_x^\oplus - \mathbf{U}_x^* = U_0 + \mathbf{U}_x - \mathbf{U}_x^* = U_0 + \mathbf{U}_x - \mathbf{N}_x^{\oplus-1} \circ \mathbf{U}_z^*(t) \circ \mathbf{N}_x^\oplus, \tag{3.10}$$

где

$$\mathbf{N}_x^{\oplus-1} \circ \mathbf{U}_z^*(t) \circ \mathbf{N}_x^\oplus = \mathbf{N}_x^{-1} \circ \mathbf{U}_z^*(t) \circ \mathbf{N}_x = \overline{\boldsymbol{\nu}}_x \circ \mathbf{U}_z^*(t) \circ \boldsymbol{\nu}_x$$

В этом случае в качестве управления выступает бикватернион абсолютного углового ускорения

$$\mathbf{H}_x^\oplus = H_0 + \mathbf{H}_x = \varepsilon_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_x + s(w_0 + \mathbf{w}_x)$$

с ненулевой скалярной дуальной частью $H_0 = \varepsilon_0 + sw_0$, рассматриваемой как дополнительное (четвертое) скалярное дуальное управление, отвечающее за поведение нормы бикватерниона $\boldsymbol{\Lambda}^\oplus$ (а, следовательно, и нормы бикватерниона ошибки ориентации $\mathbf{N}_\xi^\oplus$ или $\mathbf{N}_x^\oplus$). Так же, как и в случае трехмерного дуального управления $\mathbf{H}_x$, будем рассматривать два варианта формирования четырехмерного дуального управления $\mathbf{H}_x^\oplus$ по формулам, аналогичным (3.5) и (3.6):

$$\mathbf{H}_x^\oplus = \mathbf{H}_z^*(t) + \delta\mathbf{H}_x^\oplus = \boldsymbol{\varepsilon}_z^*(t) + \varepsilon_0 + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s(\mathbf{w}_z^*(t) + w_0 + \delta\mathbf{w}_x) \tag{3.11}$$

$$\mathbf{H}_x^{\oplus} = \mathbf{H}_x^*(t, \nu_x) + \Delta\mathbf{H}_x^{\oplus} =$$
$$= \bar{\boldsymbol{\nu}}_x \circ \boldsymbol{\varepsilon}_z^*(t) \circ \boldsymbol{\nu}_x + \varepsilon_0 + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s(\bar{\boldsymbol{\nu}}_x \circ \mathbf{w}_z^*(t) \circ \boldsymbol{\nu}_x + w_0 + \Delta\mathbf{w}_x) \tag{3.12}$$

В этих формулах $\delta\mathbf{H}_x^{\oplus} = H_0 + \delta\mathbf{H}_x = \varepsilon_0 + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s(w_0 + \delta\mathbf{w}_x)$ и $\Delta\mathbf{H}_x^{\oplus} = H_0 + \Delta\mathbf{H}_x = \varepsilon_0 + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s(w_0 + \Delta\mathbf{w}_x)$ – стабилизирующие дуальные четырехмерные ускорения.

Отметим, что формула (3.12) эквивалентна формуле

$$\mathbf{H}_x^{\oplus} = \mathbf{H}_x^*(t, \boldsymbol{\nu}_x^{\oplus}) + \Delta\mathbf{H}_x^{\oplus} =$$
$$= \boldsymbol{\nu}_x^{\oplus-1} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_z^*(t) \circ \boldsymbol{\nu}_x^{\oplus} + \varepsilon_0 + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s(\boldsymbol{\nu}_x^{\oplus-1} \circ \mathbf{w}_z^*(t) \circ \boldsymbol{\nu}_x^{\oplus} + w_0 + \Delta\mathbf{w}_x)$$

или формуле

$$\mathbf{H}_x^{\oplus} = \mathbf{H}_x^*(t, \mathbf{N}_x^{\oplus}) + \Delta\mathbf{H}_x^{\oplus} =$$
$$= \mathbf{N}_x^{\oplus-1} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_z^*(t) \circ \mathbf{N}_x^{\oplus} + \varepsilon_0 + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s(\mathbf{N}_x^{\oplus-1} \circ \mathbf{w}_z^*(t) \circ \mathbf{N}_x^{\oplus} + w_0 + \Delta\mathbf{w}_x)$$

Запишем нормальные и осцилляторные формы ДУ уравнений возмущенного пространственного движения тела, используя введенные переменные (3.7)–(3.12). Нормальные формы уравнений в бикватернионных переменных $\mathbf{N}_\xi^{\oplus}$, $\delta\mathbf{U}_x^{\oplus}$ и $\mathbf{N}_x^{\oplus}$, $\Delta\mathbf{U}_x^{\oplus}$ имеют вид

$$\delta\dot{\mathbf{U}}_x^{\oplus} = \delta\mathbf{H}_x^{\oplus}, \quad 2\dot{\mathbf{N}}_\xi^{\oplus} = \mathbf{N}_\xi^{\oplus} \circ \boldsymbol{\Lambda}^*(t) \circ \delta\mathbf{U}_x^{\oplus} \circ \bar{\boldsymbol{\Lambda}}^*(t) \tag{3.13}$$

$$\Delta\dot{\mathbf{U}}_x^{\oplus} = \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{U}_x^{\oplus} \circ \mathbf{U}_x^* - \mathbf{U}_x^* \circ \Delta\mathbf{U}_x^{\oplus}) + \Delta\mathbf{H}_x^{\oplus} = \frac{1}{2}(\Delta\mathbf{U}_x^{\oplus} \circ \mathbf{U}_x^{\oplus} - \mathbf{U}_x^{\oplus} \circ \Delta\mathbf{U}_x^{\oplus}) + \Delta\mathbf{H}_x^{\oplus} \tag{3.14}$$

$$2\dot{\mathbf{N}}_x^{\oplus} = \mathbf{N}_x^{\oplus} \circ \Delta\mathbf{U}_x^{\oplus}, \tag{3.15}$$

где

$$\mathbf{U}_x^{\oplus} = \mathbf{N}_x^{\oplus-1} \circ \mathbf{U}_z^*(t) \circ \mathbf{N}_x^{\oplus} + \Delta\mathbf{U}_x^{\oplus} \tag{3.16}$$

Уравнения (3.13) могут быть записаны в другом виде:

$$\delta\dot{\mathbf{U}}_x^{\oplus} = \delta\mathbf{H}_x^{\oplus}, \quad 2\dot{\mathbf{N}}_\xi^{\oplus} = \delta\mathbf{U}_\xi^{\oplus} \circ \mathbf{N}_\xi^{\oplus}, \tag{3.17}$$

где

$$\delta\mathbf{U}_\xi^{\oplus} = \boldsymbol{\Lambda}^{\oplus} \circ \delta\mathbf{U}_x^{\oplus} \circ \boldsymbol{\Lambda}^{\oplus-1}, \quad \Lambda^{\oplus} = \mathbf{N}_\xi^{\oplus} \circ \Lambda^*(t), \tag{3.18}$$

а уравнения (3.14) и (3.15) – в виде

$$\Delta\dot{\mathbf{U}}_x^{\oplus} = \Delta\mathbf{U}_{xv}^{\oplus} \times \mathbf{U}_x^{\oplus} + \Delta\mathbf{H}_x^{\oplus}, \quad 2\dot{\mathbf{N}}_x^{\oplus} = \mathbf{N}_x^{\oplus} \circ \Delta\mathbf{U}_x^{\oplus}, \tag{3.19}$$

где $\times$ – символ винтового произведения, $\Delta\mathbf{U}_{xv}^{\oplus}$ – винтовая часть бикватерниона $\Delta\mathbf{U}_x^{\oplus}$, а бикватернион $\mathbf{U}_x^{\oplus}$ определен соотношением (3.16).

Отметим, что в уравнениях (3.13) и (3.17), (3.18) фигурирует бикватернион $\boldsymbol{\Lambda}^*(t)$ программного местоположения и программной ориентации тела, в то время как в уравнениях (3.14)–(3.16) и (3.19) – бикватернион программной линейной и угловой скоростей $\mathbf{U}_z^*(t)$.

Из (3.13) и (3.14)–(3.16) получаем осцилляторные формы уравнений возмущенного движения

$$2\ddot{\mathbf{N}}_\xi^{\oplus} = \mathbf{N}_\xi^{\oplus} \circ \boldsymbol{\Lambda}^*(t) \circ \left[\frac{1}{2}(\mathbf{U}_z^*(t) \circ \delta\mathbf{U}_x^{\oplus} - \delta\mathbf{U}_x^{\oplus} \circ \mathbf{U}_z^*(t) + \delta\mathbf{U}_x^{\oplus} \circ \delta\mathbf{U}_x^{\oplus}) + \delta\mathbf{H}_x^{\oplus}\right] \circ \bar{\boldsymbol{\Lambda}}^*(t), \tag{3.20}$$

где

$$\delta\mathbf{U}_x^{\oplus} = 2\bar{\mathbf{\Lambda}}^*(t) \circ \mathbf{N}_\xi^{\oplus-1} \circ \dot{\mathbf{N}}_\xi^{\oplus} \circ \bar{\mathbf{\Lambda}}^*(t) \tag{3.21}$$

$$2\ddot{\mathbf{N}}_x^{\oplus} = \mathbf{N}_x^{\oplus} \circ \left[\frac{1}{2}(\Delta\mathbf{U}_x^{\oplus} \circ \mathbf{U}_x^* - \mathbf{U}_x^* \circ \Delta\mathbf{U}_x^{\oplus} + \Delta\mathbf{U}_x^{\oplus} \circ \Delta\mathbf{U}_x^{\oplus}) + \Delta\mathbf{H}_x^{\oplus}\right], \tag{3.22}$$

где

$$\Delta\mathbf{U}_x^{\oplus} = 2\mathbf{N}_x^{\oplus-1} \circ \dot{\mathbf{N}}_x^{\oplus}, \quad \mathbf{U}_x^* = \mathbf{N}_x^{\oplus-1} \circ \mathbf{U}_z^*(t) \circ \mathbf{N}_x^{\oplus} \tag{3.23}$$

Запишем уравнения (3.20), (3.21) и (3.22), (3.23) в форме (3.24) и (3.26), удобной для построения законов управления:

$$2\ddot{\mathbf{N}}_\xi^{\oplus} = \delta\mathbf{G}_\xi^{\oplus} \circ \mathbf{N}_\xi^{\oplus} + \frac{1}{2}(U_0^2 - |\delta\mathbf{U}|^2)\mathbf{N}_\xi^{\oplus}, \tag{3.24}$$

где

$$\begin{gathered}\delta\mathbf{G}_\xi^{\oplus} = \mathbf{\Lambda}^{\oplus} \circ \delta\mathbf{G}_x^{\oplus} \circ \mathbf{\Lambda}^{\oplus-1}, \quad \delta\mathbf{G}_x^{\oplus} = U_0\delta\mathbf{U}_x + \mathbf{U}_x \times \delta\mathbf{U}_x + \delta\mathbf{H}_x^{\oplus} \\ \mathbf{U}_x = \mathbf{U}_z^*(t) + \delta\mathbf{U}_x, \quad |\delta\mathbf{U}|^2 = \delta\mathbf{U}_x \cdot \delta\mathbf{U}_x = -\delta\mathbf{U}_x \circ \delta\mathbf{U}_x, \quad \mathbf{\Lambda}^{\oplus} = \mathbf{N}_\xi^{\oplus} \circ \mathbf{\Lambda}^*(t)\end{gathered} \tag{3.25}$$

$$2\ddot{\mathbf{N}}_x^{\oplus} = \mathbf{N}_x^{\oplus} \circ \Delta\mathbf{G}_x^{\oplus} + \frac{1}{2}(U_0^2 - |\Delta\mathbf{U}|^2)\mathbf{N}_x^{\oplus}, \tag{3.26}$$

где

$$\begin{gathered}\Delta\mathbf{G}_x^{\oplus} = U_0\Delta\mathbf{U}_x - \mathbf{U}_x \times \Delta\mathbf{U}_x + \Delta\mathbf{H}_x^{\oplus} \\ \mathbf{U}_x = \Delta\mathbf{U}_x + \bar{\mathbf{N}}_x \circ \mathbf{U}_z^*(t) \circ \mathbf{N}_x, \quad |\Delta\mathbf{U}|^2 = \Delta\mathbf{U}_x \cdot \Delta\mathbf{U}_x = -\Delta\mathbf{U}_x \circ \Delta\mathbf{U}_x\end{gathered} \tag{3.27}$$

Здесь центральная точка – символ скалярного произведения. Отметим, что присутствующие в соотношениях (3.25) и (3.27) винтовые произведения могут быть представлены в виде

$$\mathbf{U}_x \times \delta\mathbf{U}_x = \mathbf{U}_z^*(t) \times \delta\mathbf{U}_x, \quad \mathbf{U}_x \times \Delta\mathbf{U}_x = \mathbf{U}_x^* \times \Delta\mathbf{U}_x = [\bar{\mathbf{N}}_x \circ \mathbf{U}_z^*(t) \circ \mathbf{N}_x] \times \Delta\mathbf{U}_x$$

4. Стабилизирующие управления. Выразим четырехмерные дуальные величины $\delta\mathbf{G}_\xi^{\oplus}$ и $\Delta\mathbf{G}_x^{\oplus}$, рассматривамые как новые дуальные управления, из бикватернионных уравнений (3.24) и (3.26). Получим

$$\delta\mathbf{G}_\xi^{\oplus} = 2\ddot{\mathbf{N}}_\xi^{\oplus} \circ \mathbf{N}_\xi^{\oplus-1} - \frac{1}{2}(|\delta\mathbf{U}|^2 - U_0^2) \tag{4.1}$$

$$\Delta\mathbf{G}_x^{\oplus} = 2\mathbf{N}_x^{\oplus-1} \circ \ddot{\mathbf{N}}_x^{\oplus} - \frac{1}{2}(|\Delta\mathbf{U}|^2 - U_0^2) \tag{4.2}$$

Четырехмерные дуальные стабилизирующие управления $\delta\mathbf{H}_x^{\oplus}$ и $\Delta\mathbf{H}_x^{\oplus}$ находятся через величины $\delta\mathbf{G}_\xi^{\oplus}$ и $\Delta\mathbf{G}_x^{\oplus}$ по формулам

$$\delta\mathbf{H}_x^{\oplus} = \mathbf{\Lambda}^{\oplus-1} \circ \delta\mathbf{G}_\xi^{\oplus} \circ \mathbf{\Lambda}^{\oplus} - U_0\delta\mathbf{U}_x - \mathbf{U}_x \times \delta\mathbf{U}_x \tag{4.3}$$

$$\Delta\mathbf{H}_x^{\oplus} = \Delta\mathbf{G}_x^{\oplus} - U_0\Delta\mathbf{U}_x + \mathbf{U}_x \times \Delta\mathbf{U}_x \tag{4.4}$$

вытекающим из соотношений (3.25) и (3.28).

Полученные выражения (4.1)–(4.4) определяют собой стабилизирующие управления $\delta\mathbf{H}_x^{\oplus}$ и $\Delta\mathbf{H}_x^{\oplus}$ в виде функций ошибок по положению и скорости тела и вторых производных по времени от ошибок по положению. Подстановка в эти выражения таких законов изменения вторых производных по времени от ошибок по положению, которые отвечают желаемым динамическим характеристикам переходных процессов управления, позволяет получить нужные законы стабилизирующих управлений.

Будем рассматривать два варианта задания вторых производных по времени от ошибок по положению твердого тела в виде линейных функций ошибок по положению тела и их первых производных по времени. При таком их задании желаемая динамика управляемого движения тела описывается линейными стационарными ДУ второго порядка относительно ошибок по линейному и угловому положениям тела (относительно одной из выбранных переменных $\mathbf{N}_\xi^\oplus$ или $\mathbf{N}_x^\oplus$). Соответствующий выбор постоянных дуальных коэффициентов этих уравнений, являющихся коэффициентами усиления нелинейных дуальных обратных связей, обеспечивает желаемые динамические характеристики управляемого пространственного движения тела.

5. Эталонные дифференциальные уравнения переходных процессов. Стабилизирующие управления $\delta\mathbf{H}_x^\oplus$ и $\Delta\mathbf{H}_x^\oplus$ будем формировать таким образом, чтобы ДУ возмущенного пространственного движения твердого тела, замкнутые этими законами управления, принимали эталонные дифференциальные формы. В качестве эталонных дифференциальных форм для ДУ возмущенного движения тела в переменных $\mathbf{N}_\xi^\oplus$ и $\mathbf{N}_x^\oplus$ примем формы

$$\ddot{\mathbf{N}}_\xi^\oplus + \mathbf{P}\circ\dot{\mathbf{N}}_\xi^\oplus + \mathbf{Q}\circ(\mathbf{N}_\xi^\oplus - 1) = 0 \tag{5.1}$$

$$\ddot{\mathbf{N}}_x^\oplus + \dot{\mathbf{N}}_x^\oplus\circ\mathbf{P}^* + (\mathbf{N}_x^\oplus - 1)\circ\mathbf{Q}^* = 0 \tag{5.2}$$

Формы (5.1) и (5.2) — бикватернионные линейные ДУ второго порядка относительно бикватернионных переменных $\mathbf{N}_\xi^\oplus$ и $\mathbf{N}_x^\oplus$ с постоянными бикватернионными коэффициентами

$$\mathbf{P} = P_0 + \mathbf{P}_v = P_0 + \sum_{k=1}^{3} P_k\mathbf{i}_k, \quad \mathbf{Q} = Q_0 + \mathbf{Q}_v = Q_0 + \sum_{k=1}^{3} Q_k\mathbf{i}_k$$

и аналогичными бикватернионными коэффициентами $\mathbf{P}^*$ и $\mathbf{Q}^*$.

Введем новые бикватернионные переменные

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}_\xi^\oplus - 1, \quad \mathbf{M}^* = \mathbf{N}_x^\oplus - 1$$

Уравнения (5.1) и (5.2) примут вид

$$\ddot{\mathbf{M}} + \mathbf{P}\circ\dot{\mathbf{M}} + \mathbf{Q}\circ\mathbf{M} = 0 \tag{5.3}$$

$$\ddot{\mathbf{M}}^* + \dot{\mathbf{M}}^*\circ\mathbf{P}^* + \mathbf{M}^*\circ\mathbf{Q}^* = 0 \tag{5.4}$$

Отметим, что если невозмущенному (программному) движению тела соответствуют частные решения $\mathbf{N}_\xi^\oplus = 1$, $\dot{\mathbf{N}}_\xi^\oplus = 0$ и $\mathbf{N}_x^\oplus = 1$, $\dot{\mathbf{N}}_x^\oplus = 0$ уравнений (5.1) и (5.2), то этому движению тела соответствуют нулевые частные решения $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{M}} = 0$ и $\mathbf{M}^* = \dot{\mathbf{M}}^* = 0$ уравнений (5.3) и (5.4), для чего и были введены новые переменные $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}^*$.

При выделении скалярной и винтовой частей в бикватернионном уравнении (5.3) получаем систему из скалярного и винтового уравнений

$$\ddot{M}_0 + P_0\dot{M}_0 - \mathbf{P}_v\cdot\dot{\mathbf{M}}_v + Q_0M_0 - \mathbf{Q}_v\cdot\mathbf{M}_v = 0$$

$$\ddot{\mathbf{M}}_v + P_0\dot{\mathbf{M}}_v + \dot{M}_0\mathbf{P}_v + \mathbf{P}_v\times\dot{\mathbf{M}}_v + Q_0\mathbf{M}_v + M_0\mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_v\times\mathbf{M}_v = 0$$

Аналогичной системе эквивалентно бикватернионное уравнение (5.4).

Бикватернионные уравнения (5.3) и (5.4) эквивалентны дуальным матричным

$$\ddot{\mu} + m(\mathbf{P})\dot{\mu} + m(\mathbf{Q})\mu = 0 \tag{5.5}$$

$$\ddot{\mu}^* + n(\mathbf{P}^*)\dot{\mu}^* + n(\mathbf{Q}^*)\mu^* = 0, \tag{5.6}$$

где μ и μ^* – матрицы-столбцы размерами 4×1 с дуальными элементами $\mu_0 = N_{\xi 0}^{\oplus} - 1$, $\mu_k = N_{\xi k}^{\oplus}$ и $\mu_0^* = N_{x0}^{\oplus} - 1$, $\mu_k^* = N_{xk}^{\oplus}$ $(k = 1, 2, 3)$ соответственно; $m(\mathbf{P})$, $m(\mathbf{Q})$ и $n(\mathbf{P}^*)$, $n(\mathbf{Q}^*)$ – бикватернионные матрицы, сопоставляемые бикватернионам $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}^*$, $\mathbf{Q}^*$, имеющие вид [4]

$$m(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix}, \quad n(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 \\ x_2 & -x_3 & x_0 & x_1 \\ x_3 & x_2 & -x_1 & x_0 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}^*, \mathbf{Q}^*$$

Бикватернионные матрицы $m(\mathbf{x})$ и $n(\mathbf{x})$ представим в виде:

$$m(\mathbf{x}) = x_0 E + m(\mathbf{x}_v), \quad n(\mathbf{x}) = x_0 E + n(\mathbf{x}_v), \tag{5.8}$$

где E – четырехмерная единичная матрица; $m(\mathbf{x}_v)$, $n(\mathbf{x}_v)$ – бикватернионные матрицы вида (5.7) при $x_0 = 0$, сопоставляемые винту $\mathbf{x}_v$, являющиеся четырехмерными дуальными кососимметрическими матрицами.

Учитывая соотношения (5.8), запишем уравнения (5.5) и (5.6) в виде

$$\ddot{\mu} + P_0\dot{\mu} + m(\mathbf{P}_v)\dot{\mu} + Q_0\mu + m(\mathbf{Q}_v)\mu = 0 \tag{5.9}$$

$$\ddot{\mu}^* + P_0^*\dot{\mu}^* + n(\mathbf{P}_v^*)\dot{\mu}^* + Q_0^*\mu^* + n(\mathbf{Q}_v^*)\mu^* = 0 \tag{5.10}$$

По аналогии с известной в теории устойчивости движения классификацией сил по их математической структуре вторые слагаемые в матричных дуальных уравнениях (5.9) и (5.10) определяют собой управляющие дуальные диссипативные силы, третьи слагаемые – гироскопические, четвертые – потенциальные (консервативные) силы, пятые – дуальные силы радиальной коррекции.

6. Законы стабилизирующих управлений. Построим законы стабилизирующих управлений, отвечающие эталонным дифференциальным формам (5.1) и (5.2) уравнений возмущенного движения твердого тела с замкнутой системой управления движением. Выражая из уравнений (5.1) и (5.2) вторые производные $\ddot{\mathbf{N}}_{\xi}^{\oplus}$ и $\ddot{\mathbf{N}}_{x}^{\oplus}$ и подставляя их в соотношения (4.1) и (4.2), получим, учитывая вторые из уравнений (3.17) и (3.19), бикватернионные выражения для управлений $\delta\mathbf{G}_{\xi}^{\oplus}$ и $\Delta\mathbf{G}_{x}^{\oplus}$

$$\delta\mathbf{G}_{\xi}^{\oplus} = -2\mathbf{Q} \circ (1 - \mathbf{N}_{\xi}^{\oplus -1}) - \mathbf{P} \circ \delta\mathbf{U}_{\xi}^{\oplus} + \frac{1}{2}(|\delta\mathbf{U}|^2 - U_0^2) \tag{6.1}$$

$$\Delta\mathbf{G}_{x}^{\oplus} = -2(1 - \mathbf{N}_{x}^{\oplus -1}) \circ \mathbf{Q}^* - \Delta\mathbf{U}_{x}^{\oplus} \circ \mathbf{P}^* + \frac{1}{2}(|\Delta\mathbf{U}|^2 - U_0^2) \tag{6.2}$$

Подставляя соотношения (6.1) и (6.2) в формулы (4.3) и (4.4), получаем соотношения для формирования бикватернионных стабилизирующих управлений $\delta\mathbf{H}_{x}^{\oplus}$ и $\Delta\mathbf{H}_{x}^{\oplus}$

$$\delta\mathbf{H}_{x}^{\oplus} = -2\mathbf{\Lambda}^{\oplus -1} \circ \mathbf{Q} \circ (\mathbf{\Lambda}^{\oplus} - \mathbf{\Lambda}^*(t)) - \mathbf{\Lambda}^{\oplus -1} \circ \mathbf{P} \circ \mathbf{\Lambda}^{\oplus} \circ \delta\mathbf{U}_{x}^{\oplus} + \\ + \frac{1}{2}(|\delta\mathbf{U}|^2 - U_0^2) - U_0\delta\mathbf{U}_x - \mathbf{U}_x \times \delta\mathbf{U}_x \tag{6.3}$$

$$\Delta\mathbf{H}_{x}^{\oplus} = -2(1 - \mathbf{N}_{x}^{\oplus -1}) \circ \mathbf{Q}^* - \Delta\mathbf{U}_{x}^{\oplus} \circ \mathbf{P}^* + \frac{1}{2}(|\Delta\mathbf{U}|^2 - U_0^2) - U_0\Delta\mathbf{U}_x + \mathbf{U}_x \times \Delta\mathbf{U}_x \tag{6.4}$$

В случае скалярных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей, когда $\mathbf{P} = P_0$, $\mathbf{Q}_0 = Q_0$, а $\mathbf{P}^* = P_0^*$, $\mathbf{Q}_0^* = Q_0^*$, законы управления (6.3) и (6.4) принимают более простой вид

$$\delta\mathbf{H}_x^{\oplus} = -2Q_0(1-\mathbf{N}_x^{\oplus-1}) - P_0\delta\mathbf{U}_x^{\oplus} + \frac{1}{2}(|\delta\mathrm{U}|^2 - U_0^2) - U_0\delta\mathbf{U}_x - \mathbf{U}_x\times\delta\mathbf{U}_x \tag{6.5}$$

$$\Delta\mathbf{H}_x^{\oplus} = -2Q_0^*(1-\mathbf{N}_x^{\oplus-1}) - P_0^*\Delta\mathbf{U}_x^{\oplus} + \frac{1}{2}(|\Delta\mathrm{U}|^2 - U_0^2) - U_0\Delta\mathbf{U}_x + \mathbf{U}_x\times\Delta\mathbf{U}_x \tag{6.6}$$

В случае рассмотрения управления лишь угловым (вращательным) движением тела, когда переменные и постоянные коэффициенты в полученных законах управления являются вещественными (а не дуальными) величинами, из соотношений (6.3)–(6.6) следуют законы формирования четырехмерных стабилизирующих угловых ускорений $\varepsilon_0 + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x$ и $\varepsilon_0 + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x$ (главных частей бикватернионов $\delta\mathbf{H}_x^{\oplus}$ и $\Delta\mathbf{H}_x^{\oplus}$), которые совпадают с законами, полученными в [39] (соотношения (7.6.17)–(7.6.20)).

Построенные законы (6.3), (6.4) формирования четырехмерных стабилизирующих ускорений $\delta\mathbf{H}_x^{\oplus}$ и $\Delta\mathbf{H}_x^{\oplus}$ – нелинейные бикватернионные функции ошибок по угловому и линейному положениям, а также ошибок по угловой и линейной скоростям тела. Нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного движения тела (3.24) или (3.26), замкнутые этими законами управления, принимают вид эталонной дифференциальной линейной стационарной формы (5.1) или (5.2), инвариантной относительно любого выбранного программного углового и линейного движений.

Для получения дуальных трехмерных стабилизирующих ускорений $\delta\mathbf{H}_x = \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s\delta\mathbf{w}_x$ и $\Delta\mathbf{H}_x = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s\Delta\mathbf{w}_x$ необходимо выделить в бикватернионных формулах (6.3)–(6.6) дуальные скалярные и винтовые части. Скалярные части вместе с ДУ для норм $\|\mathbf{N}_\xi^{\oplus}\|$ и $\|\mathbf{N}_x^{\oplus}\|$ бикватернионов $\mathbf{N}_\xi^{\oplus}$ и $\mathbf{N}_x^{\oplus}$

$$\frac{d}{dt}(\|\mathbf{N}_\xi^{\oplus}\|) = U_0\|\mathbf{N}_\xi^{\oplus}\|, \quad \frac{d}{dt}(\|\mathbf{N}_x^{\oplus}\|) = U_0\|\mathbf{N}_x^{\oplus}\| \tag{6.7}$$

аналогичными первому ДУ (2.12), позволяют построить алгоритмы вычисления дуальной скалярной части U_0 бикватернионов $\delta\mathbf{U}_x^{\oplus}$ и $\Delta\mathbf{U}_x^{\oplus}$ и норм бикватернионов $\mathbf{N}_\xi^{\oplus}$ и $\mathbf{N}_x^{\oplus}$. Выражения, получаемые для винтовых частей, являются алгоритмами формирования необходимого дуального стабилизирующего ускорения $\delta\mathbf{H}_x$ или $\Delta\mathbf{H}_x$, сообщение которого телу (вместе с дуальным программным ускорением $\mathbf{H}_z^*(t)$ или $\mathbf{H}_x^*(t,\boldsymbol{\nu}_x)$) осуществляется за счет приложения к нему управляющей силы $\mathbf{F}_{cx}$ и управляющего момента $\mathbf{M}_{cx}$, формируемых в соответствии с соотношениями (2.1) и (2.2) и соотношениями (2.6) и (2.7) или (2.8) и (2.9).

Так, выделяя в более простом бикватернионном соотношении (6.4) дуальную скалярную и винтовую части и используя второе ДУ из уравнений (6.7) для нормы бикватерниона $\mathbf{N}_x^{\oplus}$, получаем бикватернионный алгоритм формирования требуемого дуального стабилизирующего ускорения $\Delta\mathbf{H}_x = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s\Delta\mathbf{w}_x$ в виде соотношений

$$\begin{gathered}\dot{\mathrm{K}} = -\frac{1}{2}U_0\mathrm{K},\\ \dot{U}_0 = -2Q_0^*(1-\mathrm{K}N_0) + 2\mathrm{K}(\mathbf{Q}_v^*\cdot\mathbf{N}_{vx}) - P_0^*U_0 + \frac{1}{2}(|\Delta\mathrm{U}|^2 - U_0^2) + \mathbf{P}_v^*\cdot\Delta\mathbf{U}_x\end{gathered} \tag{6.8}$$

$$\begin{gathered}\Delta\mathbf{H}_x = -2(1-\mathrm{K}N_0)\mathbf{Q}_v^* - 2\mathrm{K}(Q_0^*\mathbf{N}_{vx} + \mathbf{N}_{vx}\times\mathbf{Q}_v^*) - U_0\mathbf{P}_v^* -\\ -(P_0^* + U_0)\Delta\mathbf{U}_x + (\mathbf{P}_v^* + \mathbf{U}_x)\times\Delta\mathbf{U}_x\end{gathered} \tag{6.9}$$

Здесь N_0 и $\mathbf{N}_{vx} = N_1\mathbf{i}_1 + N_2\mathbf{i}_2 + N_3\mathbf{i}_3$ – скалярная и винтовая части нормированного бикватерниона $\mathbf{N}_x$ ошибки ориентации и местоположения тела в инерциальной системе координат, K – новая дуальная скалярная переменная, определяемая соотношением

$$\mathrm{K} = \kappa + s\kappa^0 = \|\mathbf{N}_x^{\oplus}\|^{-1/2} = (\mathrm{N}_0^{\oplus 2} + \mathrm{N}_1^{\oplus 2} + \mathrm{N}_2^{\oplus 2} + \mathrm{N}_3^{\oplus 2})^{-1/2} \tag{6.10}$$

и являющаяся величиной, обратной тензору ненормированного бикватерниона $\mathbf{N}_x^{\oplus}$ ошибки ориентации и местоположения тела.

Выделяя в соотношениях (6.5) и (6.6) дуальные скалярные и винтовые части, получаем в случае скалярных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей бикватернионные алгоритмы формирования дуальных стабилизирующих ускорений $\delta\mathbf{H}_x = \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s\delta\mathbf{w}_x$ и $\Delta\mathbf{H}_x = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s\Delta\mathbf{w}_x$ в виде соотношений

$$\dot{\mathrm{K}} = -\frac{1}{2}U_0\mathrm{K}, \quad \dot{U}_0 = -2Q_0(1 - \mathrm{K}\mathrm{N}_0) - P_0U_0 + \frac{1}{2}(|\delta\mathbf{U}|^2 - U_0^2) \tag{6.11}$$

$$\delta\mathbf{H}_x = -2Q_0\mathrm{K}\mathbf{N}_{vx} - (P_0 + U_0)\delta\mathbf{U}_x - \mathbf{U}_x \times \delta\mathbf{U}_x \tag{6.12}$$

$$\dot{\mathrm{K}} = -\frac{1}{2}U_0\mathrm{K}, \quad \dot{U}_0 = -2Q_0^*(1 - \mathrm{K}N_0) - P_0^*U_0 + \frac{1}{2}(|\Delta\mathbf{U}|^2 - U_0^2) \tag{6.13}$$

$$\Delta\mathbf{H}_x = -2Q_0^*\mathrm{K}\mathbf{N}_{vx} - (P_0^* + U_0)\Delta\mathbf{U}_x + \mathbf{U}_x \times \Delta\mathbf{U}_x \tag{6.14}$$

Соотношения (6.13) и (6.14) получаются также из соотношений (6.8) и (6.9), если в них положить $\mathbf{P}_v^* = \mathbf{Q}_v^* = 0$. Из бикватернионных соотношений (6.11)–(6.14) следуют кватернионные законы (7.6.24)–(7.6.27) [39] формирования четырехмерных стабилизирующих угловых ускорений $\varepsilon_0 + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x$ и $\varepsilon_0 + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x$ и кватернионные соотношения (6.3) и (6.4) [35], полученные для случая управления вращательным движением тела.

Каждый из алгоритмов (6.8), (6.9); (6.11), (6.12) и (6.13), (6.14) формирования дуальных стабилизирующих ускорений $\delta\mathbf{H}_x = \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s\delta\mathbf{w}_x$ или $\Delta\mathbf{H}_x = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s\Delta\mathbf{w}_x$ содержит систему двух дуальных скалярных нелинейных нестационарных ДУ относительно вспомогательных дуальных переменных $\mathrm{K} = \kappa + s\kappa^0$ и $U_0 = \omega_0 + sv_0$ (одну из систем дуальных скалярных ДУ (6.8) или (6.11), или (6.13)), которая должна интегрироваться на бортовом компьютере в реальном масштабе времени, и конечное бикватернионное соотношение (одно из соотношений (6.9) или (6.12), или (6.14)) для формирования $\delta\mathbf{H}_x$ или $\Delta\mathbf{H}_x$, использующее переменные K и U_0. Отметим, что в качестве начальных условий интегрирования ДУ для дуальных переменных K и U_0 могут быть взяты следующие их значения: $\mathrm{K}(0) = 1$ ($\kappa(0) = 1$, $\kappa^0(0) = 0$) и $U_0(0) = 0$ ($\omega_0(0) = 0$, $v_0(0) = 0$). Равенство $\mathrm{K}(0) = 1$ в соответствии с соотношением (6.10) означает, что в начальный момент времени тензор (модуль) бикватерниона $\mathbf{N}_x^{\oplus}$ ошибки ориентации и местоположения тела равен единице.

Построенные общие бикватернионные законы формирования стабилизирующих ускорений (6.3) и (6.4), (6.8) и (6.9), так же как и частные законы (6.11), (6.12) и (6.13), (6.14), особых точек не имеют (регулярны в целом).

7. Динамика управляемого пространственного движения твердого тела. Выбор коэффициентов законов управления. Построенные в п. 6 законы изменения стабилизирующих ускорений представляют собой нелинейные функции компонент бикватерниона ошибки по линейному и угловому положению и компонент винта ошибки по линейной и угловой скорости твердого тела. Эти законы, реализуемые в системах управления пространственным движением тела, образуют нелинейные обратные связи по положению и скорости тела с дуальными скалярными или бикватернионными коэффициентами усиления нелинейных обратных связей.

Нелинейные нестационарные ДУ возмущенного пространственного движения тела, замкнутые построенными законами управления, принимают вид линейных бикватернионных

тернионных ДУ второго порядка, инвариантных относительно любого выбранного программного движения тела, имеющих постоянные дуальные скалярные или бикватернионные коэффициенты. Эти коэффициенты уравнений являются коэффициентами усиления нелинейных обратных связей (коэффициентами построенных законов стабилизирующего управления). Поэтому динамика управляемого пространственного движения тела для таких законов управления полностью описывается линейными стационарными бикватернионными или дуальными матричными ДУ, приведенными в п. 5, а задача нахождения необходимых значений коэффициентов усиления нелинейных обратных связей, обеспечивающих асимптотическую устойчивость и другие требуемые качественные и количественные характеристики управляемого движения тела, сводится к задаче выбора коэффициентов этих уравнений. Эта задача имеет не единственное решение и может быть решена на основе анализа общих аналитических решений эталонных ДУ, исходя из требуемых качественных и количественных характеристик переходных процессов управления и исходя из имеющихся ограничений на максимально допустимые скорости и ускорения тела. К качественным характеристикам относятся устойчивость (асимптотическая или неасимптотическая), вид процесса (колебательный, колебательный затухающий, апериодический), оптимальность в том или ином смысле. К количественным характеристикам относятся периоды и частоты колебаний, коэффициенты затухания, перерегулирование, запасы устойчивости, время переходного процесса и другие. С точки зрения теории управления задача выбора коэффициентов эталонных линейных стационарных дифференциальных форм может рассматриваться как задача параметрического синтеза, модального управления, а также может рассматриваться в других постановках.

7.1. Случай дуальных скалярных коэффициентов усиления обратных связей. Рассмотрим случай дуальных скалярных коэффициентов усиления обратных связей, когда эти коэффициенты определяются соотношениями $P_0 = p_0 + sp_0^0$, $Q_{0k} = Q_0 = q_0 + sq_0^0$, $\mathbf{P}_v = 0$, $\mathbf{Q}_v = 0$; $P_0^* = p_0^* + sp_0^{0*}$, $Q_{0k}^* = Q_0^* = q_0^* + sq_0^{0*}$, $\mathbf{P}_v^* = 0$, $\mathbf{Q}_v^* = 0$. В этом случае бикватернионные эталонные ДУ (5.3) и (5.4) принимают одинаковый вид

$$\ddot{\mathbf{M}} + P_0\dot{\mathbf{M}} + Q_0\mathbf{M} = 0 \tag{7.1}$$

$$\ddot{\mathbf{M}}^* + P_0^*\dot{\mathbf{M}}^* + Q_0^*\mathbf{M}^* = 0 \tag{7.2}$$

Уравнения (7.1) и (7.2) распадаются на отдельные независимые дуальные скалярные ДУ второго порядка относительно четырех дуальных переменных M_j и M_j^* с постоянными дуальными коэффициентами $P_0 = p_0 + sp_0^0$, $Q_0 = q_0 + sq_0^0$ и $P_0^* = p_0^* + sp_0^{0*}$, $Q_0^* = q_0^* + sq_0^{0*}$.

Полагая вещественные коэффициенты $p_0 > 0$, $q_0 > 0$, запишем общее решение бикватернионного ДУ (7.1) (решение уравнения (7.2) совпадает по своей форме с решением уравнения (7.1)) для значений p_0 и q_0, удовлетворяющих условиям

$$p_0/2 < q_0^{1/2} \quad (p_0^2 < 4q_0) \tag{7.3}$$

Имеем

$$\mathbf{M} = e^{-Kt}(\mathbf{C}_1\cos(Lt) + \mathbf{C}_2\sin(Lt)) \tag{7.4}$$

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{M}} = -K\mathbf{M} + Le^{-Kt}(\mathbf{C}_2\cos(Lt) - \mathbf{C}_1\sin(Lt)) \\ \mathbf{C}_1 = \mathbf{M}(0), \quad \mathbf{C}_2 = L^{-1}(\dot{\mathbf{M}}(0) + K\mathbf{M}(0))\end{gathered} \tag{7.5}$$

Здесь $K = P_0/2$, $L = (Q_0 - (P_0/2)^2)^{1/2}$; $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ – произвольные бикватернионные постоянные интегрирования, определяемые начальными (для момента времени

$t = t_0 = 0$) значениями $\mathbf{M}(0)$ и $\dot{\mathbf{M}}(0)$ бикватернионов $\mathbf{M}$ и $\dot{\mathbf{M}}$, связанными с начальными значениями $\boldsymbol{\Lambda}^{\oplus}(0)$ и $\mathbf{U}_x^{\oplus}(0)$ искомых переменных $\boldsymbol{\Lambda}^{\oplus}$ и $\mathbf{U}_x^{\oplus}$ соотношениями

$$\mathbf{M}(0) = \mathbf{N}_{\xi}^{\oplus}(0) - 1 = \boldsymbol{\Lambda}^{\oplus}(0) \circ \bar{\boldsymbol{\Lambda}}^{*}(0) - 1$$

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{M}}(0) = \dot{\mathbf{N}}_{\xi}^{\oplus}(0) = (1/2)\delta\mathbf{U}_{\xi}^{\oplus}(0) \circ \mathbf{N}_{\xi}^{\oplus}(0) = \\ = (1/2)\boldsymbol{\Lambda}^{\oplus}(0) \circ \delta\mathbf{U}_x^{\oplus}(0) \circ \boldsymbol{\Lambda}^{\oplus -1}(0) \circ \mathbf{N}_{\xi}^{\oplus}(0) = (1/2)\boldsymbol{\Lambda}^{\oplus}(0) \circ \delta\mathbf{U}_x^{\oplus}(0) \circ \bar{\boldsymbol{\Lambda}}^{*}(0)\end{gathered} \tag{7.6}$$

$$\delta\mathbf{U}_x^{\oplus}(0) = \mathbf{U}_x^{\oplus}(0) - \mathbf{U}_z^{*}(0) = U_0(0) + \mathbf{U}_x(0) - \mathbf{U}_z^{*}(0)$$

Как видно из соотношений (7.4) и (7.5), для скалярных $p_0 > 0$ и $q_0 > 0$, удовлетворяющих условиям (7.3), значение бикватерниона $\mathbf{N}_{\xi}^{\oplus} = \mathbf{M} + 1$ ошибки ориентации и местоположения твердого тела в ИСК ξ и ее первой производной по времени $\dot{\mathbf{N}}_{\xi}^{\oplus} = \dot{\mathbf{M}}$ в процессе управления стремятся асимптотически к единице и нулю, что соответствует переводу тела, имеющего произвольные начальные угловую и линейную скорости, из произвольного начального углового и линейного положения на любую заданную программную траекторию и дальнейшему асимптотически устойчивому движению тела по программной траектории с требуемыми программными угловой и линейной скоростями и программными угловым и линейным ускорениями. При этом законы изменения всех дуальных скалярных переменных $M_0 = N_{\xi 0} - 1$, $M_i = N_{\xi i}$ $(i = 1, 2, 3)$ и $\dot{M}_j = \dot{N}_{\xi j}$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ в процессе управления для дуальных скалярных коэффициентов $P_0 = p_0 + sp_0^0$ и $Q_0 = q_0 + sq_0^0$ усиления нелинейных обратных связей носят качественно одинаковый характер (затухающий колебательный) и имеют такие одинаковые количественные характеристики, как частоты (периоды) колебаний, коэффициенты затухания. Отметим, что для вещественных скалярных $p_0 > 0$ и $q_0 > 0$ в случаях $p_0/2 = q_0^{1/2}$ и $p_0/2 > q_0^{1/2}$ законы изменения всех указанных дуальных переменных в процессе управления для дуальных скалярных коэффициентов P_0 и Q_0 будут иметь одинаковый затухающий апериодический характер.

Анализ соотношений (7.4) и (7.5) показывает, что управляемое движение носит характер плоского винтового движения тела в случае, когда $\dot{\mathbf{N}}_{\xi}^{\oplus}(0) = \dot{\mathbf{M}}(0) = 0$ (когда начальные ошибки по угловой и линейной скоростям тела равны нулю), а также в случае, когда винтовые части $\mathbf{N}_{\xi v}^{\oplus}(0) = \mathbf{M}_v(0)$ и $\dot{\mathbf{N}}_{\xi v}^{\oplus}(0) = \dot{\mathbf{M}}_v(0)$ бикватернионов $\mathbf{N}_{\xi}^{\oplus}(0)$ и $\dot{\mathbf{N}}_{\xi}^{\oplus}(0)$ параллельны, что означает равенство нулю для начального момента времени ошибок по угловой и линейной скоростям тела или (во втором случае) параллельность для этого момента времени винта $\delta\mathbf{U}(0)$ ошибок по угловой и линейной скоростям тела и винта $\mathbf{N}_{\xi v}^{\oplus}(0) = \mathbf{M}_v(0)$ ошибок по угловому и линейному положениям.

Соотношения (7.3)–(7.6) позволяют определить необходимые значения дуальных скалярных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей P_0 и Q_0, исходя из требуемых качественных и количественных характеристик переходного процесса и исходя из имеющихся ограничений на максимально допустимые скорости и ускорения тела.

Отметим, что использование бикватернионных коэффициентов усиления нелинейных обратных связей по положению и скорости тела в общих законах управления пространственным движением тела (6.3) и (6.4) позволяет реализовать взаимосвязанную желаемую динамику каналов управления движением, оптимальную в том или ином смысле и описываемую бикватернионными линейными ДУ второго порядка (5.1) или (5.2) с бикватернионными коэффициентами.

7.2. Случай бикватернионных коэффициентов усиления обратных связей. Рассмотрим общее решение бикватернионного дифференциального уравнения возмущенного движения (5.3), которое получается из исходного бикватернионного уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела (3.20) при выборе стабилизирующего закона управления его движением в виде соотношения (6.3), и устойчивость процесса управления движением тела. Напомним, что если невозмущенному (программному) движению тела соответствует частное решение $\mathbf{N}_\xi^\oplus = 1$, $\dot{\mathbf{N}}_\xi^\oplus = 0$ уравнения (5.1), то этому движению тела соответствуют нулевое частное решение $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{M}} = 0$ уравнения (5.3).

Уравнение (5.3) является бикватернионным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными бикватернионными коэффициентами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, которые являются бикватернионными коэффициентами усиления нелинейных обратных связей в законе управления (6.3).

Уравнение (5.3) имеет общее аналитическое решение

$$\mathbf{M}(t) = e^{\mathbf{Z}_1 t} \circ \mathbf{C}_1 + e^{\mathbf{Z}_2 t} \circ \mathbf{C}_2, \tag{7.7}$$

где $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ – бикватернионные константы, зависящие от начальных условий движения, $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ – корни бикватернионного квадратного уравнения

$$\mathbf{Z}^2 + \mathbf{P} \circ \mathbf{Z} + \mathbf{Q} = 0, \tag{7.8}$$

являющегося бикватернионным аналогом характеристического уравнения; экспоненциал $e^{\mathbf{Z}t}$ определяется бикватернионным рядом

$$e^{\mathbf{Z}t} = 1 + \mathbf{Z}t + \frac{1}{2!}\mathbf{Z}t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{Z}t^3 + \ldots.$$

Отметим, что условие существования различных корней $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ бикватернионного характеристического уравнения (7.8) имеет вид дуального неравенства

$$P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 - \frac{1}{2}P_0(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)^{1/2} \neq 0,$$

которое является дуальным аналогом вещественного условия существования различных корней соответствующего кватернионного характеристического уравнения, рассмотренного в работах [4, 39].

Корни уравнения (7.8) могут быть найдены способом, описанным для кватернионного квадратного уравнения в [4], или с помощью применения принципа перенесения Котельникова–Штуди к построенному в этих работах решению квадратного кватернионного уравнения.

Установим условия асимптотической устойчивости процесса управления движением твердого тела, используя явное решение (7.7) бикватернионного уравнения возмущенного движения тела (5.3), соответствующего стабилизирующему закону управления движением (6.3).

Можно показать, что

$$e^{\mathbf{Z}t} = e^{Z_0 t}[\cos(|\mathbf{Z}_v|t) + |\mathbf{Z}_v|^{-1}\sin(|\mathbf{Z}_v|t)(Z_1\mathbf{i}_1 + Z_2\mathbf{i}_2 + Z_3\mathbf{i}_3)], \tag{7.9}$$

где $Z_j = z_j + sz_j^0$ – компонента бикватерниона $\mathbf{Z}$, $|\mathbf{Z}_v| = (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)^{1/2}$

Дуальная скалярная экспонента может быть представлена в виде

$$e^{Z_0 t} = \exp((z_0 + sz_0^0)t) = e^{z_0 t}(1 + sz_0^0 t) \tag{7.10}$$

Из (7.9) и (7.10) видно, что для асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (5.3) необходимо и достаточно, чтобы скалярные главные части z_{10} и z_{20}

двух корней $\mathbf{Z}_1$ и $\mathbf{Z}_2$ алгебраического бикватернионного уравнения (7.8) были отрицательны. В [4] приведены условия, накладываемые на главные части $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ бикватернионных коэффициентов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, при выполнении которых z_{10} и z_{20} будут отрицательны.

Такой же вывод в отношении асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (5.3) следует из представления бикватернионной экспоненты $e^{\mathbf{Z}t}$ в другом виде:

$$e^{\mathbf{Z}t} = \exp((\mathbf{z} + s\mathbf{z}^0)t) = e^{\mathbf{z}t}(1 + s\mathbf{z}^0 t)$$

$$e^{\mathbf{z}t} = e^{z_0 t}[\cos(|\mathbf{z}_v|t) + |\mathbf{z}_v|^{-1}\sin(|\mathbf{z}_v|t)(z_1\mathbf{i}_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3)],$$

где $\mathbf{z} = z_0 + z_1\mathbf{i}_1 + z_2\mathbf{i}_2 + z_3\mathbf{i}_3$ – кватернион, являющийся главной частью бикватерниона $\mathbf{Z} = \mathbf{z} + s\mathbf{z}^0$ (т.е. главной частью бикватернионного корня квадратного уравнения (7.8)), $|\mathbf{z}_v| = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^{1/2}$.

Видно, что в случае, когда $z_0 < 0$ (когда скалярная главная часть бикватерниона $\mathbf{Z}$ отрицательна), $e^{\mathbf{Z}t} \to 0$ при $t \to \infty$, так как $e^{z_0 t}$ убывает быстрее, чем растет t.

Вопрос оптимального выбора бикватернионных коэффициентов усиления обратных связей для построенных законов управления требует отдельного рассмотрения.

8. Алгоритм формирования управляющей силы и управляющего момента для бесплатформенной инерциальной системы управления движением космического аппарата (КА). Приведем указанный алгоритм в случае, когда дуальные коэффициенты усиления нелинейных обратных связей являются скалярными величинами: $\mathbf{P} = P_0$, $\mathbf{Q} = Q_0$. Алгоритм, построенный на основе уравнений, использующих ненормированные бикватернионы перемещений и бикватернионы абсолютных угловой и линейной скоростей и абсолютных углового и линейного ускорений с ненулевыми дуальными скалярными частями, образуется соотношениями

$$\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda} \circ \mathbf{U}_x(t), \quad \mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\lambda} + s\boldsymbol{\lambda}^0, \quad \mathbf{U}_x(t) = \boldsymbol{\omega}_x(t) + s\mathbf{v}_x(t) \tag{8.1}$$

$$\mathbf{N}_x = N_0 + \mathbf{N}_{vx} = \bar{\mathbf{\Lambda}}^*(t) \circ \Lambda, \quad \delta\mathbf{U}_x = \mathbf{U}_x(t) - \mathbf{U}_z^*(t) \tag{8.2}$$

$$\dot{\mathrm{K}} = -\frac{1}{2}U_0\mathrm{K}, \quad \dot{U}_0 = -2Q_0(1 - \mathrm{KN}_0) - P_0U_0 + \frac{1}{2}(|\delta\mathrm{U}(t)|^2 - U_0^2) \tag{8.3}$$

$$\delta\mathbf{H}_x = \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x + s\delta\mathbf{w}_x = -2Q_0\mathrm{K}\mathbf{N}_{vx} - (P_0 + U_0)\delta\mathbf{U}_x - \mathbf{U}_x \times \delta\mathbf{U}_x \tag{8.4}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_x = \boldsymbol{\varepsilon}_z^*(t) + \delta\boldsymbol{\varepsilon}_x, \quad \mathbf{w}_x = \mathbf{w}_z^*(t) + \delta\mathbf{w}_x, \quad \mathbf{r}_x = 2\bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \boldsymbol{\lambda}^0 \tag{8.5}$$

$$\mathbf{M}_{cx} = \mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_x - \mathbf{M}_x(t, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\omega}_x) \tag{8.6}$$

$$\mathbf{F}_{cx} = m[\mathbf{w}_x + \mathbf{K}(\boldsymbol{\omega}_x)\mathbf{v}_x] - \mathbf{F}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x) \tag{8.7}$$

В соответствии с этим алгоритмом, нормированный бикватернион $\mathbf{\Lambda}$, характеризующий действительную ориентацию и местоположение КА в инерциальной системе координат, находится по измеренному вектору $\boldsymbol{\omega}_x(t)$ абсолютной угловой скорости КА и вычисленному на бортовом вычислителе бесплатформенной инерциальной навигационной системы вектору $\mathbf{v}_x(t)$ абсолютной линейной скорости КА в результате численного интегрирования в реальном масштабе времени бикватернионного кинематического ДУ (8.1) по одному из алгоритмов, приведенных в [4] (п. 8.1 “Алгоритмы определения ориентации и местоположения тела в инерциальной системе координат”). По формулам (8.2) вычисляются нормированный бикватернион $\mathbf{N}_x$ ошибки ориентации и местоположения КА, его скалярная N_0 и винтовая $\mathbf{N}_{vx}$ части, а также бикватернион ошибки по угловой и линейной скоростям КА $\delta\mathbf{U}_x$, имеющий нулевую скалярную часть. Интегрирование в реальном масштабе времени системы двух дуальных скалярных ДУ (8.3) (начальные условия интегрирования: $K(0) = 1$, $U_0(0) = 0$) позволяет вычислить вспомогательные дуальные переменные K и U_0 (K – величина, обратная тензору ненормированного бикватерниона ошибки ориентации и местоположения КА $\mathbf{N}_x^{\oplus}$, определяемая соотношением (6.10); U_0 – дуальная скалярная часть бикватерниона $\delta\mathbf{U}_x^{\oplus}$ ошибки по абсолютной угловой скорости и абсолютной линейной скорости КА). С помощью соотношений (8.4) и (8.5) формируются в связанной системе координат векторы стабилизирующих $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_x$ и $\delta\mathbf{w}_x$ и полных $\boldsymbol{\varepsilon}_x$ и $\mathbf{w}_x$ абсолютных угловых ускорений и составляющих абсолютных линейных ускорений КА, а также его радиус-вектор $\mathbf{r}$. С помощью соотношений (8.6) и (8.7) вычисляются в итоге вектор управляющего момента $\mathbf{M}_{cx}$ и вектор управляющей силы $\mathbf{F}_{cx}$, действующие на КА.

Отметим, что интегрирование ДУ (8.3) обеспечивает автоматическую подстройку коэффициентов усиления (Q_0K) и $(P_0 + U_0)$ в стабилизирующем законе управления (8.4), в котором присутствуют отрицательные обратные связи по угловому и линейному положению и дуальной скорости КА.

Отметим также, что предложенный алгоритм управления (8.1)–(8.7) может быть использован для решения задачи перевода КА из его произвольного пространственного начального состояния (по положению и скорости) в требуемое состояние без использования программных управлениий и траекторий движения КА в силу обеспечения (при использовании этих законов) асимптотической устойчивости в целом любого пространственного состояния КА (частный случай этой задачи – перевод КА из его произвольного пространственного начального положения покоя в требуемое положение покоя). Алгоритм управления в этом случае существенно упрощается и получается из соотношений (8.1)–(8.7) при

$$\boldsymbol{\Lambda}^*(t) = 1, \quad (\mathbf{N}_x = \Lambda), \quad \mathbf{U}_z^*(t) = 0, \quad (\delta\mathbf{U}_x = \mathbf{U}_x(t)), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_z^*(t) = 0, \quad \mathbf{w}_z^*(t) = 0$$

9. Особенности предложенного бикватернионного метода построения законов управления пространственным движением твердого тела.

1) Для решения задачи управления пространственным движением твердого тела использованы бикватернионные модели движения свободного твердого тела (бикватернионные дифференциальные уравнения программного и возмущенного движения тела). В них фазовыми переменными являются параболические бикватернионы Клиффорда (дуальные кватернионы) конечных перемещений и бикватернионы угловых и линейных скоростей тела.

2) Для решения задачи также использована концепция решения обратных задач динамики, с помощью которой задача построения управляющего момента и управляющей силы сведена к задаче синтеза требуемого углового и линейного ускорений твердого тела. Последняя задача носит общий характер для всех движущихся объектов, рассматриваемых как твердое тело, и поэтому представляет самостоятельный интерес. Требуемые угловое и линейное ускорения формируются в виде суммы программного и стабилизирующего угловых и линейных ускорений. Построение программных углового и линейного ускорений может быть выполнено с помощью методов теории оптимального управления с учетом наложенных на них ограничений.

3) Для построения законов управления использованы, в отличие от общепринятых подходов, ненормированные бикватернионы конечных перемещений твердого тела. Использование нормированных бикватернионов перемещений в теории и практике управления движением твердого тела и роботов-манипуляторов стало достаточно распространенным, поскольку они являются наиболее компактным и удобным средством математического описания пространственного движения твердого тела. Ис-

пользование ненормированных бикватернионов перемещений приводит к необходимости введения расширенного (четырехмерного) бикватерниона управления с ненулевой дуальной скалярной частью вместо обычно используемого трехмерного винта управления (дуальной композиции трехмерных векторов углового и линейного ускорений) и позволяет построить регулярные в целом стабилизирующие законы управления движением. Роль переменных состояния тела играет в этом случае ненормированный бикватернион конечного перемещения тела и бикватернион кинематического винта с ненулевой дуальной скалярной частью. Такое введение дуального вектора состояния и дуального вектора управления позволяет провести синтез четырехмерного стабилизирующего управления в бикватернионном виде без разделения бикватернионных уравнений возмущенного движения на скалярную и винтовую части. Выделение скалярной и винтовой частей, необходимое для построения трехмерного винта управления, проводится на конечной стадии (в конечных соотношениях). При этом скалярные дифференциальные уравнения, описывающие изменение нормы бикватерниона конечного перемещения тела в процессе управления движением, входят в состав алгоритма управления и численно интегрируются в процессе управления движением, а в самом алгоритме управления движением используются нормированный бикватернион конечного перемещения и трехмерные векторы угловой и линейной скоростей и ускорений тела.

Решение задачи синтеза стабилизирующего управления на основе бикватернионных моделей возмущенного углового движения твердого тела, использующих нормированные бикватернионы конечных перемещений и бикватернионы кинематических винтов с нулевыми дуальными скалярными частями, требует разделения уравнений возмущенного движения на скалярную и винтовую части в рамках самой процедуры синтеза, что приводит к более сложному решению задачи синтеза. Кроме этого, законы управления, построенные на основе этих моделей в рамках предлагаемого нами метода синтеза управления, состоящего в приведении нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения тела к линейным стационарным дифференциальным формам за счет соответствующего выбора нелинейных нестационарных обратных связей, имеют особую точку $\varphi = 180°$, в которой законы управления вырождаются (φ — эйлеров угол поворота тела в возмущенном движении), в то время как использование при синтезе “четырехмерных” бикватернионов угловых и линейных скоростей и ускорений тела позволяет построить невырождающиеся (регулярные в целом) законы управления.

4) Центральную роль в построенной теории играют бикватернионные нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения твердого тела. Применение бикватернионов конечных перемещений позволяет построить компактные и наглядные уравнения возмущенного движения тела, удобные для построения асимптотически устойчивых в целом управлений ориентацией и местоположением тела. В статье рассматриваются два бикватернионных способа описания ошибок по угловому и линейному положениям тела: с помощью бикватерниона ошибки ориентации и местоположения, определенного своими дуальными компонентами в основной (инерциальной) системе координат, и с помощью бикватерниона ошибки ориентации и местоположения, определенного своими дуальными компонентами в связанной с телом системе координат (с помощью собственного бикватерниона ошибки ориентации и местоположения). Кроме этого, рассматриваются два способа описания ошибок по угловой и линейной скоростям, а также стабилизирующих углового и линейного ускорений тела: 1) винтовой, когда ошибки по угловой и линейной скоростям и стабилизирующие угловое и линейное ускорения формируются в виде винтовых разностей действительного и программного винтов скоростей тела и винтов действительного и программного ускорений; 2) формальный, когда ошибки по угловой и линейной скоростям и стабилизирующие угловое и линейное

ускорения формируются в виде разностей дуальных проекций соответствующих винтов, определенных в разных системах координат. Полученные с помощью этих способов дифференциальные уравнения возмущенного движения различаются как по форме, так и по смыслу используемых переменных, что приводит к разным бикватернионным законам формирования стабилизирующего управления.

5) Основное внимание в статье уделено нелинейному синтезу углового и линейного стабилизирующих ускорений твердого тела. Бикватернион стабилизирующих ускорений тела формируется по принципу обратной связи в виде нелинейной бикватернионной функции компонент бикватерниона ошибок ориентации и местоположения тела, а также дуальных компонент кинематического винта тела (дуальных композиций проекций векторов ошибок по угловой и линейной скоростям тела) так, чтобы нелинейные нестационарные дифференциальные уравнения возмущенного пространственного движения тела, замкнутые предлагаемыми законами управления, принимали эталонный вид, инвариантный относительно любого выбранного программного движения: вид линейных стационарных бикватернионных дифференциальных уравнений второго порядка относительно бикватернионной переменной, характеризующей конечные ошибки ориентации и местоположения тела (т.е. относительно бикватерниона ошибок ориентации и местоположения тела). Постоянные коэффициенты (дуальные скалярные или бикватернионные) этих (эталонных) уравнений имеют смысл коэффициентов усиления нелинейных обратных связей по угловому и линейному положениям, а также по угловой и линейной скоростям тела, реализуемых системой управления пространственным движением тела, а сами уравнения описывают эталонную динамику переходных процессов управления. Это позволяет аналитически точно определять дуальные коэффициенты усиления нелинейных обратных связей, исходя из желаемых качественных и количественных динамических характеристик переходного процесса управления.

6) Использование бикватернионов перемещений приводит к необходимым и достаточным условиям асимптотической устойчивости установившегося движения твердого тела по уравнениям первого приближения, отличающимся от традиционно используемых. Эти условия заключаются в требовании отрицательности вещественных скалярных частей двух корней бикватернионного квадратного характеристического уравнения вместо требования отрицательности вещественных частей двенадцати корней обычного характеристического уравнения в случае использования для описания движения твердого тела углов Эйлера—Крылова и прямоугольных декартовых координат. Это оказывается полезным при исследовании устойчивости и управления движением твердого тела.

7) С использованием предложенного метода синтеза стабилизирующих управлений построены два вида бикватернионных законов управления, соответствующих двум различным формам дифференциальных уравнений возмущенного пространственного движения твердого тела, с дуальными скалярными или бикватернионными коэффициентами усиления нелинейных обратных связей, которые позволяют реализовать развязанную или взаимосвязанную желаемую динамику каналов управления движением, оптимальную в том или ином смысле и описываемую дуальными бикватернионными линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными дуальными скалярными или бикватернионными коэффициентами. Управления обеспечивают асимптотически устойчивый в целом перевод тела, имеющего произвольные начальные угловую и линейную скорости, из его произвольного заранее незаданного начального углового и линейного положения на любую выбранную программную траекторию пространственного (углового и линейного) движения и дальнейшее асимптотически устойчивое движение тела по этой траектории с необходимыми (программными) угловыми и линейными скоростями и ускорениями. При этом переходный процесс управления имеет желаемые качественные и количественные ди-

намические характеристики. Отметим, что эти законы управления могут быть реализованы без использования программных управлений в случае перевода твердого тела из его заданного начального положения с заданными начальными скоростями в требуемое конечное положение с необходимыми конечными скоростями.

8) Построенные аналитические бикватернионные решения ДУ возмущенного пространственного движения тела, замкнутых предложенными бикватернионными законами управления, описывают динамику процесса управления пространственным движением тела. Они наглядно описывают свойства и закономерности управляемого движения тела и позволяют обоснованно выбрать дуальные скалярные или бикватернионные коэффициенты усиления нелинейных обратных связей, входящие в эти решения (в явном виде в случае дуальных скалярных коэффициентов), с учетом ограничений, наложенных на динамику процесса управления.

9) Использование бикватернионов в задачах механики и управления движением позволяет использовать мощный принцип перенесения Котельникова–Штуди, в соответствии с которым решение любой геометрической или кинематической задачи вращательного движения твердого тела может быть распространено на решение более общей задачи пространственного движения тела. Для этого необходимо в полученном решении задачи вращательного движения заменить векторы, вещественные числа, обычные углы, кватернионы на бивекторы (винты), дуальные числа, дуальные углы и бикватернионы соответственно.

Заключение. Предложен новый аналитический метод синтеза в нелинейной бикватернионной постановке управлений пространственным движением твердого тела (в частности, космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело), основанный на использовании ненормированных бикватернионов (дуальных кватернинов) перемещений тела и четырехмерных винтов скоростей и ускорений тела. Предложены бикватернионные законы управления движением тела, обеспечивающие нужную динамику (качество) переходных процессов управления.

Предлагаемые законы управления могут быть использованы в инерциальных системах управления пространственным движением подвижных объектов (в частности, для пространственного маневрирования КА, рассматриваемого как твердое тело), построенных на бесплатформенных принципах, когда подвижный объект имеет на своем борту бесплатформенную инерциальную навигационную систему, измеряющую проекции векторов абсолютной угловой скорости вращения и кажущегося ускорения объекта на связанные с ним координатные оси и вырабатывающую с помощью бортового вычислителя компоненты бикватерниона действительного углового и линейного положения объекта в инерциальной системе координат и проекции его абсолютной линейной скорости на связанные с ним координатные оси или на оси инерциальной системы координат. Эти законы управления могут быть также реализованы в системах управления движением роботов-манипуляторов, в которых используется принцип управления по абсолютному угловому и линейному положениям и по абсолютным угловой и линейной скоростям выходного звена робота-манипулятора.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 19-01-00205.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Clifford W.* Preliminary sketch of Bi-quaternions // Proc. London Math. Soc. 1873. P. 381–395.
2. *Котельников А.П.* Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань, 1895. 215 с.
3. *Котельников А.П.* Винты и комплексные числа // Изв. физ.-матем. общества при Казанском ун-те. 1896. Сер. 2. № 6. С. 23–33.
4. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения: Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.

5. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
6. *Маланин В.В., Стрелкова Н.А.* Оптимальное управление ориентацией и винтовым движением твердого тела. Москва–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004. 204 с.
7. *Стрелкова Н.А.* Оптимальное по быстродействию кинематическое управление винтовым перемещением твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. 4. С. 73–76.
8. *Челноков Ю.Н.* Об интегрировании кинематических уравнений винтового движения твердого тела // ПММ. 1980. Т. 44. 1. С. 32–39.
9. *Челноков Ю.Н.* Об одной форме уравнений инерциальной навигации // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. 5. С. 20–28.
10. *Han D., Qing Wei Q., Li Z.* Kinematic control of free rigid bodies using dual quaternions // Intern. J. Automat. Comput. 2008. V. 05. № 3. P. 319–324.
11. *Han D., Qing Wei, Li Z., Weimeng Sun.* Control of oriented mechanical systems: a method based on dual quaternion // Proc. 17th World Congress the International Federation of Automatic Control. Seoul, Korea, July 6–11. 2008. P. 3836–3841.
12. *Han D., Qing Wei, Li Z.* A Dual-quaternion method for control of spatial rigid body. networking, sensing and control // IEEE Intern. Conf. 6–8 April 2008. P. 1–6.
13. *Ozgur E., Mezouar Y.* Kinematic modeling and control of a robot arm using unit dual quaternions // Robot. Autonom. Systems. 2016. V. 77. P. 66–73.
14. *Челноков Ю.Н.* Бикватернионное решение кинематической задачи управления движением твердого тела и его приложение к решению обратных задач кинематики роботов-манипуляторов // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 1. С. 38–58.
15. *Челноков Ю.Н., Нелаева Е.И.* Бикватернионное решение кинематической задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. № 2. С. 198–206.
16. *Perez A., McCarthy J.M.* Dual quaternion synthesis of constrained robotic systems // J. Mech. Design. 2004. V. 126. № 3. P. 425–435.
17. *Han D., Wei Q., Li Z., Sun W.* Control of oriented mechanical systems: a method based on dual quaternions // Proc. 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea. P. 3836–3841. 2008.
18. *Schilling M.* Universally manipulable body models – dual quaternion representations in layered and dynamic MMCs // Autonomous Robots. 2011. P. 399–425.
19. *Zhang F., Duan G.* Robust integrated translation and rotation finite-time maneuver of a rigid spacecraft based on dual quaternion // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. 08–11 August. 2011. Portland, Oregon. USA., AIAA 2011-6396.
20. *Wang J., Sun Z.* 6DOF Robust adaptive terminal sliding mode control for spacecraft formation flying // Acta Astron. 2012. P. 76–87.
21. *Wang J., Liang H., Sun Z., Zhang S., Liu M.* Finite-time control for spacecraft formation with dual-number-based description // J. Guidance, Control, Dyn. 2012. V. 35. № 3. P. 950–962.
22. *Wang J., Yu C.* Unit dual quaternion-based feedback linearization tracking problem for attitude and position dynamics // Syst. Control Lett. 2013. V. 62 (3). P. 225–233.
23. *Filipe N., Tsiotras P.* Rigid body motion tracking without linear and angular velocity feedback using dual quaternions // IEEE. Europ. Control Conf. 2013. P. 329–334.
24. *Lee U.* State-constrained rotational and translational motion control with applications to monolithic and distributed spacecraft // A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. Program Authorized to Offer Degree: Aeronautics and Astronautics. Univer. of Washington. 2014.
25. *Filipe N., Kontitsis M., Tsiotras P.* Extended Kalman filter for spacecraft pose estimation using dual quaternions // J. Guidance, Control, Dyn. 2015. V. 38. № 4. P. 1625–1641.
26. *Filipe N., Tsiotras P.* Adaptive position and attitude–tracking controller for satellite proximity operations using dual quaternions // J. Guidance, Control, Dyn. 2015. V. 38. № 4. P. 566–577.
27. *Lee U., Mesbahi M.* Optimal power descent guidance with 6-DoF line of sight constraints via unit dual quaternions // AIAA Guidance, Navig., Control Conf. 2015.

28. *Lee U., Mesbahi M.* Optimal powered descent guidance with 6-DoF line of sight constraints via unit dual quaternions // Univ. of Washington, Seattle, WA 98195-2400 1 of 21 Amer. Inst. Aeron. Astron.
29. *Filipe N., Tsiotras P.* Adaptive position and attitude–tracking controller for satellite proximity operations using dual quaternions // J. Guidance, Control, Dyn. 2015. V. 38. № 4. P. 566–577.
30. *Gui H., Vukovich G.* Cite as dual-quaternion-based adaptive motion tracking of spacecraft with reduced control effort // Nonlin. Dyn. 2016. V. 83. Iss. 1–2. P. 597–614.
31. *Ахрамович С.А., Малышев В.В., Старков А.В.* Математическая модель движения беспилотного летательного аппарата в бикватернионной форме // Научно-техн. ж. “Полет”. 2018. Т. 4. С. 9–20.
32. *Ахрамович С.А., Малышев В.В.* Применение бикватернионов в задачах управления летательными аппаратами // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. Сборник. М.: МАИ, 2018. С. 117–120.
33. *Ахрамович С.А., Баринов А.В.* Система управления движением БПЛА с прогнозирующей моделью в бикватернионной форме // Системный анализ, управление и навигация: Тезисы докладов. Сборник. М.: МАИ, 2018. С. 120–122.
34. *Garcia C., Prett D.M., Morari M.* Model predictive control: theory and practice // Automatica. 1989. № 3. P. 335–348.
35. *Челноков Ю.Н.* Управление ориентацией космического аппарата, использующее кватернионы // Космич. исслед. 1994. Т. 32. Вып. 3. С. 21–32.
36. *Челноков Ю.Н.* Кватернионный синтез нелинейного управления ориентацией движущегося объекта // Изв. РАН. ТиСУ. 1995. Т. 2. С. 145–150.
37. *Челноков Ю.Н.* Построение управлений угловым движением твердого тела, использующее кватернионы и эталонные формы уравнений переходных процессов. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 2002. 1. С. 3–17.
38. *Челноков Ю.Н.* Построение управлений угловым движением твердого тела, использующее кватернионы и эталонные формы уравнений переходных процессов. Ч. 2 // Изв. РАН. МТТ. 2002. Т. 2. С. 3–17.
39. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.

Synthesis of Control of Spatial Motion of a Rigid Body Using Dual Quaternions

Yu. N. Chelnokov[a,#]

[a] *Precision Mechanics and Control Problems Institute of RAS, Saratov, Russia*
[#] *e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

In the nonlinear dynamic formulation using dual quaternions (Clifford biquaternions), a new method for analytically constructing the spatial motion of a rigid body (in particular, a spacecraft considered as a solid) has been developed. The control provides the asymptotic stability in general of any selected programmed motion in the inertial coordinate system and the desired dynamics of the controlled motion of the body. To construct control laws, new biquaternion differential equations of perturbed spatial motion of a rigid body are proposed, in which un normalized biquaternions of finite displacements, biquaternions of angular and linear velocities and body accelerations with nonzero dual scalar parts are used; the concept of solving the inverse problems of dynamics, the feedback control principle and the approach based on the reduction of the equations of the perturbed body motion to linear stationary differential forms of the selected structure, which are invariant with respect to any selected programmed motion, due to the corresponding choice of dual nonlinear feedbacks in the proposed biquaternion control laws. Analytical solutions of biquaternion differential equations are constructed that describe the dynamics of the process of controlling the spatial motion of a body using the proposed biquaternion control laws. The properties and patterns of such control are analyzed.

Keywords: rigid body, spatial motion, equations of perturbed motion, program and stabilizing controls, control laws, biquaternion, dual quaternion

REFERENCES

1. *Clifford W.* Preliminary sketch of Bi-quaternions // Proc. London Math. Soc. 1873. P. 381–395.
2. *Kotelnikov A.P.* Helical Calculus and Some of Its Applications to Geometry and Mechanics (Vintovoe schislenie i nekotorye prilozheniya ego k geometrii i mekhanike). Kazan', 1895. 215 s. (in Russian).
3. *Kotelnikov A.P.* Screws and complex numbers (Vinty i kompleksnye chisla) // Izv. fiz.-matem. Obshchestva pri Kazanskom un-te, 1896, ser. 2, no. 6, pp. 23–33. (in Russian)
4. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion and biquaternion models and methods of mechanics of solid bodie and its applications. geometry and kinematics of motion (Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ih prilozheniya. Geometriya i kinematika dvizheniya). M.: Fizmatlit, 2006. 512 p. (in Russian)
5. *Branets V.N., Shmyglevskij I.P.* Introduction to the theory of strapdown inertial navigation systems (Vvedenie v teoriju besplatformennyh inercial'nyh navigacionnyh system). M.: Nauka, 1992. 280 p. (in Russian)
6. *Malanin V.V., Strelkova N.A.* Optimal control of rigid body orientation and screw motion (Optimal'noe upravlenie orientaciej i vintovym dvizheniem tverdogo tela). Moscow; Izhevsk: NIC "Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika", 2004. 204 p. (in Russian)
7. *Strelkova N.A.* Time optimal kinematic control of rigid body screw motion (Optimal'noe po bystrodejstviju kinematicheskoe upravlenie vintovym peremeshheniem tverdogo tela) // Izv. AN SSSR. MTT, 1982, no. 4, pp. 73–76. (in Russian)
8. *Chelnokov Yu.N.* On integration of kinematic equations of a rigid body's screw-motion // JAMM, 1980, vol. 44, no. 1, pp. 19–23.
9. *Chelnokov Yu.N.* One form of the equations of inertial navigation // Mech. Solids, 1981, vol. 16, no. 5, pp. 16–23.
10. *Han D., Qing Wei Q., Li Z.* Kinematic control of free rigid bodies using dual quaternions // Intern. J. Automat., Comput., 2008, vol. 05, no. 3, pp. 319–324.
11. *Han D., Qing Wei, Li Z., Weimeng Sun.* Control of oriented mechanical systems: a method based on dual quaternion // Proc. 17th World Congress the International Federation of Automatic Control. Seoul, Korea, July 6–11. 2008. P. 3836–3841.
12. *Han D., Qing Wei, Li Z.* A dual-quaternion method for control of spatial rigid body. Networking, sensing and control // IEEE Intern. Conf. 6–8 April 2008. pp. 1–6.
13. *Ozgur E., Mezouar Y.* Kinematic modeling and control of arobot arm using unit dual quaternions // Robot., Autonom. Systems, 2016, vol. 77, pp. 66–73.
14. *Chelnokov Yu.N.* Biquaternion solution of the kinematic control problem for the motion of a rigid body and its application to the solution of inverse problems of robot-manipulator kinematics // Mech. Solids, 2013, vol. 48, no. 1, pp. 31–46.
15. *Chelnokov Yu.N., Nelaeva E.I.* Biquaternion solution of the kinematic problem of optimal nonlinear stabilization of arbitrary program movement of free rigid body (Bikvaternionnoe reshenie kinematicheskoj zadachi optimal'noj nelinejnoj stabilizacii proizvol'nogo programmnogo dvizheniya svobodnogo tverdogo tela) // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform., 2016, vol. 16, no. 2, pp. 198–206. (in Russian)
16. *Perez A., McCarthy J.M.* Dual quaternion synthesis of constrained robotic systems // J. Mech. Design, 2004, vol. 126, no. 3, pp. 425–435.
17. *Han D., Wei Q., Li Z., Sun W.* Control of oriented mechanical systems: a method based on dual quaternions // Proc. 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea. 2008, pp. 3836–3841.
18. *Schilling M.* Universally manipulable body models – dual quaternion representations in layered and dynamic MMCs // Autonom. Robots, 2011, pp. 399–425.
19. *Zhang F., Duan G.* Robust integrated translation androtation finite-time maneuver of a rigid spacecraft based on dual quaternion // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. 08–11 August. 2011. Portland, Oregon. USA, AIAA 2011–6396.
20. *Wang J., Sun Z.* 6DOF Robust adaptive terminal sliding mode control for spacecraft formation flying // Acta Astron., 2012, pp. 76–87.

21. *Wang J., Liang H., Sun Z., Zhang S., Liu M.* Finite-timecontrol for spacecraft formation with dual-number-based description // J. Guidance, Control, Dyn., 2012, vol. 35, no. 3, pp. 950–962.

22. *Wang J., Yu C.* Unit dual quaternion-based feedback linearization tracking problem for attitude and position dynamics // Sys. Control Lett., 2013, vol. 62, no. 3, pp. 225–233.

23. *Filipe N., Tsiotras P.* Rigid body motion tracking without linear and angular velocity feedback using dualquaternions // IEEE. Europ. Control Conf., 2013, pp. 329–334.

24. *Lee U.* State-constrained rotational and translational motion control with applications to monolithic and distributed spacecraft // A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy. Program Authorized to Offer Degree: Aeronautics and Astronautics. Univ. of Washington. 2014.

25. *Filipe N., Kontitsis M., Tsiotras P.* Extended Kalman filter for spacecraft pose estimation using dual quaternions // J. Guidance, Control, Dyn, 2015, vol. 38, no. 4, pp. 1625–1641.

26. *Filipe N., Tsiotras P.* Adaptive position and attitude-tracking controller for satellite proximity operations using dual quaternions // J. Guidance, Control Dyn., 2015, vol. 38, no. 4, pp. 566–577.

27. *Lee U., Mesbahi M.* Optimal power descent guidance with 6-DoF line of sight constraints via unit dual quaternions //AIAA Guidance, Navig., Control Conf. 2015.

28. *Lee U., Mesbahi M.* Optimal powered descent guidance with 6-DoF line of sight constraints via unit dual quaternions // Univ. of Washington, Seattle, WA 98195-2400 1 of 21 Amer. Inst. Aeron. Astron.

29. *Filipe N., Tsiotras P.* Adaptive position and attitude-tracking controller for satellite proximity operations using dual quaternions // J. Guidance, Control, Dyn., 2015, vol. 38, no. 4, pp. 566–577.

30. *Haichao Gui, Vukovich G.* Cite as dual-quaternion-based adaptive motion tracking of spacecraft with reduced control effort // Nonlin. Dyn., 2016, vol. 83, iss. 1–2, pp. 597–614.

31. *Ahramovich S.A., Malyshev V.V., Starkov A.V.* Mathematical model of movement of the pilotless flying device in the biquaternion form (Matematicheskaya model' dvizheniya bespilotnogo letatel'nogo apparata v bikvaternionnoj forme) // Nauchno-tekhnicheskij zhurnal “Polet”, 2018, no. 4, pp. 9–20. (in Russian)

32. *Ahramovich S.A., Malyshev V.V.* Application biquaternions in problems of management of flying devices (Primenenie bikvaternionov v zadachah upravleniya letatel'nymi apparatami) // Sistemnyj analiz, upravlenie i navigaciya: Tezisy dokladov. Sbornik. M.: MAI, 2018, pp. 117–120. (in Russian)

33. *Ahramovich S.A., Barinov A.V.* Control system of movement the pilotless flying device with predicting model in the biquaternion form (Sistema upravleniya dvizheniem BPLA s prognoziruyushchej model'yu v bikvaternionnoj forme) // Sistemnyj analiz, upravlenie i navigaciya: Tezisy dokladov. Sbornik. M.: MAI, 2018, pp. 120–122. (in Russian)

34. *Garcia C., Prett D.M., Morari M.* Model predictivecontrol: theory and practice // Automatica, 1989, no. 3, pp. 335–348.

35. *Chelnokov Yu.N.* Spacecraft attitude control using quaternions // Cosmic Res., 1994, vol. 32, no. 3, pp. 244–253.

36. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion research laws kinematic managements of orientation of a rigid body on angular speed // J. Comput., Systems Sci. Intern., 1995, vol. 40, no. 4, pp. 655–661.

37. *Chelnokov Yu.N.* Construction of attitude controls of a rigid body using quaternions and reference forms of equationsof transients. I // Mech. Solids, 2002, vol. 37, no. 1, pp. 1–12.

38. *Chelnokov Yu.N.* Construction of attitude controls of a rigid body using quaternions and reference forms of equationsof transients. II // Mech. Solids, 2002, vol. 37, no. 2, pp. 3–16.

39. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion Models and Methods of Motion Dynamics, Navigation, and Control (Kvaternionnye modeli i metody dinamiki, navigatsii i upravleniya dvizheniem. M.: Fizmatlit, 2011. 560 p. (in Russian)