ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2019, том 83, № 4, с. 519–529

УДК 531.36: 534.1

АЛГОРИТМ СТАБИЛИЗАЦИИ АФФИННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2019 г. В. И. Слынько[1,*]

[1]*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, Киев, Украина*
**e-mail: vitstab@ukr.net*

Поступила в редакцию 07.10.2018 г.
После доработки 25.02.2019 г.
Принята к публикации 19.03.2019 г.

Предложен алгоритм стабилизации аффинных периодических систем. Синтезирована линейная обратная связь с переменной матрицей, которая является периодической и кусочно-постоянной функцией времени. Приведен пример гашения резонансных параметрических колебаний линейного осциллятора.

Ключевые слова: алгоритм стабилизации, аффинная система с периодическими коэффициентами, кусочно-дифференцируемая функция Ляпунова, устойчивость по Ляпунову

DOI: 10.1134/S0032823519040143

Введение. Основные результаты теории линейных периодических систем (ЛПС) были достаточно полно изложены [1], в частности, приведены асимптотические методы Крылова–Боголюбова–Митропольского, теория параметрического резонанса Крейна–Гельфанда–Лидского, значительное количество приложений теории периодических систем к различным задачам механики. Предметом исследования были различные проблемы теории устойчивости гамильтоновых ЛПС [2–4]. Изучались нелинейные колебания механических систем с параметрическими возмущениями [5, 6].

Известно, что условия устойчивости ЛПС могут быть получены на основе теории Флоке–Ляпунова [7] и сводятся к вычислению матрицы монодромии ЛПС. Для нахождения матрицы монодромии необходимо проинтегрировать ЛПС на ее периоде, что можно сделать, в общем случае, используя численные или численно-аналитические методы. Более сложной проблемой оказалась задача о стабилизации ЛПС. В этом направлении известно не так много результатов, и все они связаны с определенными ограничениями, наложенными на класс рассматриваемых систем. Рассматривалась задача стабилизации ЛПС с обратной связью [8]. Путем построения решений одного класса параметрических периодических дифференциальных уравнений Ляпунова, получен явный вид непрерывной периодической обратной связи, которая стабилизирует ЛПС. Однако, для получения решения задачи о стабилизации ЛПС необходимо найти фундаментальную матрицу линейной системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Это можно сделать либо аналитически, если система относительно простая, либо путем численного интегрирования в общем случае.

Рассматривалась проблема Брокетта о расширении возможностей классической стабилизации линейных стационарных систем путем введения периодической обратной связи [9]: решение было получено путем применения различных кусочно-постоянных периодических функций обратной связи. Исследован параметрический резонанс линейных механических систем с одной степенью свободы с кусочно-постоянными параметрами [10], при помощи метода, основанного на композиции элементарных потоков линейных систем с постоянными коэффициентами и анализе спектральных свойств матрицы монодромии. Рассмотрение ЛПС с кусочно-постоянными коэффициентами оказалось весьма плодотворным и в задаче о стабилизации ЛПС [11, 12]. Методом дискретизации получены новые достаточные условия устойчивости ЛПС с кусочно-постоянными коэффициентами и предложен алгоритм синтеза управления по обратной связи, которое стабилизирует систему. Основная идея — приближенное решение матричного дифференциального уравнения Ляпунова с использованием матричных сплайнов. Получены условия устойчивости и предложен алгоритм построения линейной обратной связи с периодической кусочно-непрерывной матрицей.

Метод дискретизации [13, 14] в теории устойчивости движения приобрел значительную популярность, что связано с новыми возможностями компьютерных вычислений. Идея этого метода состоит в том, что для построения функции Ляпунова (или функционала Ляпунова—Красовского) нет необходимости точного решения матричного дифференциального уравнения Ляпунова. Достаточно ограничиться нахождением приближенного решения, поскольку, как правило, если функция Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости линейной системы найдена, то близкая к ней в определенном смысле функция, также будет функцией Ляпунова.

Ниже рассматривается задача о стабилизации аффинной системы с периодическими коэффициентами. Предлагается новый вариант метода дискретизации для построения стабилизирующих управлений аффинных систем с периодическими коэффициентами. Основное отличие предлагаемого подхода от известного [13, 14] состоит в применении кусочно-экспоненциальных аппроксимирующих функций, что требует привлечения алгебраических идей и методов коммутаторного исчисления. Таким образом, идеи и методы настоящей работы тесно связаны с Ли-алгебраическими подходами в теории устойчивости и управлении движением [15—19]. На основе этого подхода получены новые условия асимптотической устойчивости ЛПС дифференциальных уравнений, которые позволяют сформулировать простой алгоритм синтеза управления в виде линейной обратной связи с кусочно-постоянными коэффициентами.

Работа состоит из 5 разделов и организована следующим образом. Первый раздел посвящен постановке задачи о стабилизации аффинной системы с периодическими коэффициентами. Во втором разделе построена кусочно-дифференцируемая функция Ляпунова и установлены новые достаточные условия асимптотической устойчивости ЛПС. На основе этих условий в третьем разделе описан алгоритм стабилизации аффинных периодических систем. Четвертый раздел посвящен стабилизации параметрических резонансных колебаний математического маятника. В пятом разделе приведены основные выводы работы и очерчены дальнейшие направления исследований.

1. Постановка задачи. Рассмотрим аффинную систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t,x), \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ — кусочно-непрерывные отображения, $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Предположим, что существует положительное число θ такое, что $A(t+\theta) = A(t)$, $B(t+\theta) = B(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Пусть $u(t,x) = K(t)x$ — управление по обратной связи, где $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ является кусочно-непрерывным отображением.

Целью настоящей работы является синтез управления $u(t,x) = K(t)x$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость решения $x = 0$ замкнутой линейной системы дифференциальных уравнений (1.1) с кусочно-постоянной и θ-периодической матрицей $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Приведем некоторые сведения из линейной алгебры, необходимые для дальнейшего изложения, следуя в основном [20, 21].

Коммутатор двух матриц $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ определяется формулой

$$[A, B] = AB - BA,$$

вводит в $\mathbb{R}^{n\times n}$ структуру алгебры Ли. Оператор коммутирования ad_A, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ определяется как линейное отображение

$$\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad Y \mapsto \mathrm{ad}_A(Y) = [A, Y], \quad Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Пусть X, Y и Z — независимые матричные переменные, $F(X, Y)$ — формальный ряд от переменных X и Y, $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда поляризационное тождество

$$F(X + \lambda Z, Y) = F(X, Y) + \lambda F_1(X, Y, Z) + \lambda^2 F_2(X, Y, Z) + \ldots$$

определяет производную Хаусдорфа $\left(Z\dfrac{\partial}{\partial X}\right)F(X, Y) \overset{\mathrm{def}}{=} F_1(X, Y, Z)$.

Определим рекурсивно следующие лиевы многочлены от матричных переменных X и Y (определение и более подробные сведения о лиевых элементах можно найти в [21])

$$\{Y, X^0\} = Y, \quad \{Y, X^{l+1}\} = [\{Y, X^l\}, X], \quad l \in \mathbb{Z}_+$$

Легко видеть, что

$$\mathrm{ad}_X^l(Y) = (-1)^l\{Y, X^l\}$$

Тождества Ф. Хаусдорфа играют важную роль в дальнейшем изложении

$$\begin{aligned} e^{-X}\left(\left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right)e^X\right) &= Y + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}\{Y, X^k\} \\ \left(\left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right)e^X\right)e^{-X} &= Y + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\{Y, X^k\} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Для векторов $x \in \mathbb{R}^n$ используем евклидову норму $\|x\| = \sqrt{x^{\mathrm{T}}x}$, а для квадратных матриц порядка n будем пользоваться спектральной нормой: $\|A\| = \lambda_{\max}^{1/2}(A^{\mathrm{T}}A)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Через $\lambda_{\max}(\cdot)$ и $\lambda_{\min}(\cdot)$ будем обозначать максимальное и минимальное собственные значения симметричной матрицы, соответственно.

2. Функция Ляпунова и условия устойчивости ЛПС. Рассмотрим ЛПС

$$\frac{d}{dt}x(t) = C(t)x(t), \tag{2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ — кусочно-непрерывное θ-периодическое отображение, т.е. $C(t + \theta) = C(t)$.

Пусть N — фиксированное натуральное число, $h = \dfrac{\theta}{N}$. Для каждого $m = 0, \ldots, N - 1$ определим матрицы

$$\tilde{C}_m = \frac{1}{h}\int_{mh}^{(m+1)h} C(s)ds, \quad \hat{C}_m(t) = \int_{mh}^{t} C(s)ds, \quad t \in (mh, (m+1)h]$$

и положительные числа a_m, c_m, d_m, $m = 0, \ldots, N-1$ такие, что

$$\sup_{t\in(mh,(m+1)h]} \|C(t)\| \le a_m, \quad \frac{1}{h}\sup_{t\in(mh,(m+1)h]} \|[C(t), \hat{C}_m(t)]\| \le c_m$$
$$\frac{1}{h}\sup_{t\in(mh,(m+1)h]} \|\mathrm{ad}_{\hat{C}_m(t)}\| \le d_m$$

Пусть P_0 – некоторая симметричная положительно-определенная матрица, для каждого $m = 0, 1, \ldots, N-1$ определим последовательно симметричные положительно-определенные матрицы P_m

$$P_{m+1} = e^{-h\tilde{C}_m^{\mathrm{T}}} P_m e^{-h\tilde{C}_m}$$

Функцию Ляпунова выберем в виде $v(t, x) = x^{\mathrm{T}} P(t) x$, где $P(t)$ – кусочно-дифференцируемая, θ-периодическая симметричная положительно-определенная при всех $t \in \mathbb{R}$ матрица-функция от t, которую на интервале $(0, \theta]$ определим формулой

$$P(0+0) = P_0, \quad P(t) = e^{-\hat{C}_m^{\mathrm{T}}(t)} P_m e^{-\hat{C}_m(t)}$$
$$t \in (mh, (m+1)h], \quad m = 0, \ldots, N-1$$

Лемма 1. Пусть

$$\gamma_m = \frac{2\|P_m\|^{1/2} c_m}{\lambda_{\min}^{1/2}(P_m) d_m^2}(e^{d_m h} - 1 - d_m h), \quad m = 0, \ldots, N-1$$

Тогда при всех $t \in (mh, (m+1)h]$ справедлива оценка

$$\frac{d}{dt} v(t, x(t)) \le \frac{\gamma_m e^{2a_m(t-mh)}}{h} v(t, x(t))$$

Доказательство. Применяя цепное правило дифференцирования, получим при $t \in (mh, (m+1)h]$

$$\frac{d}{dt}P(t) = -\left(C^{\mathrm{T}}(t)\frac{\partial}{\partial X}e^X\right)\Big|_{X=-\hat{C}_m^{\mathrm{T}}(t)} P_m e^{-\hat{C}_m(t)} - e^{-\hat{C}_m^{\mathrm{T}}(t)} P_m \left(C(t)\frac{\partial}{\partial X}\right)e^X\Big|_{X=\hat{C}_m(t)}$$

Применяя тождества Хаусдорфа (1.2), получим

$$\frac{d}{dt}P(t) + C^{\mathrm{T}}(t)P(t) + P(t)C(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\{C(t), \hat{C}_m^k(t)\}\right)^{\mathrm{T}} P(t) +$$
$$+ P(t)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\{C(t), \hat{C}_m^k(t)\}\right)$$

Следовательно,

$$\frac{dv(t, x(t))}{dt} = x^{\mathrm{T}}(t)\left(\frac{d}{dt}P(t) + C^{\mathrm{T}}(t)P(t) + P(t)C(t)\right)x(t) =$$
$$= 2x^{\mathrm{T}}(t)P(t)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\{C(t), \hat{C}_m^k(t)\}\right)x(t) =$$

$$= 2(P^{1/2}(t)x(t))^{\mathrm{T}} P^{1/2}(t)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\{C(t),\hat{C}_m^k(t)\}\right)P^{-1/2}(t)P^{1/2}(t)x(t) \le$$

$$\le 2\left\|P^{1/2}(t)\right\|\left\|P^{-1/2}(t)\right\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left\|\{C(t),\hat{C}_m^k(t)\}\right\|}{(k+1)!}\left\|P^{1/2}(t)x(t)\right\|^2 \le$$

$$\le 2\left\|P^{1/2}(t)\right\|\left\|P^{-1/2}(t)\right\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{hc_m(hd_m)^{k-1}}{(k+1)!}v(t,x(t)) =$$

$$= \frac{2\left\|P^{1/2}(t)\right\|\left\|P^{-1/2}(t)\right\|c_m}{hd_m^2}(e^{d_m h} - 1 - d_m h)\left\|x(t)\right\|^2 \tag{2.2}$$

Поскольку, при $t \in (mh, (m+1)h]$

$$\left\|P^{1/2}(t)\right\| = \lambda_{\max}^{1/2}(P(t)) = \left\|P(t)\right\|^{1/2} = \left\|e^{-\hat{C}_m^{\mathrm{T}}(t)}P_m e^{-\hat{C}_m(t)}\right\|^{1/2} \le e^{a_m(t-mh)}\left\|P_m\right\|^{1/2}$$

$$\lambda_{\min}(P(t)) = \min_{\|x\|=1} x^{\mathrm{T}}P(t)x = \min_{\|x\|=1}(e^{-\hat{C}_m(t)}x)^{\mathrm{T}}P_m e^{-\hat{C}_m(t)}x \ge \lambda_{\min}(P_m)\times$$

$$\times \min_{\|x\|=1}\left\|e^{-\hat{C}_m(t)}x\right\|^2 \ge \min_{\|x\|=1}\lambda_{\min}(P_m)e^{-2a_m(t-mh)}\left\|x\right\|^2 = \lambda_{\min}(P_m)e^{-2a_m(t-mh)}$$

и

$$\left\|P^{-1/2}(t)\right\| = \lambda_{\max}^{1/2}(P^{-1}(t)) = \lambda_{\min}^{-1/2}(P(t)) \le \lambda_{\min}^{-1/2}(P_m)e^{a_m(t-mh)},$$

то

$$\frac{dv(t,x(t))}{dt} \le \frac{2\left\|P_m\right\|^{1/2}c_m e^{2a_m(t-mh)}}{\lambda_{\min}^{1/2}(P_m)hd_m^2}(e^{d_m h} - 1 - d_m h) \le \frac{\gamma_m e^{2a_m(t-mh)}}{h}v(t,x(t))$$

Лемма доказана.

Построенная функция Ляпунова и доказанная лемма 1 позволяет установить достаточные условия асимптотической устойчивости ЛПС (2.1).

Теорема 1. Предположим, что существует симметричная положительно-определенная матрица P_0 и положительная постоянная $h > 0$, $hN = \theta$ такие, что

$$\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\gamma_m(e^{2a_m h} - 1)}{2a_m h} + \ln\lambda_{\max}(P_N^{-1}P_0) < 0$$

Тогда ЛПС (2.1) асимптотически устойчива.

Доказательство. Из утверждения леммы 3.1 следует неравенство

$$v(\theta - 0, x(\theta - 0)) \le v(0 + 0, x(0 + 0))e^{\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\gamma_m(e^{2a_m h}-1)}{2a_m h}}$$

Поскольку

$$v(\theta + 0, x(\theta + 0)) = x^{\mathrm{T}}(\theta)P_0 x(\theta) = x^{\mathrm{T}}(\theta)P_N^{1/2}P_N^{-1/2}P_0 P_N^{-1/2}P_N^{1/2}x(\theta) \le$$

$$\le \lambda_{\max}(P_N^{-1/2}P_0 P_N^{-1/2})\left\|P_N^{1/2}x(\theta)\right\|^2 = \lambda_{\max}(P_N^{-1}P_0)v(\theta - 0, x(\theta - 0)) \le$$

$$\le \lambda_{\max}(P_N^{-1}P_0)e^{\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\gamma_m(e^{2a_m h}-1)}{2a_m h}}v(0 + 0, x(0 + 0)) := qv(0 + 0, x(0 + 0))$$

Вследствие периодичности линейной системы (2.1), очевидно следует, что

$$\|x(k\theta)\| \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_0)}{\lambda_{\min}(P_0)}} q^{k/2} \|x_0\|$$

Из условия теоремы следует, что $q \in (0,1)$, что доказывает асимптотическую устойчивость ЛПС (2.1). Теорема доказана.

Замечание 1. Важно отметить, что условия асимптотической устойчивости полученные в теореме 1 учитывают коммутационные свойства матриц $C(t)$ и $C_m(t)$. В частности, если матрица $C(t)$ удовлетворяет условиям Лаппо–Данилевского [22]

$$C(t)\int_{\tau}^{t} C(s)ds = \int_{\tau}^{t} C(s)dsC(t),$$

то $c_m \equiv 0$ и условия теоремы 1 являются необходимыми и достаточными условиями асимптотической устойчивости.

3. Алгоритм стабилизации аффинных систем с периодическими коэффициентами. Полученные в теореме 1 условия асимптотической устойчивости ЛПС позволяют предложить следующий алгоритм построения управления $u(t,x) = K(t)x$ с кусочно-постоянной матрицей $K(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Шаг 1. Выбираем количество шагов дискретизации N.

Шаг 2. Вычисляем длину шага дискретизации $h = \dfrac{\theta}{N}$. Для каждого $m = 0,\dots,N-1$ вычисляем матрицы

$$A_m = \frac{1}{h}\int_{mh}^{(m+1)h} A(s)ds, \quad B_m = \frac{1}{h}\int_{mh}^{(m+1)h} B(s)ds$$

Шаг 3. Для каждого $m = 0,\dots,N-1$ предполагая, что пара матриц (A_m, B_m) стабилизируемая, выбираем матрицу K_m так, чтобы матрица $\tilde{C}_m = A_m + B_m K_m$ удовлетворяла условиям Рауса–Гурвица.

Замечание 2. Если пара матриц (A_m, B_m) управляема, то матрицу K_m можно представить в явном виде, воспользовавшись результатами работы [23] (см. лемма 1).

$$K_m = -B_m^{\mathrm{T}} N_{\lambda_m,m}^{-1}(t_{1m}), \quad N_{\lambda_m,m}(t_{1m}) = \int_0^{t_{1m}} W_m(s)ds$$

$$W_m(t) = e^{-2\lambda_m t} e^{-A_m t} B_m B_m^{\mathrm{T}} e^{-A_m^{\mathrm{T}} t},$$

где λ_m и t_{1m} – произвольные числа, удовлетворяющие условиям $\lambda_m > 0$, $0 < t_{1m} \le +\infty$, причем при $t_{1m} = +\infty$ следует выбрать число λ_m так, чтобы

$$\lambda_m > \max_{\lambda\in\sigma(A_m)} \mathrm{Re}(-\lambda)$$

Здесь $\sigma(\cdot)$ – спектр соответствующей матрицы.

Если такой выбор матрицы K_m невозможен, то увеличиваем N и возвращаемся к шагу 1, в противном случае, полагаем $K(t) = K_m$ при всех $t \in (mh,(m+1)h]$.

Шаг 4. Вычисляем матрицы

$$C(t) = C_m(t) = A(t) + B(t)K_m, \quad \hat{C}_m(t) = \int_{mh}^{t} (A(s) + B(s)K_m)ds,$$

$$t \in (mh,(m+1)h]$$

и положительные постоянные a_m, c_m и d_m такие, что

$$\sup_{t\in(mh,(m+1)h]}\|C(t)\| \le a_m, \quad \frac{1}{h}\sup_{t\in(mh,(m+1)h]}\|[C(t),\hat{C}_m(t)]\| \le c_m$$

$$\frac{1}{h}\sup_{t\in(mh,(m+1)h]}\|\mathrm{ad}_{\hat{C}_m(t)}\| \le d_m$$

Шаг 5. Вычисляем матрицу

$$\Phi = e^{h\tilde{C}_{N-1}}\dots e^{h\tilde{C}_m}$$

и проверяем условие $r_\sigma(\Phi) < 1$, где $r_\sigma(\cdot)$ — спектральный радиус соответствующей матрицы. Если это условие выполняется, то выбираем симметричную положительно-определенную матрицу P_0, удовлетворяющую линейному матричному неравенству

$$\Phi^{\mathrm{T}}P_0\Phi - P_0 \prec 0$$

Если условие $r_\sigma(\Phi) < 1$ не выполняется, то увеличиваем количество шагов дискретизации N возвращаемся к шагу 2.

Шаг 6. Последовательно вычисляем матрицы P_m

$$P_{m+1} = e^{-h\tilde{C}_m^{\mathrm{T}}}P_m e^{-h\tilde{C}_m}, \quad m = 0,\dots,N-1,$$

постоянные

$$\gamma_m = \frac{2\|P_m\|^{1/2}c_m}{\lambda_{\min}^{1/2}(P_m)d_m^2}(e^{d_m h} - 1 - d_m h), \quad m = 0,\dots,N-1$$

и проверяем выполнение неравенства

$$\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\gamma_m(e^{2a_m h}-1)}{2a_m h} + \ln\lambda_{\max}(P_N^{-1}P_0) < 0$$

Если это неравенство выполняется, то построенное кусочно-постоянное управление $u(t,x) = K(t)x$ стабилизирует исходную линейную систему. В этом случае останавливаем выполнение алгоритма.

Если эти неравенства не выполняются, то увеличиваем число N и возвращаемся к шагу 2.

4. Гашение резонансных колебаний линейного осциллятора. В качестве приложения предложенного алгоритма стабилизации ЛПС рассмотрим задачу о гашении резонансных колебаний линейного осциллятора, уравнение движения которого имеет вид [24]

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2(1 + \varepsilon\cos 2\omega_0 t)x(t) = u(t,x,\dot{x}), \tag{4.1}$$

где $x \in \mathbb{R}$, ω_0 — собственная частота колебаний осциллятора, $u(t,x,\dot{x})$ — управляющая сила.

В уравнении (4.1) перейдем к безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$:

$$x''(\tau) + (1 + \varepsilon\cos 2\tau)x(\tau) = \overline{u}(\tau,x,x'), \tag{4.2}$$

где $\overline{u}(\tau,x,x') = \dfrac{1}{\omega_0^2}u\left(\dfrac{\tau}{\omega_0},x,\omega_0 x'\right)$

Введем фазовые переменные $x_1 = x$, $x_2 = x'$ и представим уравнение (4.2) в виде аффинной системы с периодическими коэффициентами

$$\mathbf{x}'(\tau) = A(\tau)\mathbf{x}(\tau) + B(\tau)\mathbf{u}(\tau,\mathbf{x}(\tau)), \tag{4.3}$$

где

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1+\varepsilon\cos 2\tau) & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Управление $K(\tau)$ выберем в виде

$$K(\tau) = K_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k_{21}^{(m)} & k_{22}^{(m)} \end{pmatrix}, \quad \tau \in (mh, (m+1)h],$$

где $h = \dfrac{\pi}{N}$, N — число точек дискретизации. Нетрудно вычислить

$$A_m = \frac{1}{h}\int_{mh}^{(m+1)h} A(s)ds = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}(\sin 2(m+1)h - \sin 2mh)\right) & 0 \end{pmatrix}$$

и $B_m = B(\tau)$. Пусть $k_{22}^{(m)} = -2\mu$, $\mu \in (0,1)$, $k_{21}^{(m)} = \dfrac{\varepsilon}{2}(\sin 2(m+1)h - \sin 2mh)$, тогда

$$\tilde{C}_m = A_m + B_m K_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\mu \end{pmatrix} = \tilde{C}_0$$

— матрица, удовлетворяющая условию Рауса—Гурвица. Вычислим $C_m(\tau)$ и $\hat{C}_m(\tau)$

$$C_m(\tau) = A(\tau) + B(\tau)K_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1+\varepsilon\cos 2\tau) + k_{21}^{(m)} & k_{22}^{(m)} \end{pmatrix}$$

$$\hat{C}_m(\tau) = \int_{mh}^{\tau} A(s)ds + \int_{mh}^{\tau} B(s)dsK_m =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \tau - mh \\ -\left(\tau - mh + \frac{\varepsilon}{2}(\sin 2\tau - \sin 2mh)\right) + (\tau - mh)k_{21}^{(m)} & (\tau - mh)k_{22}^{(m)} \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что при всех $\tau \in (mh, (m+1)h]$ выполняются оценки

$$\|C(\tau)\| \le \sup_{t\in(mh,(m+1)h]} \|A(\tau)\| + \sup_{t\in[mh,(m+1)h]} \|B(\tau)\|\|K_m\| \le (1+\varepsilon) + \sqrt{8\mu^2 + 2\varepsilon^2 h^2} = a_m \equiv a_0$$

$$\left\|[C_m(\tau), \hat{C}_m(\tau)]\right\| \le 2\varepsilon h\sqrt{2 + 4\mu^2} = hc_m \equiv hc_0$$

Можно считать, что $d_m = 2a_0 = 2(1 + \varepsilon + \sqrt{8\mu^2 + 2\varepsilon^2 h^2})$. Пусть $P_0 = I$, тогда учитывая формулу для матрицы $e^{-\tilde{C}_0\tau}$

$$e^{-\tilde{C}_0\tau} = e^{\mu\tau}\begin{pmatrix} \cos\Omega\tau - \dfrac{\mu}{\Omega}\sin\Omega\tau & -\dfrac{\sin\Omega\tau}{\Omega} \\ \dfrac{\sin\Omega\tau}{\Omega} & \cos\Omega\tau + \dfrac{\mu}{\Omega}\sin\Omega\tau \end{pmatrix},$$

где $\Omega = \sqrt{1-\mu^2}$. Найдем норму и минимальное собственное значение матриц $P_m = e^{-\tilde{C}_0^{\mathrm{T}}mh}e^{-\tilde{C}_0 mh}$:

$$\lambda_{\min}(P_m) = e^{2\mu mh}\frac{1 - \mu^2\cos 2\psi_m - 2\mu|\sin\psi_m|\sqrt{1-\mu^2\cos^2\psi_m}}{\Omega^2}$$

$$\|P_m\| = e^{2\mu m h}\frac{1-\mu^2\cos 2\psi_m + 2\mu|\sin\psi_m|\sqrt{1-\mu^2\cos^2\psi_m}}{\Omega^2},$$

где $\psi_m = \Omega m h$.

Применение теоремы 1 приводит к следующему утверждению о стабилизации положения равновесия линейного осциллятора при параметрических возмущениях.

Предложение 1. Пусть N — натуральное число, $h = \dfrac{\pi}{N}$, $\Omega = \sqrt{1-\mu^2}$, $c_0 = 2\varepsilon\sqrt{2+4\mu^2}$, $a_0 = 1+\varepsilon+\sqrt{8\mu^2+2\varepsilon^2h^2}$, $\psi_m = \Omega m h$ и

$$\sigma = \frac{c_0(e^{2a_0h}-1)(e^{2a_0h}-1-2a_0h)}{4ha_0^3}$$

Тогда, если выполняется неравенство

$$\sigma\sum_{m=0}^{N-1}\left(\frac{1-\mu^2\cos 2\psi_m + 2\mu|\sin\psi_m|\sqrt{1-\mu^2\cos^2\psi_m}}{1-\mu^2\cos 2\psi_m - 2\mu|\sin\psi_m|\sqrt{1-\mu^2\cos^2\psi_m}}\right)^{1/2} - 2\pi\mu < 0,$$

то управление

$$u(t,x,\dot{x}) = -2\mu\omega_0\dot{x} + \frac{\varepsilon\omega_0^2}{2}(\sin 2(m+1)h - \sin 2mh)x, \quad t\in\left(\frac{mh}{\omega_0},\frac{(m+1)h}{\omega_0}\right], \tag{4.4}$$

где $m = 0,\dots,N-1$, продолженное периодическим образом на всю числовую ось $\mathbb{R}$, т.е. $u\left(t+\dfrac{\pi}{\omega_0},x,\dot{x}\right) = u(t,x,\dot{x})$, стабилизирует положение равновесия линейного осциллятора (4.1) при параметрических возмущениях.

Приведем численный пример. Для значений параметров $\mu = 0.25$, $\varepsilon = 0.2$ число переключений $N = 13$ гарантирует, что управление (4) стабилизирует положение равновесия маятника. При этом $k_{21}^{(m)}$ определяются таблицей значений.

m	0	1	2	3	4	5	6
$k_{21}^{(m)}$	0.0465	0.0358	0.0170	–0.0058	–0.0272	–0.0424	–0.0479
m	7	8	9	10	11	12	
$k_{21}^{(m)}$	–0.0424	–0.0272	–0.0058	0.0170	0.0358	0.0465	

5. Обсуждение результатов. Современное развитие вычислительных средств позволяет предложить численную реализацию алгоритма стабилизации аффинных периодических систем. Для дальнейших исследований представляет интерес распространения полученных результатов для нелинейных управляемых систем. Представленные результаты можно обобщать также в направлении построения более точных кусочно-экспоненциальных аппроксимаций решений дифференциальных матричных уравнений Ляпунова.

Часть работы выполнена за счет средств бюджетной программы НАН Украины по КПКВК 6541230 “Поддержка развития приоритетных направлений научных исследований”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 720 с.
2. *Зевин А.А.* К теории параметрических колебаний // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 1. С. 46–59.
3. *Каленова В.И., Морозов В.М.* О влиянии диссипативных и гироскопических сил на устойчивость одного класса линейных нестационарных систем // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 3. С. 386–397.
4. *Каленова В.И., Морозов В.М., Соболевский П.М.* Об устойчивости механических систем определенного класса // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 251–259.
5. *Сосницкий С.П.* Асимптотическая устойчивость равновесия параметрически возмущенных систем // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 4. С. 612–623.
6. *Зевин А.А.* Новый подход в теории устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 2. С. 206–224.
7. *Демидович Б.П.* Лекции по теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
8. *Zhou B., Duan G.-R.* Periodic Lyapunov equation based approaches to the stabilization of continuous-time periodic linear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2012. V. 57. № 8. P. 2139–2146.
9. *Леонов Г.А.* Алгоритмы линейной нестационарной стабилизации и проблема Брокета // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 5. С. 801–808.
10. *Голубев Ю.В.* Резонансы в линейных системах с одной степенью свободы с кусочно-постоянными параметрами // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 204–212.
11. *Li P., Lam J., Kwok K.-W., Lu R.* Stability and stabilization of periodic piecewise linear systems: A matrix polynomial approach // Automatica. 2018. V. 94. № 8. P. 1–8.
12. *Zhou J., Qian H.-M.* Point wise frequency responses framework for stability analysis in periodic time-varying systems // Intern. J. Systems Sci. 2017. V. 48. № 4. P. 715–728.
13. *Xiang W., Xiao J.* Stabilization of switched continuous-time systems with all modes unstable via dwell time switching // Automatica. 2014. V. 50. № 3. P. 940–945.
14. *Chen W.H., Ruan Z., Zheng W.X.* Stability and L^2-gain analysis for impulsive delay systems: An impulse-time-dependent discretized Lyapunov functional method // Automatica. 2017. V. 86. P. 129–137.
15. *Liberzon D., Hespanha J.P., Morse A.S.* Stability of switched systems: A Lie-algebraic condition // Systems & Control Lett. 1999. V. 37. P. 117–122.
16. *Agrachev A.A., Baryshnikov Yu., Liberzon D.* On robust Lie-algebraic stability conditions for switched linear systems // Systems & Control Lett. 2012. V. 61. P. 347–353.
17. *Слынько В.И.* Условия устойчивости линейных периодических обыкновенных дифференциальных уравнений // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 5. С. 169–191.
18. *Morin P., Pomet J.B., Samson V.* Design of homogeneous time-varying stabilizing control laws for drift less controllable systems via oscillatory approximation of Lie brackets in closed loop // SIAM J. Control Optim. 1999. V. 38. № 1. P. 22–49.
19. *Zuyev A.* Exponential stabilization of nonholonomic systems by means of oscillating controls // SIAM J. Control Optim. 2016. V. 54. № 3. P. 1678–1696.
20. *Magnus W.* On the exponential solution of differential equations for a linear operator // Commun. Pure Appl. Math. 1954. № 4. P. 649–673.
21. *Магнус В., Каррас Ф., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 456 с.
22. *Лаппо-Данилевский И.А.* Применение функций от матриц к теории систем линейных дифференциальных уравнений. М.: ГТТИ, 1957. 453 с.
23. *Коробов В.И., Луценко А.В.* Робастная стабилизация одного класса нелинейных систем // АиТ. 2014. Т. 75. № 8. С. 99–112.
24. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1988. 216 с.

Algorithm for Stabilization of Affine Periodic Systems

V. I. Slyn'ko[a,#]

[a]*Timoshenko Institute of Mechanics of the NASU, Kyiv, Ukraine*
[#]*e-mail: vitstab@ukr.net*

An algorithm for stabilizing affine periodic systems is proposed. Linear feedback with a variable matrix that is a periodic and piecewise constant function of time is synthesized. An example is given of damping resonant parametric oscillations of a linear oscillator.

Keywords: stabilization algorithm, affine system with periodic coefficients, pi-ecewise differentiable Lyapunov function, stability

REFERENCE

1. *Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M.* Linear differential equations with periodic coefficients, 2 volumes, 1975. 839 p.
2. *Zevin A.A.* The theory of parametric oscillations // JAMM, 2014, vol. 78, no. 1, pp. 30–38.
3. *Kalenova V.I., Morozov V.M.* The effect of dissipative and gyroscopic forces on the stability of a class of linear time-varying systems // JAMM, 2013, vol. 77, no 3, pp. 278–286.
4. *Kalenova V.I., Morozov V.M., Sobolevskii P.M.* The stability of a specific class of mechanical systems // JAMM, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 152–158.
5. *Sosnitskii S.P.* The asymptotic stability of the equilibrium of parametrically perturbed systems // JAMM, 2005, vol. 69, no. 4, pp. 553–563.
6. *Zevin A.A.* A new approach to the theory of the stability of linear canonical systems of differential equations with periodic coefficients // JAMM, 2004, vol. 68, no. 2, pp. 183–198.
7. *Demidovich B.P.* Lectures on the Mathematical Stability Theory. Moscow: Nauka, 1967. 472 p.
8. *Zhou B., Duan G.-R.* Periodic Lyapunov equation based approaches to the stabilization of continuous-time periodic linear systems // IEEE Trans. Automat. Control, 2012, vol. 57, no. 8, pp. 21–39.
9. *Leonov G.A.* Algorithms for linear time-dependent stabilization and the Brockett problem // JAMM, 2001, vol. 65, no. 5, pp. 777–783.
10. *Golubev Yu.F.* Resonances in linear systems with one degree of freedom and piecewise-constant parameters // JAMM, 1999, vol. 63, no. 2, pp. 197–204.
11. *Li P., Lam J., Kwok K.-W., Lu R.* Stability and stabilization of periodic piecewise linear systems: A matrix polynomial approach // Automatica, 2008, vol. 94, pp. 1–8.
12. *Zhou J., Qian H.-M.* Point wise frequency responses framework for stability analysis in periodic time-varying systems // Intern. J. Systems Sci., 2017, vol. 48, no. 4, pp. 715–728.
13. *Xiang W., Xiao J.* Stabilization of switched continuous-time systems with all modes unstable via dwell time switching // Automatica, 2014, vol. 50, pp. 940–945.
14. *Chen W.H., Ruan Z., Zheng W.X.* Stability and L2-gain analysis for impulsive delay systems: An impulse-time-dependent discretized Lyapunov functional method // Automatica, 2017, vol. 86, pp. 129–137.
15. *Liberzon D., Hespanha J.P., Morse A.S.* Stability of switched systems: A Lie-algebraic condition // Systems & Control Lett., 1999, vol. 37, pp. 117–122.
16. *Agrachev A.A., Baryshnikov Yu., Liberzon D.* On robust Lie-algebraic stability conditions for switched linear systems // Systems & Control Lett., 2012, vol. 61, pp. 347–353.
17. *Slyn'ko V.I.* Stability conditions for linear periodic systems of ordinary differential equations // Algebra i Analiz, 2018, vol. 30, no. 5, 169–191. (in Russian)
18. *Morin P., Pomet J.B., Samson V.* Design of homogeneous time-varying stabilizing control laws for drift less controllable systems via oscillatory approximation of Lie brackets in closed loop // SIAM J. Control Optim., 1999, vol. 38, no. 1, pp. 22–49.
19. *Zuyev A.* Exponential stabilization of nonholonomic systems by means of oscillating controls // SIAM J. Control Optim., 2016, vol. 54, no. 3, pp. 1678–1696.
20. *Magnus W.* On the exponential solution of differential equations for a linear operator // Commun. Pure Appl. Math., 1954, no. 4, pp. 649–673.
21. *Magnus W., Karrass A., Solitar D.* Combinatorial Group Theory. Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations. Reprint of the 1976 second edition, N.Y.: Dover Publications, 2004. 444 p.
22. *Lappo-Danilevsky I.A.* Application of Functions from Matrices to the Theory of Systems of Linear Differential Equations. Moscow: GTTI, 1957. 453 p. (in Russian)
23. *Korobov V.I., Lutsenko A.V.* Robust stabilization of one class of nonlinear systems // Autom. Remote Control, 2014, vol. 75, no. 8, pp. 1433–1444.
24. *Landau L.D., Lifschitz E.M.* Lehrbuch der Theoretischen Physik ("Landau-Lifschitz"), Band I., Mechanik. Berlin: Akademie-Verlag, 1987, 231 p.