

УДК 531.5: 534.1

ПЕРЕДВИЖЕНИЕ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПОДВЕШЕННОГО НА ТРОСЕ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ, С УСТРАНЕНИЕМ КОЛЕБАНИЙ© 2019 г. С. В. Русских^{1,2,*}, Ф. Н. Шклярчук^{2,1,**}¹Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия²Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

*e-mail: sergey.russkih@rambler.ru

**e-mail: shklyarchuk@list.ru

Поступила в редакцию 25.10.2018 г.

После доработки 23.01.2019 г.

Принята к публикации 19.03.2019 г.

Рассматривается нелинейная задача конечного передвижения тяжелого твердого тела, подвешенного на нерастяжимом безынерционном тросе переменной длины с управляемым горизонтальным перемещением точки подвеса. Требуется переместить тело за определенное время из начального положения покоя в заданное конечное положение покоя с устранением колебаний в конце операции. Закон изменения длины троса считается заданным, а управляемое перемещение точки его подвеса — неизвестным. Приближенное решение задачи кинематического управления колебаниями системы, описываемой двумя нелинейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами для умеренно больших углов поворота натянутого троса и тела, ищется в рядах с неизвестными коэффициентами по методу Бубнова–Галёркина с использованием заданных базисных функций времени, удовлетворяющих некоторым начальным и конечным условиям. Ускорение точки подвеса троса ищется в виде конечного ряда по синусам с неизвестными коэффициентами. Получена связанная система нелинейных алгебраических уравнений для всех неизвестных коэффициентов, в которую входят уравнения метода Бубнова–Галёркина и нефиксированные при выборе базисных функций начальные и конечные данные. Эта система уравнений решается по методу последовательных приближений с использованием в первом приближении решений линеаризованных уравнений. На примерах системы с тросом постоянной и переменной длины выполнены расчеты с анализом точности решений путем сравнения их с численными решениями нелинейных дифференциальных уравнений прямой задачи по методу Адамса при найденных законах управления.

Ключевые слова: тело на тросе, трос переменной длины, нелинейные колебания, устранение колебаний, терминальное управление, подъемно-транспортные механизмы

DOI: 10.1134/S003282351904012X

Введение. Задачи управления составными трансформируемыми системами, которые совершают конечные передвижения (перемещения и повороты), актуальны при исследовании подъемно-транспортных механизмов [1, 2], манипуляционных роботов [3, 4], виброударных систем [5, 6], ракет с разделяющимися ступенями [7], космических конструкций [8–11] и пр.

Общие вопросы теории управления большими системами, включая задачи управляемого передвижения системы из одного состояния в другое, рассмотрены во многих известных монографиях ([1, 12–14] и др.). В большинстве работ упругие колебания,

которые сопровождают нестационарные конечные передвижения систем или их частей, считаются малыми и в случае систем с постоянными параметрами описываются нормальными координатами, которые представляют относительные движения по собственным формам колебаний [1, 3, 15–21]. Точные решения линейных уравнений для нормальных координат записываются в виде интеграла, зависящего от неизвестных управляющих воздействий.

Для управления колебаниями по нескольким низшим собственным формам управляющие воздействия обычно ищутся в виде кусочно-линейных функций с неизвестными параметрами [1, 3] или в виде рядов заданных функций времени с неизвестными коэффициентами [15–20]. При этом в качестве заданных функций используются синусы и косинусы с частотами собственных колебаний [15–17]. В результате получаются высокочастотные, по отношению к рассматриваемому конечному времени управления, управляющие воздействия, вызывающие “ответные” колебания приводов и несущих конструкций. Кроме того, управляемая система при высокочастотном управляющем воздействии будет неробастной – малые отклонения по времени от установленного интервала управления или малые расхождения по динамическим характеристикам расчетной модели и реальной системы могут приводить к большим ошибкам. Поэтому управляющие функции должны быть достаточно простыми и гладкими, чтобы при пассивном управлении их можно было практически реализовать с помощью жестких приводов.

Был предложен [19, 20] альтернативный подход к определению силовых или кинематических управляющих воздействий при передвижении упругой системы за определенное время из одного состояния в другое с устранением упругих колебаний по нескольким низшим собственным формам. Для этого используются “простые” управляющие финитные функции (например, в виде одной волны синусоиды) при условии, что частоты подлежащих устранению собственных форм колебаний системы “настраиваются” в определенных соотношениях со временем управления. Необходимые для настройки собственные частоты получаются [21] путем минимизации квадратичного функционала с вариацией определенных параметров системы.

Рассмотрены колебания двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса [22, 23], устойчивость управляемых движений такого маятника переменной длины [24] и управление пространственным движением многозвенного маятника [25].

Решение задач управления колебаниями упругих нелинейных систем и систем с переменными параметрами представляет большие математические и вычислительные трудности. Такие задачи обычно решаются различными приближенными и численными методами [26].

В данной работе для решения нелинейной задачи конечного перемещения за определенное время тяжелого твердого тела, подвешенного на тросе переменной длины, из одного положения покоя в другое за счет управляемого горизонтального перемещения точки подвеса предложен новый подход с одновременным использованием метода Бубнова–Галёркина и метода последовательных приближений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую задачу передвижения за определенное время T тяжелого абсолютно твердого тела, подвешенного на тросе, из начального положения покоя в конечное положение покоя за счет заданного изменения длины троса и управляемого горизонтального перемещения точки его подвеса, рис. 1. Тело соединено с концом троса в точке I , расположенной выше центра тяжести тела (точка 2) на расстоянии l_2 . Рассматриваются два варианта пассивного управления системой: 1) динамическое (силовое) управление – определяется закон изменения горизонтальной силы $P(t)$ в точке подвеса, 2) кинематическое управление – определяется закон перемещения точки подвеса $u(t)$. В первом варианте в качестве обобщенных координат рассматриваются перемещение $u(t)$ и углы поворота натянутого троса $\varphi(t)$ и

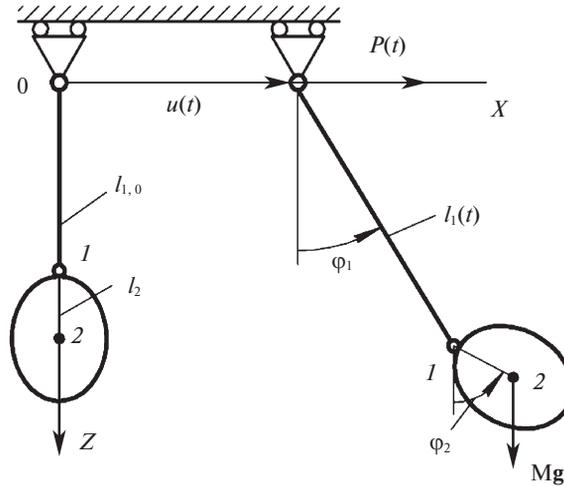


Рис. 1. Твердое тело, подвешенное на тросе переменной длины.

тела $\varphi_2(t)$, во втором варианте – только углы $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Начальные условия при $t = 0$ и конечные условия при $t = T$, представляющие устойчивые положения покоя системы, записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{u} = 0, \quad u = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \\ \dot{u} = 0, \quad u = u_T, \quad \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = 0, \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{при} \quad t = T, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u_T – заданное конечное горизонтальное перемещение точки подвеса троса.

Трос будем считать нерастяжимым, его инерцией будем пренебрегать и будем полагать, что его длина $l_1(t)$ изменяется за счет продольного перемещения верхнего конца по заданному закону при условиях

$$\dot{l}_1(0) = 0, \quad l_1(0) = l_{1,0}, \quad \dot{l}_1(T) = 0, \quad l_1(T) = l_{1,T} \quad (1.2)$$

Необходимо, чтобы усилие в тросе при $0 \leq t \leq T$ было растягивающим (чтобы он оставался прямолинейным). В частном случае длина троса может быть постоянной ($l_1 = \text{const}, \dot{l}_1 = 0$).

Координаты центра тяжести тела при $0 \leq t \leq T$:

$$x_2 = u + l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2, \quad z_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \quad (1.3)$$

Задача заключается в следующем: найти закон изменения управляющей силы $P(t)$ или управляющего перемещения $u(t)$, при которых тело за определенное время T перемещается из начального положения покоя

$$x_2 = 0, \quad z_2 = l_{1,0} + l_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad \text{при} \quad t = 0$$

в заданное конечное положение покоя

$$x_2 = u_T, \quad z_2 = l_{1,T} + l_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad \text{при} \quad t = T$$

с устранением колебаний при $t \geq T$. Здесь эту задачу будем решать в нелинейной постановке для умеренно больших углов поворота троса и тела ($|\varphi_1|, |\varphi_2| < 1$ в радианах).

2. Уравнения движения. Уравнения движения рассматриваемой системы получим по методу Лагранжа в обобщенных координатах. Кинетическая энергия системы и вариация работы управляющей силы P и силы тяжести тела Mg

$$K = \frac{1}{2}M(\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) + \frac{1}{2}J_2\dot{\phi}_2^2, \quad \delta A = P\delta u + Mg\delta z_2$$

с учетом равенств (1.3) записываются в виде

$$K = \frac{1}{2}M\dot{u}^2 + \frac{1}{2}M[\dot{l}_1^2 + l_1^2\dot{\phi}_1^2 + l_2^2\dot{\phi}_2^2 + 2\dot{u}\dot{l}_1 \sin \phi_1 + 2\dot{u}\dot{l}_1\dot{\phi}_1 \cos \phi_1 + 2\dot{u}\dot{l}_2\dot{\phi}_2 \cos \phi_2 + 2\dot{l}_1\dot{l}_2\dot{\phi}_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + 2l_1\dot{l}_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)] + \frac{1}{2}J_2\dot{\phi}_2^2$$

$$\delta A = P\delta u - Mg(l_1 \sin \phi_1 \delta \phi_1 + l_2 \sin \phi_2 \delta \phi_2), \quad (2.1)$$

где M и J_2 – масса и центральный массовый момент инерции тела, g – ускорение силы тяжести.

Уравнения Лагранжа для u , ϕ_1 и ϕ_2 после деления их, соответственно, на M , Ml_1 и Ml_2 будут:

$$\ddot{u} + \dot{l}_1 \sin \phi_1 + 2\dot{l}_1\dot{\phi}_1 \cos \phi_1 + l_1\ddot{\phi}_1 \cos \phi_1 - l_1\dot{\phi}_1^2 \sin \phi_1 + l_2\ddot{\phi}_2 \cos \phi_2 - l_2\dot{\phi}_2^2 \sin \phi_2 = \frac{1}{M}P \quad (2.2)$$

$$\ddot{u} \cos \phi_1 + l_1\ddot{\phi}_1 + l_2\ddot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + l_2\dot{\phi}_2^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + 2\dot{l}_1\dot{\phi}_1 + g \sin \phi_1 = 0 \quad (2.3)$$

$$\ddot{u} \cos \phi_2 + l_1\ddot{\phi}_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \left(l_2 + \frac{J_2}{Ml_2} \right) \ddot{\phi}_2 - l_1\dot{\phi}_1^2 \sin(\phi_1 - \phi_2) + 2\dot{l}_1\dot{\phi}_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \dot{l}_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) + g \sin \phi_2 = 0 \quad (2.4)$$

Для случая малых колебаний (при $\sin \phi \approx \phi$, $\cos \phi \approx 1$) уравнения (2.2)–(2.4) линеаризуются и принимают, соответственно, вид

$$\ddot{u} + \dot{l}_1\phi_1 + 2\dot{l}_1\dot{\phi}_1 + l_1\ddot{\phi}_1 + l_2\ddot{\phi}_2 = \frac{1}{M}P \quad (2.5)$$

$$\ddot{u} + l_1\ddot{\phi}_1 + l_2\ddot{\phi}_2 + 2\dot{l}_1\dot{\phi}_1 + g\phi_1 = 0 \quad (2.6)$$

$$\ddot{u} + l_1\ddot{\phi}_1 + \left(l_2 + \frac{J_2}{Ml_2} \right) \ddot{\phi}_2 + 2\dot{l}_1\dot{\phi}_1 + \dot{l}_1\phi_1 + (g - \ddot{l}_1)\phi_2 = 0 \quad (2.7)$$

Если из уравнения (2.2) определить величину \ddot{u} и подставить ее в уравнения (2.3) и (2.4), то после исключения \ddot{u} они запишутся в виде

$$l_1\ddot{\phi}_1 \sin^2 \phi_1 + l_2\ddot{\phi}_2 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + 2\dot{l}_1\dot{\phi}_1 \sin^2 \phi_1 + l_1\dot{\phi}_1^2 \sin \phi_1 \cos \phi_1 + l_2\dot{\phi}_2^2 \sin \phi_1 \cos \phi_2 + (g - \ddot{l}_1 \cos \phi_1) \sin \phi_1 + \frac{1}{M}P \cos \phi_1 = 0 \quad (2.8)$$

$$l_1\ddot{\phi}_1 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + \left(l_2 \sin^2 \phi_2 + \frac{J_2}{Ml_2} \right) \ddot{\phi}_2 + 2\dot{l}_1\dot{\phi}_1 \sin \phi_1 \sin \phi_2 + l_1\dot{\phi}_1^2 \cos \phi_1 \sin \phi_2 + l_2\dot{\phi}_2^2 \sin \phi_2 \cos \phi_2 + (g - \ddot{l}_1 \cos \phi_1) \sin \phi_2 + \frac{1}{M}P \cos \phi_2 = 0 \quad (2.9)$$

Эти уравнения можно использовать при управлении системой силой $P(t)$.

Чтобы найти перемещение $u(t)$, запишем уравнение (2.2) в виде

$$\ddot{u} + \frac{d^2}{dt^2}(l_1 \sin \phi_1 + l_2 \sin \phi_2) = \frac{1}{M}P$$

и проинтегрируем его дважды с учетом начальных условий (1.1) при $t = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{M_0} \int_0^t P(t_1) dt_1 - (\dot{l}_1 \sin \varphi_1 + l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2) \\ u &= \frac{1}{M_0} \int_0^t P(t_1)(t - t_1) dt_1 - (l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Удовлетворяя конечные условия (1.1) при $t = T$, получим

$$\int_0^T \ddot{u}(t) dt = 0, \quad \int_0^T P(t) dt = 0, \quad \int_0^T P(t) t dt + u_T = 0 \quad (2.11)$$

Для случая малых колебаний при силовом управлении вместо (2.8) и (2.9) используются соответствующие им линеаризованные уравнения

$$(g - \ddot{l}_1) \varphi_1 + \frac{1}{M} P = 0, \quad \frac{J_2}{M l_2} \ddot{\varphi}_2 + (g - \ddot{l}_1) \varphi_2 + \frac{1}{M} P = 0 \quad (2.12)$$

Из первого уравнения (2.12) следует, что при малых колебаниях сила $P(t)$ должна удовлетворять таким же начальным и конечным условиям как $\varphi_1(t)$:

$$P(0) = 0, \quad \dot{P}(0) = 0, \quad P(T) = 0, \quad \dot{P}(T) = 0 \quad (2.13)$$

Управляющая сила $P(t)$ ищется в виде финитной функции на интервале $0 \leq t \leq T$, которая удовлетворяет второму и третьему интегральным условиям (2.11) и начальным и конечным условиям (2.14). При выбранных путем проб с использованием уравнений (2.12) значениях T и u_T , а также функции $l_1(t)$, решение при действии силы $P(t)$ должно быть физически осуществимым (трос должен оставаться натянутым и прямолинейным). Для этого усилие натяжения троса N , которое можно определить из уравнения равновесия его верхнего конца

$$N \sin \varphi_1 + P = 0 \quad (2.14)$$

должно быть положительным, т.е. $N(t) > 0$.

В случае кинематического управления рассматриваемой системой с помощью ускорения $\ddot{u}(t)$ задача описывается уравнениями (2.3) и (2.4). Функция $\ddot{u}(t)$ ищется в классе финитных функций при $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющих первому условию (2.11). Кроме того, решения уравнений (2.3) и (2.4), линейно зависящих от ускорения $\ddot{u}(t)$, должны удовлетворять начальным и конечным условиям (1.1). При кинематическом управлении реакция $P(t)$ определяется из уравнения (2.2); затем из уравнения (2.14) находится усилие натяжения троса N . Можно получить другие тождественные выражения $N(t)$ в зависимости от параметров движения системы $u(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, если для преобразований использовать уравнения (2.2)–(2.4) и (2.8), (2.9). Например, умножив уравнения (2.3) на $\cos \varphi_1$ и вычтя из него уравнения (2.2), получим

$$\begin{aligned} \frac{N}{M} &= -\frac{P}{M \sin \varphi_1} = g \cos \varphi_1 - \ddot{l}_1 - \ddot{u} \sin \varphi_1 + l_1 \dot{\varphi}_1^2 - \\ &\quad - l_2 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2 \dot{\varphi}_2^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Рассматриваемая задача пассивного управления колебаниями системы имеет множество решений при различных управляющих финитных функциях $P(t)$ или $\ddot{u}(t)$ при $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющих интегральным условиям (2.11). При определении управляющих функций из этого класса прежде всего необходимо, чтобы они были приемлемы и удобны для практической реализации полученного расчетным путем пассивного управления с помощью “жестких” приводов. Управляющие воздействия должны быть

достаточно гладкими и не содержат высокочастотных составляющих, поскольку реальные приводы обладают упругостью и инерцией и в них могут возникнуть ответные колебания, искажающие расчетные управляющие воздействия.

Для минимизации энергетических затрат на управление различные подходящие управляющие функции можно сравнивать между собой по среднеквадратичной величине (норме) и по их максимальным значениям. При оптимальном управлении наряду с решением задачи управления необходимо минимизировать определенный функционал [1, 3, 14, 22].

3. Решение уравнений. Далее рассмотрим задачу кинематического управления перемещением твердого тела на тросе переменной длины с подвижной точкой подвеса из начального положения покоя в конечное положение покоя за определенное время T . Для приближенного решения этой задачи, описываемой нелинейными дифференциальными уравнениями (2.3), (2.4) с управляющей функцией $\ddot{u}(t)$ и с переменными коэффициентами на конечном интервале времени $0 \leq t \leq T$ будем использовать метод Бубнова–Галёркина совместно с методом последовательных приближений. Введем безразмерное время и безразмерные параметры:

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad \bar{l}_1 = \frac{l_1}{l_2}, \quad \bar{u} = \frac{u}{l_2}, \quad \lambda = \frac{gT^2}{l_2}, \quad \mu = 1 + \frac{J_2}{Ml_2^2} \quad (3.1)$$

Уравнения (2.3) и (2.4) запишем в безразмерном виде

$$\bar{u}'' \cos \varphi_1 + \bar{l}_1 \varphi_1'' + \varphi_2'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \lambda \sin \varphi_1 = 0 \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}'' \cos \varphi_2 + \bar{l}_1 \varphi_1'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mu \varphi_2'' - \bar{l}_1 \varphi_1'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + 2\bar{l}_1' \varphi_1' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \bar{l}_1'' \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \lambda \sin \varphi_2 = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где штрихом обозначается производная по τ ; $0 \leq \tau \leq 1$.

Соответствующие линеаризованные уравнения (2.6) и (2.7) имеют вид:

$$\bar{u}'' + \bar{l}_1 \varphi_1'' + \varphi_2'' + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \lambda \varphi_1 = 0 \quad (3.4)$$

$$\bar{u}'' + \bar{l}_1 \varphi_1'' + \mu \varphi_2'' + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \bar{l}_1'' \varphi_1 + (\lambda - \bar{l}_1'') \varphi_2 = 0 \quad (3.5)$$

Далее, для того чтобы при использовании метода последовательных приближений первое приближение представляло решение линеаризованных уравнений (3.4) и (3.5), их объединим, соответственно, с уравнениями (3.2) и (3.3), одновременно складывая и вычитая. Полученные уравнения запишем в виде

$$L_i(\bar{u}, \varphi_1, \varphi_2) + N_i(\bar{u}, \varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.6)$$

Здесь L_i и N_i – соответственно, линейные и нелинейные операторы:

$$\begin{aligned} L_1 &= \bar{u}'' + \bar{l}_1 \varphi_1'' + \varphi_2'' + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \lambda \varphi_1 \\ N_1 &= \bar{u}''(\cos \varphi_1 - 1) + \varphi_2''(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 1) + \\ &+ \varphi_2'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \lambda(\sin \varphi_1 - \varphi_1) \\ L_2 &= \bar{u}'' + \bar{l}_1 \varphi_1'' + \mu \varphi_2'' + 2\bar{l}_1' \varphi_1' + \bar{l}_1'' \varphi_1 + (\lambda - \bar{l}_1'') \varphi_2 \\ N_2 &= \bar{u}''(\cos \varphi_2 - 1) + \bar{l}_1 \varphi_1''(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 1) - \bar{l}_1 \varphi_1'^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ &+ 2\bar{l}_1' \varphi_1'(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 1) + \bar{l}_1''(\sin(\varphi_1 - \varphi_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)) + \lambda(\sin \varphi_2 - \varphi_2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Видно, что разложения нелинейных операторов N_i в ряды Тейлора при малых углах ϕ_i не содержат линейных членов с $\phi_i(\tau)$ и их производными.

Будем считать, что длина троса при передвижении груза изменяется по закону

$$\bar{l}_1(\tau) = \bar{l}_{1,0} + \bar{\Delta}_1(\tau); \quad \bar{\Delta}_1(\tau) = \frac{1}{2}(\bar{l}_{1,T} - \bar{l}_{1,0})(1 - \cos \pi\tau), \quad (3.8)$$

удовлетворяющему начальным и конечным условиям (1.2).

Закон управления горизонтальным перемещением точки подвеса троса с учетом начальных и конечных условий (1.1) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}'(\tau) &= \sum_{k=1}^n b_k \sin 2k\pi\tau, & \bar{u}(\tau) &= \sum_{k=1}^n b_k \frac{1}{2k\pi} (1 - \cos 2k\pi\tau) \\ \bar{u}(\tau) &= \sum_{k=1}^n b_k \frac{1}{2k\pi} \left(\tau - \frac{1}{2k\pi} \sin 2k\pi\tau \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где b_k – неизвестные коэффициенты, n – определенное в каждом конкретном случае число коэффициентов b_k , которое требуется, чтобы удовлетворялись все начальные и конечные условия (1.1). В частности, в конечный момент времени $\tau = 1$ должно выполняться условие для заданного перемещения точки подвеса $\bar{u}(1) = \bar{u}_T$, которое дает одно уравнение для коэффициентов b_k :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k\pi} b_k = \bar{u}_T \quad (3.10)$$

Приближенное решение уравнений (3.6) с учетом равенств (3.7) и (3.9) на интервале $0 \leq \tau \leq 1$ будем искать в рядах:

$$\varphi_i(\tau) = \sum_{r=0}^{s_i} c_{i,r} \sigma_r(\tau), \quad i = 1, 2, \quad (3.11)$$

где $c_{i,r}$ – неизвестные коэффициенты, $\sigma_r(\tau)$ – заданные базисные функции, удовлетворяющие части условий (1.1) для функций $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$. Здесь будем использовать систему базисных функций при $r = 0, 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \sigma_r(\tau) &= \cos r\pi\tau - \cos(r+1)\pi\tau \\ \sigma_r(0) = \sigma_r'(0) = \sigma_r'(1) &= 0, \quad \sigma_r(1) = 2 \cos r\pi \end{aligned} \quad (3.12)$$

Уравнения (3.6) удовлетворяем по методу Бубнова–Галёркина как

$$\int_0^1 [L_i(\bar{u}, \varphi_1, \varphi_2) + N_i(\bar{u}, \varphi_1, \varphi_2)] \sigma_{p_i}(\tau) d\tau = 0, \quad p_i = 0, 1, 2, \dots, s_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.13)$$

С учетом равенств (3.7) и (3.10) эти уравнения запишем в виде

$$\sum_{r=0}^{s_1} \alpha_{i1,p_i,r} c_{1,r} + \sum_{r=0}^{s_2} \alpha_{i2,p_i,r} c_{2,r} + \sum_{k=1}^n \gamma_{p_i,k} b_k + \beta_{i,p_i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (3.14)$$

Таблица 1. Исходные данные и результаты расчетов

| Случай | | a | b | v |
|--|-------|--------|--------|--------|
| $\bar{l}_{1,0}$ | | 4 | 4 | 5 |
| $\bar{l}_{1,T}$ | | — | 8 | 4 |
| \bar{u}_T | | 14 | 12.5 | 12 |
| Линейная задача | b_1 | 24.44 | −9.260 | 13.04 |
| | b_2 | 153.1 | 205.4 | 145.2 |
| | b_3 | −39.04 | −44.63 | −30.73 |
| Нелинейная задача | b_1 | 16.22 | −20.93 | 7.528 |
| | b_2 | 89.71 | 163.7 | 83.57 |
| | b_3 | 80.67 | 52.81 | 78.26 |
| $\frac{N(\tau)}{Mg}, 0 \leq \tau \leq 1$ | max | 1.289 | 1.530 | 1.222 |
| | min | 0.658 | 0.454 | 0.696 |
| Число последовательных приближений | | 91 | 25 | 45 |

где

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11,p,r} &= \left\langle \sigma_{p_1} (\bar{l}_1 \sigma_r'' + 2\bar{l}_1' \sigma_r' + \lambda \sigma_r) \right\rangle, & \alpha_{12,p,r} &= \left\langle \sigma_{p_1} \sigma_r'' \right\rangle \\
 \alpha_{21,p_2,r} &= \left\langle \sigma_{p_2} (\bar{l}_1 \sigma_r'' + 2\bar{l}_1' \sigma_r' + \bar{l}_1'' \sigma_r) \right\rangle \\
 \alpha_{22,p,r} &= \left\langle \sigma_{p_2} (\mu \sigma_r'' + (\lambda - \bar{l}_1'') \sigma_r) \right\rangle, & \gamma_{p,k} &= \left\langle \sigma_{p_i} \sin 2k\pi\tau \right\rangle \\
 \beta_{i,p_i} &= \left\langle N_i (\bar{u}, \varphi_1, \varphi_2) \sigma_{p_i} \right\rangle, & i &= 1, 2, & \langle f \rangle &= \int_0^1 f d\tau
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Система уравнений (3.14) должна быть дополнена уравнением (3.10), а также уравнениями, представляющими невыполненные начальные и конечные условия для функций $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$, которым не удовлетворяют заданные функции $\sigma_r(\tau)$.

При использовании базисных функций (3.12) дополнительные уравнения наряду с (3.10) получаются из условий $\varphi_i(1) = 0$ при $i = 1, 2$:

$$\sum_{r=0}^{s_i} c_{i,r} \sigma_r(1) = 0, \quad i = 1, 2 \tag{3.16}$$

В результате будем иметь систему $(s_1 + 1) + (s_2 + 1) + 3$ уравнений (3.14), (3.9) и (3.16), из которых наряду с коэффициентами $c_{1,r}$ и $c_{2,r}$ можно определить $n = 3$ неизвестных коэффициентов b_k при $k = 1, 2, 3$.

Для решения полученной системы алгебраических уравнений (3.14) с нелинейными членами β_{i,p_i} используется метод последовательных приближений. В качестве первого приближения ($v = 1$) берется решение по методу Бубнова–Галёркина линеаризованных уравнений (3.14) при $\beta_{i,p_i} = 0$ (т.е. при $N_1 \equiv 0, N_2 \equiv 0$). В v -м приближении ($v = 2, 3, \dots$) интегралы для коэффициентов β_{i,p_i} вычисляются численно с использова-

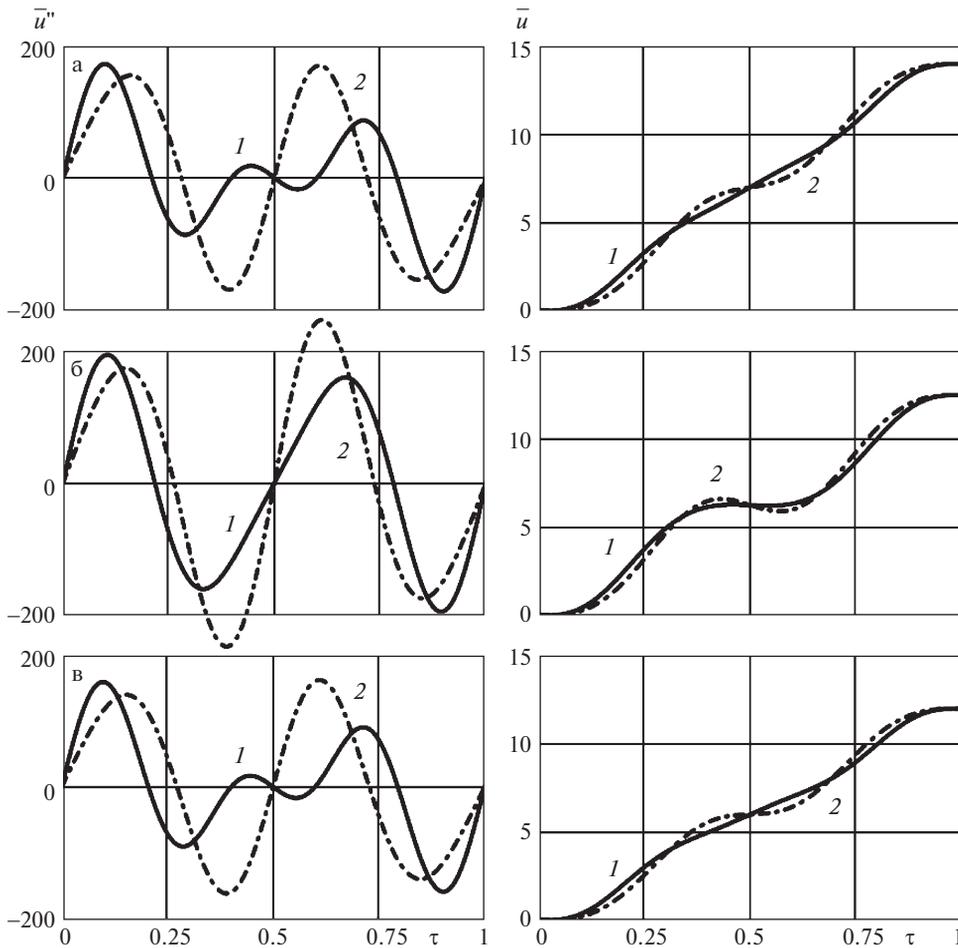


Рис. 2. Ускорения и перемещения точки подвеса.

нием выражений (3.7) для N_i с функциями $\bar{u}(\tau)$ и $\varphi_i(\tau)$, полученными в предыдущем, $(v - 1)$ -м, приближении как

$$\beta_{i,p_i}^{(v)} = \langle N_i(\bar{u}^{(v-1)}, \varphi_1^{(v-1)}, \varphi_2^{(v-1)}) \sigma_{p_i} \rangle, \quad i = 1, 2 \quad (3.17)$$

Приближения выполняются пока не будет достигнута требуемая точность.

4. Примеры расчета. Рассмотрим систему с безразмерными параметрами $\mu = 4/3$, $\lambda = 250$ (при $l_2 = 1$ м, $M = 1000$ кг и $g \approx 10$ м/с² это будет соответствовать $J_2 = 1000/3$ кг м², $T = 5$ с). В разложениях (3.11) для углов поворота $\varphi_i(\tau)$ используем базисные функции (3.12) при $r = 0, 1, \dots, 7$, $s_1 = s_2 = 7$; соответственно этому в разложениях (3.9) полагаем $n = 3$. В результате для определения неизвестных коэффициентов $c_{i,r}$ и b_k при $i = 1, 2$, $r = 0, 1, \dots, 7$, $k = 1, 2, 3$ будем иметь систему 19-ти уравнений (3.10), (3.14), (3.16). При расчетах параметры \bar{u}_T и $\bar{l}_1(\tau)$ будем подбирать такими, чтобы колебания были нелинейными с умеренно большими углами поворота $\varphi_i(\tau)$, т.е. (в радианах) $1/2 < |\varphi_1|, |\varphi_2| < 1$.

Точность приближенного решения задачи о нестационарных колебаниях нелинейной управляемой системы с переменными параметрами (при изменяемой по заданно-

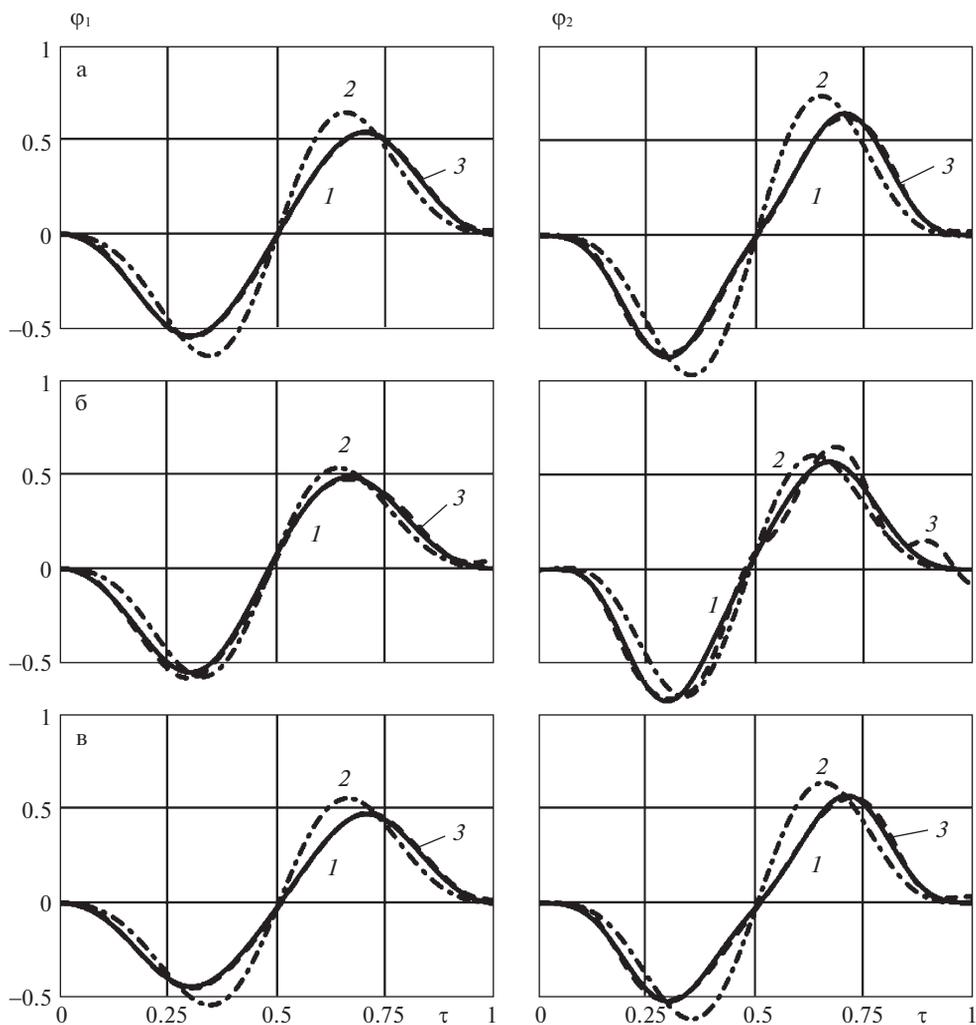


Рис. 3. Углы поворота троса и тела.

му закону длине троса $\bar{l}_1(\tau)$ оценивается путем сравнения с численным решением многошаговым конечно-разностным методом Адамса прямой задачи, описываемой нелинейными дифференциальными уравнениями (3.3) с начальными условиями

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0$$

При этом финитная управляющая функция $\bar{u}'(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$ берется в виде (3.9) при $n = 3$ с использованием найденных в приближенном решении коэффициентов b_1, b_2, b_3 . Результаты расчетов для трех случаев перемещения тела, когда длина троса не меняется, увеличивается и уменьшается (случаи *а*, *б* и *в* соответственно, см. табл. 1), показаны на рисунках со следующими обозначениями: сплошные линии 1 – решения задачи в нелинейной постановке; штрихпунктирные линии 2 – решения задачи в линейной постановке (в первом приближении); штриховые линии 3 – численные решения нелинейных дифференциальных уравнений прямой начальной задачи по методу Адамса.

В табл. 1 приведены исходные данные и результаты расчетов для трех вариантов (случаи a , b и v): начальная и конечная длина троса $\bar{l}_{1,0}$ и $\bar{l}_{1,T}$; величина горизонтального перемещения \bar{u}_T ; значения коэффициентов b_1 , b_2 , b_3 для линейной и нелинейной постановки; максимальное и минимальное значение силы натяжения троса, отнесенного к силе тяжести, $N(\tau)/Mg$ при $0 \leq \tau \leq 1$; число последовательных приближений при решении нелинейных уравнений (3.14) с точностью 10^{-6} . Отметим, что во всех случаях натяжение троса на всем времени интегрирования остается положительным и для случая a при $\tau = 0$ и $\tau = 1$ отношение $N(\tau)/Mg$ равно 1.

На рис. 2 приведены найденная управляющая функция $\bar{u}'(\tau)$ и соответствующее ей безразмерное перемещение точки подвеса троса $\bar{u}(\tau)$, которые определяются в виде (3.9), а на рис. 3 – углы поворота в радианах троса $\varphi_1(\tau)$ и тела $\varphi_2(\tau)$.

Заключение. Предложенный новый подход для решения задач терминального управления нелинейной системы с конечным числом степеней свободы и в общем случае с переменными параметрами, который основан на одновременном применении метода Бубнова–Галёркина и метода последовательных приближений с использованием в первом приближении решений линеаризованных уравнений, позволяет аппроксимировать финитную управляющую функцию в виде ряда по синусам или косинусам. Такие вполне гладкие управляющие функции пригодны для пассивного управления системой с помощью жестких приводов. Нелинейности системы оказывают большое влияние на искомую управляющую функцию даже при умеренных амплитудах нелинейных колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00778а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. Das S.K., Utiku S., Wada B.K. Inverse dynamics of adaptive space cranes with tip point adjustment // 31st Structures, Structural Dynamics and Materials Conf. 1990. P. 2367–2374.
3. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989. 363 с.
4. Chan J.K., Modi V.J. A Closed-form dynamical analysis of an orbiting flexible manipulator // Acta Astron. 1991. V. 25. № 2. P. 67–76.
5. Ковалева А.С. Управление колебательными и виброударными системами. М.: Наука, 1990. 256 с.
6. Болотник Н.Н., Зейдис И.М., Циммерманн К., Яцун С.Ф. Динамика управляемых движений вибрационных систем // Изв. РАН. Теор. и сист. упр. 2006. № 5. С. 157–167.
7. Колесников К.С., Кокушкин В.В., Борзых С.В., Панкова Н.В. Расчет и проектирование систем разделения ступеней ракет. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 376 с.
8. Nurre G.S., Ryan R.S., Scofield H.N., Sims J.I. Dynamics and control of large space structures, journal of guidance // Control and Dynamics. 1984. V. 7. № 5. P. 514–526.
9. Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. М.: Машиностроение, 1986. 216 с.
10. Meirovitch L., Kwak M.K. Control of flexible spacecraft with time-varying configuration // J. Control, Guidance, Dyn. 1992. V. 15. № 2. P. 314–324.
11. Русских С.В. Управляемый поворот космического аппарата с упругими панелями солнечных батарей // Изв. вузов. Машиностроение. 2016. № 12. С. 97–105.
12. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. М.: Наука, 1985. 352 с.
13. Ганиев Р.Ф., Закржевский А.Е. Программные движения управляемых деформируемых конструкций. М.: Наука, 1995. 214 с.
14. Матюхин В.И. Управление механическими системами. М.: Физматлит, 2009. 320 с.
15. Бербюк В.Б. Динамика и оптимизация робототехнических систем. Киев: Наукова думка, 1989. 187 с.

16. Кубышкин Е.П. Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 240–249.
17. Кубышкин Е.П. Оптимальное управление поворотом системы двух тел, соединенных упругим стержнем // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 5. С. 656–670.
18. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Управление конечным поворотом упругой системы из одного состояния в другое с гашением колебаний в момент окончания операции // Уч. зап. Казан. унив. Сер. физ.-мат. науки. 2017. Т. 159. Кн. 4. С. 429–443.
19. Гришанина Т.В. Динамика управляемого движения упругих систем при конечных перемещениях и поворотах // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 6. С. 171–186.
20. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика упругих управляемых конструкций. М.: Изд-во МАИ, 2007.
21. Гришанина Т.В., Русских С.В., Шклярчук Ф.Н. Устранение нестационарных колебаний упругой системы в момент остановки после конечного поворота по заданному закону путем настройки собственных частот // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 16–27.
22. Холостова О.В. О движениях двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 2. С. 25–40.
23. Буланчук П.О., Петров А.Г. Параметры вибрации точки подвеса для заданного положения равновесия двойного математического маятника // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 4. С. 31–39.
24. Асланов В.С., Безгласный С.П. Устойчивость и неустойчивость управляемых движений двухмассового маятника переменной длины // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 3. С. 32–46.
25. Ананьевский И.М., Анохин Н.В. Управление пространственным движением многозвенного перевернутого маятника с помощью момента, приложенного к первому звену // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 6. С. 755–765.
26. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 326 с.

Movement of Heavy Solid Body Suspended on Variable Length Cable with Elimination of Vibrations

S. V. Russkikh^{a,b,#} and F. N. Shklyarchuk^{b,a,##}

^a *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

^b *Institute of Applied Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: sergey.russkikh@rambler.ru*

^{##} *e-mail: shklyarchuk@list.ru*

The nonlinear problem of the terminal movement of a heavy solid body suspended on an inextensible inertialess cable of variable length with controlled horizontal movement of the suspension point is considered. It is required to move the body for a certain time from the initial resting position to the predetermined final resting position with the elimination of oscillations at the end of the operation. The law of change of the length of the cable is considered to be given, and the controlled movement of the point of its suspension is unknown. An approximate solution of the problem of kinematic control of oscillations of a system described by two nonlinear differential equations with variable coefficients for moderately large angles of rotation of the tensioned cable and body is sought in series with unknown coefficients by the Bubnov–Galerkin method using specified basic time functions satisfying some initial and final conditions. The acceleration of the point of suspension of the cable is sought in the form of a finite series of sines with unknown coefficients. A coupled system of nonlinear algebraic equations for all unknown coefficients is obtained, which includes the equations of the Bubnov–Galerkin method and the initial and final data that are not fixed when choosing the basis functions. This system of equations is solved by the method of successive approximations using, as a first approximation, solutions of linearized equations. For examples of a system with a cable of constant and variable length, calculations are performed with an analysis of the accuracy of the solutions by comparing them with the numerical solutions of nonlinear differential equations of the direct problem using the Adams method with the control laws found.

Keywords: body on a cable, a cable of variable length, non-linear vibrations, elimination of vibrations, terminal control, hoisting-and-transport mechanisms

REFERENCES

1. *Chernousko F.L., Akulenko L.D., Sokolov B.N.* Vibration Control (Upravlenie kolebanijami). Moscow: Nauka, 1980. 384 p. (in Russian)
2. *Das S.K., Utku S., Wada B.K.* Inverse dynamics of adaptive space cranes with tip point adjustment // 31st Structures, Structural Dynamics and Materials Conf., 1990, pp. 2367–2374.
3. *Chernousko F.L., Bolotnik N.N., Gradeckij V.G.* Manipulation Robots: Dynamics, Control, Optimization. Boca Raton: CRC Press, 1994. 288 p.
4. *Chan J.K., Modi V.J.* A closed-form dynamical analysis of an orbiting flexible manipulator // Acta Astronautica, 1991, vol. 25, no. 2, pp. 67–76.
5. *Kovaleva A.S.* Optimal Control of Mechanical Oscillations. Berlin: Springer, 1999. 264 p.
6. *Bolotnik N.N., Zejdis I.M., Cimmermann K., Jacun S.F.* Dynamics of controlled motion of vibration-driven systems // J. Comp. Sys. Sci. Intern., 2006, vol. 45, no. 5, pp. 831–840.
7. *Kolesnikov K.S., Kokushkin V.V., Borzyh S.V., Pankova N.V.* Calculation and Design of Rocket Stage Separation Systems (Raschet i proektirovanie sistem razdelenija stupenej raket). Moscow: MGТУ Bauman Publ., 2006. 376 p. (in Russian)
8. *Nurre G.S., Ryan R.S., Scofield H.N., Sims J.I.* Dynamics and control of large space structures, journal of guidance // Control and Dynamics, 1984, vol. 7, no. 5, pp. 514–526.
9. *Degtjarev G.L., Sirazetdinov T.K.* Theoretical Foundations of Optimal Control of Elastic Spacecraft (Teoreticheskie osnovy optimal'nogo upravlenija uprugimi kosmicheskimi apparatami). Moscow: Mashinostroenie, 1986. 216 p. (in Russian)
10. *Meirovitch L., Kwak M.K.* Control of flexible spacecraft with time-varying configuration // J. Control, Guidance, Dynamics, 1992, vol. 15, no. 2, pp. 314–324.
11. *Russkih S.V.* Controlled turning of a space vehicle with elastic solar panels // Proc. Higher Educ. Inst. Machine Building, 2016, vol. 12, pp. 97–105. (in Russian)
12. *Voronov A.A.* Introduction to the Dynamics of Complex Controlled Systems (Vvedenie v dinamiku slozhnyh upravljaemyh system). Moscow: Nauka, 1985. 352 p. (in Russian)
13. *Ganiev R.F., Zakrzhevskii A.E.* Programmed Motions of Deformable Controlled Constructions (Programmnye dvizhenija upravljaemyh deformiruemyh konstrukcij). Moscow: Nauka, 1995. 214 p. (in Russian)
14. *Matyuhin V.I.* Control of Mechanical Systems (Upravlenie mehanicheskimi sistemami). Moscow: Fizmatlit, 2009. 320 p. (in Russian)
15. *Berbyuk V.B.* Dynamics and Optimization of Robotic Systems (Dinamika i optimizacija robototekhnicheskikh system). Kiev: Naukova dumka, 1989. 187 p. (in Russian)
16. *Kubyshkin E.P.* Optimal control of the rotation of a solid with a flexible rod // JAMM, 1992, vol. 56, no. 2, pp. 205–214.
17. *Kubyshkin E.P.* Optimal control of the rotation of a system of two bodies connected by an elastic rod // JAMM, 2014, vol. 78, no. 5, pp. 468–479.
18. *Grishanina T.V., Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N.* Controlling the finite rotation of an elastic system from one state to another with vibration suppression at the final moment of operation // Uch. Zapiski Kazan. Univ. Ser. Fiziko-Matem. Nauki, 2017, vol. 159, no. 4, pp. 429–443. (in Russian)
19. *Grishanina T.V.* Dynamics of controlled motion of elastic systems subject to finite displacements and rotations // Mech. Solids, 2004, vol. 39, no. 6, pp.132–144.
20. *Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N.* Dynamics of Elastic Controlled Structures (Dinamika uprugih upravljaemyh konstrukcii). Moscow: MAI, 2007. 328 p. (in Russian)
21. *Grishanina T.V., Russkikh S.V., Shklyarchuk F.N.* Elimination of nonstationary oscillations of an elastic system at the stopping time after finite rotation by the given law via the tuning of eigenfrequencies // Mech. Solids, 2018, vol. 53, no. 4, pp. 370–380.
22. *Holostova O.V.* On the motions of a double pendulum with vibrating suspension point // Mech. Solids, 2009, vol. 44, no. 2, pp. 184–197.
23. *Bulanchuk P.O., Petrov A.G.* Suspension point vibration parameters for a given equilibrium of a double mathematical pendulum // Mech. Solids, 2013, vol. 48, no. 4, pp. 380–387.
24. *Aslanov B.C., Bezglasnyi S.P.* Stability and instability of controlled motions of a two-mass pendulum of variable length // Mech. Solids, 2012, vol. 47, no. 3, pp. 285–297.
25. *Anan'evskii I.M., Anokhin N.V.* Control of the spatial motion of a multilink inverted pendulum using a torque applied to the first link // JAMM, 2014, vol. 78, no. 6, pp. 543–550.
26. *Chernousko F.L., Anan'evskii I.M., Reshmin S.A.* Methods of control of non-linear mechanical systems (Metody upravlenija nelinejnymi mehanicheskimi sistemami). Moscow: Fizmatlit, 2006. 326 p. (in Russian)