

УДК 531.31

О ДВИЖЕНИИ ТРЕХКОЛЕСНОГО РОБОТА ПРИ НАЛИЧИИ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ВЕДУЩИХ КОЛЕС

© 2019 г. А. В. Карапетян^{1,*}, К. А. Катасонова^{1,**}

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: avkarapetyan@yandex.ru

**e-mail: xenia.katasonova@gmail.com

Поступила в редакцию 24.02.2019 г.

После доработки 10.03.2019 г.

Принята к публикации 19.03.2019 г.

Рассматривается задача о движении мобильного робота с двумя ведущими и одним пассивным колесом. Найдены все стационарные движения робота, исследованы их устойчивость и ветвление. В отличие от многочисленных публикаций по этой теме допускается проскальзывание этих колес, при этом предполагается, что в точках их контакта с опорной плоскостью приложены силы линейного вязкого трения.

Ключевые слова: трехколесный робот, проскальзывание колес, стационарные движения, устойчивость и бифуркации

DOI: 10.1134/S0032823519040076

1. Постановка задачи. Рассматривается движение трехколесного робота с двумя ведущими и одним пассивным колесом рояльного типа [1] на горизонтальной плоскости. Центр масс C робота лежит на горизонтальной ортогонали к оси подвеса ведущих колес, проходящей через середину этой оси. Центры колес обозначим через C_1 и C_2 , а их точки контакта с опорной плоскостью — через K_1 и K_2 . Радиусы ведущих колес обозначим через a , расстояние между центрами колес — через $2b$, расстояние от центра масс робота до оси подвеса ведущих колес — через c . Радиус пассивного колеса, как и ранее, будем считать пренебрежимо малым.

Пусть $Ox\eta z$ — неподвижная система координат ($Ox\eta$ — опорная плоскость, Oz — вертикаль), а $C\xi\eta\zeta$ — система координат, жестко связанная с корпусом робота ($C\xi$ проходит через середину оси подвеса ведущих колес, $C\eta$ параллельна этой оси, $C\zeta$ — вертикаль, положительное направление оси $C\xi$ совпадает с направлением от центра подвеса ведущих колес к центру масс робота). Положение робота будем определять координатами x , y центра масс C , углом ϕ между осями Ox и $C\xi$ и углами ϕ_1 и ϕ_2 поворота колес вокруг оси C_1C_2 . При этом скорость v_c центра масс робота, угловая скорость ω его корпуса и относительные угловые скорости ω_i ведущих колес определяются соотношениями

$$v_c = \dot{x}e_x + \dot{y}e_y = ue_\xi + ve_\eta, \quad \omega = \omega e_\zeta, \quad \omega_i = \omega_i e_{\eta_i}, \quad i = 1, 2$$

$$u = \dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi, \quad v = -\dot{x} \sin \phi + \dot{y} \cos \phi, \quad \omega = \dot{\phi}, \quad \omega_i = \dot{\phi}_i, \quad i = 1, 2,$$

содержащими орты соответствующих осей.

Пусть m — масса всей системы, A — момент инерции колеса относительно оси подвеса колес, B — момент инерции всей системы относительно вертикали, проходящей через центр масс системы.

Предположим, что роуальное колесо, как и ранее, может свободно (без трения) скользить по опорной плоскости, а ведущие колеса [1], в отличие от предыдущих исследований [1–5], тоже могут скользить по этой плоскости, причем в точках K_i контакта этих колес с опорной плоскостью приложены силы вязкого трения $\mathbf{F}_i = -mk\mathbf{v}_i$ ($\mathbf{v}_i$ — скорости точек K_i ($i = 1, 2$; $k > 0$)). Кроме того, предположим, что на ведущие колеса действуют управляющие моменты вида [1–5]

$$\mathbf{Q}_i = Q_i \mathbf{e}_\eta \quad (Q_i = ma^2(p - \kappa\omega_i), i = 1, 2; p \in \mathbb{R}, \kappa > 0)$$

2. Уравнения движения. Выпишем кинетическую энергию робота:

$$T = \frac{1}{2}m(u^2 + v^2) + \frac{1}{2}B\omega^2 + \frac{1}{2}A(\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

Найдем диссипативную функцию Релея $F = \frac{1}{2}mk(v_1^2 + v_2^2)$, порождающую силы вязкого трения. Имеем

$$\mathbf{v}_1 = (u - b\omega - a\omega_1)\mathbf{e}_\xi + (v - c\omega)\mathbf{e}_\eta$$

$$\mathbf{v}_2 = (u + b\omega - a\omega_2)\mathbf{e}_\xi + (v - c\omega)\mathbf{e}_\eta$$

$$F = \frac{1}{2}mk[(u - b\omega - a\omega_1)^2 + (u + b\omega - a\omega_2)^2 + 2(v - c\omega)^2]$$

Уравнения движения робота выпишем в форме Аппеля

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)' &= \frac{\partial T}{\partial v}\omega - \frac{\partial F}{\partial u}, & \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)' &= -\frac{\partial T}{\partial u}\omega - \frac{\partial F}{\partial v} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right)' &= -\frac{\partial F}{\partial \omega}, & \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_i}\right)' &= -\frac{\partial F}{\partial \omega_i} + Q_i, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пусть $B = mr^2$ (r — соответствующий оси вращения радиус инерции робота), а единицы измерения массы, длины и времени выбраны так, что $m = 1$, $A = 1$, $\kappa = 1$. Вводя обозначения $\omega_1 + \omega_2 = 2w_1$, $\omega_1 - \omega_2 = 2w_2$, выпишем уравнения (2.1) в явном виде

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v\omega - 2ku + 2kaw_1, & \dot{v} &= -u\omega - 2k(v - c\omega) \\ r^2\dot{\omega} &= -2k(b^2 + c^2)\omega + 2kcv - 2kabw_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\dot{w}_1 = kau - a^2(k+1)w_1 + a^2p, \quad \dot{w}_2 = -kab\omega - a^2(k+1)w_2$$

3. Прямолинейное движение робота и его устойчивость. Очевидно, система (2.2) допускает стационарное решение

$$u = ap, \quad v = 0, \quad \omega = 0, \quad w_1 = p, \quad w_2 = 0 \quad (3.1)$$

Этому решению соответствует равномерное прямолинейное движение робота (при $p > 0$ роуальное колесо находится впереди, а при $p < 0$ — позади ведущих колес). При этом ведущие колеса не скользят по плоскости ($v_1 = v_2 = 0$).

Полагая

$$u = ap + \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad \omega = \bar{\omega}, \quad w_1 = p + \bar{w}_1, \quad w_2 = \bar{w}_2, \quad (3.2)$$

выпишем полные (нелинейные) уравнения возмущенного движения

$$\begin{aligned}\ddot{u} &= -2k\bar{u} + 2ka\bar{w}_1 + \bar{v}\bar{\omega}, & \ddot{v} &= -2k\bar{v} + (2kc - ap)\bar{\omega} - \bar{u}\bar{\omega} \\ r^2\ddot{\omega} &= -2kc\bar{v} - 2k(b^2 + c^2)\bar{\omega} - 2kab\bar{w}_2 \\ \dot{\bar{w}}_1 &= ka\bar{u} - (k+1)a^2\bar{w}_1, & \dot{\bar{w}}_2 &= -kab\bar{\omega} - a^2(k+1)\bar{w}_2\end{aligned}\quad (3.3)$$

Отбрасывая в правых частях первых двух уравнений системы (3.3) нелинейные члены $\bar{v}\bar{\omega}$ и $-\bar{u}\bar{\omega}$, получим линеаризованную систему уравнений возмущенного движения и выпишем ее характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}g(\lambda) &= 0, & g(\lambda) &= g_1(\lambda)g_2(\lambda) \\ g_1(\lambda) &= \lambda^2 + \rho_1\lambda + \rho_2, & g_2(\lambda) &= r^2\lambda^3 + \rho_3\lambda^2 + \rho_4\lambda + \rho_5 \\ \rho_1 &= 2k + (k+1)a^2 > 0, & \rho_2 &= 2ka^2 > 0 \\ \rho_3 &= 2k(r^2 + b^2 + c^2) + r^2a^2(k+1) > 0 \\ \rho_4 &= 2k[(k+1)a^2(r^2 + c^2) + a^2b^2 + 2kb^2 + acp] \\ \rho_5 &= 2ka^2[2kb^2 + acp(k+1)]\end{aligned}$$

Оба корня уравнения $g_1(\lambda) = 0$ всегда лежат в левой полуплоскости, поскольку ρ_1 и ρ_2 положительны. Согласно критерию Гурвица, все три корня уравнения $g_2(\lambda)$ лежат в левой полуплоскости, если и только если

$$\rho_3 > 0, \quad \rho_3\rho_4 - r^2\rho_5 > 0, \quad \rho_5 > 0 \quad (3.4)$$

Первое из неравенств (3.4) выполнено всегда. Покажем, что если выполнено третье неравенство, то второе тоже выполнено. Действительно,

$$\rho_4 = \bar{\rho}_4 + \frac{\rho_5}{(k+1)a^2}; \quad \bar{\rho}_4 = 2k\left[(k+1)a^2(r^2 + c^2) + a^2b^2 + 2\frac{kb^2}{k+1}\right] > 0$$

Следовательно, второе неравенство (3.4) имеет вид

$$\rho_3\bar{\rho}_4 + \rho_5\frac{2k(r^2 + b^2 + c^2)}{a^2(k+1)} > 0$$

и заведомо выполнено при $\rho_5 > 0$. Последнее неравенство накладывает ограничение на параметр управления p : $\rho_5 > 0$, если и только если

$$p > p_0, \quad p_0 = -\frac{2kb^2}{ac(k+1)} < 0 \quad (3.5)$$

Таким образом, равномерное прямолинейное движение робота, при котором ро-
ральное колесо находится спереди ($p > 0$), всегда асимптотически устойчиво; если же
ро-
ральное колесо находится сзади ($p < 0$), то медленное ($|\mu| < a|p_0|$) движение робота
асимптотически устойчиво, а быстрое ($|\mu| > a|p_0|$) – неустойчиво.

4. Круговое движение робота и его устойчивость. Согласно теории бифуркации [6],
при критическом значении p_0 параметра p от прямолинейного движения робота (3.1)

ответвляется другое стационарное движение, соответствующее нетривиальному решению системы (3.3). Приравнявая правые части этой системы к нулю, находим это решение в виде

$$\bar{u} = \frac{k+1}{2k} \omega_0^2, \quad \bar{v} = \left(c + \frac{b^2}{c(k+1)} \right) \omega_0, \quad \bar{\omega} = \omega_0, \quad \bar{w}_1 = \frac{\omega_0^2}{2a}, \quad \bar{w}_2 = -\frac{kb}{(k+1)a} \omega_0 \quad (4.1)$$

$$\omega_0^2 = -\frac{2k \left[acp(k+1) + 2kb^2 \right]}{(k+1)^2 c} \quad (4.2)$$

Очевидно, стационарное решение (4.1) существует только при $p < p_0$ (см. соотношения (3.5) и (4.2)), а при $p = p_0$ оно совпадает с тривиальным решением системы (3.3). При этом стационарные решения исходной системы (2.2) определяются соотношениями (3.2) и (4.1). Этим решениям соответствуют равномерные движения робота, для которых ведущие колеса находятся впереди, а центр масс робота движется по окружности. Действительно, из равенств (3.2) и (4.1) имеем

$$u = ap + \bar{u} = -\frac{2kb^2}{c(k+1)} = u_0 < 0, \quad v = \left(c + \frac{b^2}{c(k+1)} \right) \omega_0 = v_0$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u_0 \cos \omega_0 t - v_0 \sin \omega_0 t, & \dot{y} &= u_0 \sin \omega_0 t + v_0 \cos \omega_0 t \\ x &= \frac{u_0 \sin \omega_0 t + v_0 \cos \omega_0 t}{\omega_0} + \alpha, & y &= -(u_0 \cos \omega_0 t + v_0 \sin \omega_0 t) / \omega_0 + \beta \\ (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 &= (u_0^2 + v_0^2) / \omega_0^2 \end{aligned}$$

(α и β — произвольные постоянные, зависящие от начальных условий, начальный момент времени считается, без ограничения общности, нулевым).

Заметим, что на круговых движениях робота ведущие колеса катятся со скольжением:

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{\omega_0^2}{2k} - \frac{b\omega_0}{k+1} \right) \mathbf{e}_\xi + \frac{b^2\omega_0}{c(k+1)} \mathbf{e}_\eta \neq 0, \quad \mathbf{v}_2 = \left(\frac{\omega_0^2}{2k} + \frac{b\omega_0}{k+1} \right) \mathbf{e}_\xi + \frac{b^2\omega_0}{c(k+1)} \mathbf{e}_\eta \neq 0$$

Полагая

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{k+1}{2k} \omega_0^2 + \tilde{u}, & \bar{v} &= \left(c + \frac{b^2}{c(k+1)} \right) \omega_0 + \tilde{v}, & \bar{\omega} &= \omega_0 + \tilde{\omega} \\ \bar{w}_1 &= \frac{\omega_0^2}{2a} + \tilde{w}_1, & \bar{w}_2 &= -\frac{kb}{a(k+1)} \omega_0 + \tilde{w}_2 \end{aligned}$$

и выражая параметр p через ω_0 с помощью соотношения (4.2), выпишем полные (нелинейные) уравнения возмущенного движения робота в окрестности его кругового движения

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{u}} &= -2k\tilde{u} + \omega_0\tilde{v} + \left(c + \frac{b^2}{c(k+1)} \right) \omega_0\tilde{\omega} + 2ka\tilde{w}_1 + \tilde{v}\tilde{\omega} \\ \dot{\tilde{v}} &= -\omega_0\tilde{u} - 2k\tilde{v} + 2k \left(c + \frac{b^2}{c(k+1)} \right) \tilde{\omega} - \tilde{u}\tilde{\omega} \\ r^2\dot{\tilde{\omega}} &= -2kc\tilde{v} - 2k(b^2 + c^2)\tilde{\omega} - 2kab\tilde{w}_2 \\ \dot{\tilde{w}}_1 &= ka\tilde{u} - a^2(k+1)\tilde{w}_1, & \dot{\tilde{w}}_2 &= -kab\tilde{\omega} - a^2(k+1)\tilde{w}_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отбрасывая в правых частях первых двух уравнений системы (4.3) нелинейные члены $\tilde{v}\tilde{\omega}$ и $-\tilde{y}\tilde{\omega}$, получим линеаризованную систему уравнений возмущенного движения и выпишем ее характеристическое уравнение

$$f(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \lambda + 2k & -\omega_0 & -\left(c + \frac{b^2}{c(k+1)}\right)\omega_0 & -2ka & 0 \\ \omega_0 & \lambda + 2k & -2k\left(c + \frac{b^2}{c(k+1)}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -2kc & r^2\lambda + 2k(b^2 + c^2) & 0 & 2kab \\ -ka & 0 & 0 & \lambda + (k+1)a^2 & 0 \\ 0 & 0 & kab & 0 & \lambda + (k+1)a^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.4)$$

После трех элементарных преобразований определителя (4.4) (меняются местами вторая и четвертая строки, затем второй и четвертый столбцы и, наконец, первый столбец полученного определителя представляется в виде суммы двух столбцов $\text{col}(\lambda + 2k, -ka, 0, 0, 0)$ и $\text{col}(0, 0, 0, \omega_0, 0)$) этот определитель легко вычисляется:

$$f(\lambda) = f_1(\lambda) + \omega_0^2 f_2(\lambda)$$

$$f_1(\lambda) = \lambda g_1(\lambda) \bar{g}_2(\lambda); \quad \bar{g}_2(\lambda) = r^2 \lambda^2 + \rho_3 \lambda + \bar{\rho}_4$$

$$f_2(\lambda) = r^2 \lambda^3 + \sigma_1 \lambda^2 + \sigma_2 \lambda + \sigma_3$$

$$\sigma_1 = 2 \left[r^2 a^2 + k \left(\frac{b^2(k+2)}{k+1} + 2c^2 \right) \right] > 0$$

$$\sigma_2 = a^2 \left[(k+1)r^2 a^2 + 2k((k+4)b^2 + 4(k+1)c^2) \right] > 0$$

$$\sigma_3 = 4k(k+1)a^4(b^2 + (k+1)c^2) > 0$$

(коэффициенты квадратных трехчленов $g_1(\lambda)$ и $\bar{g}_2(\lambda)$ приведены в разд. 3). Таким образом,

$$f(\lambda) = r^2 \lambda^5 + s_1 \lambda^4 + (s_2 + \omega_0^2 r^2) \lambda^3 + (s_3 + \omega_0^2 \sigma_1) \lambda^2 + (s_4 + \omega_0^2 \sigma_2) \lambda + \omega_0^2 \sigma_3$$

$$s_1 = \rho_1 r^2 + \rho_3, \quad s_2 = r^2 \rho_2 + \rho_1 \rho_3 + \bar{\rho}_4, \quad s_3 = \rho_1 \bar{\rho}_4 + \rho_2 \rho_3, \quad s_4 = \rho_2 \bar{\rho}_4$$

Согласно критерию Гурвица все корни уравнения $f(\lambda) = 0$ лежат в левой полуплоскости, если и только если все главные диагональные миноры определителя Гурвица, соответствующего полиному $f(\lambda)$, положительны:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= s_1 > 0, \quad \Delta_2 = \Delta_{20} + \omega_0^2 \Delta_{21} > 0, \quad \Delta_3 = \Delta_{30} + \omega_0^2 \Delta_{31} + \omega_0^4 \Delta_{32} > 0 \\ \Delta_4 &= \Delta_{40} + \omega_0^2 \Delta_{41} + \omega_0^4 \Delta_{42} + \omega_0^6 \Delta_{43} > 0, \quad \Delta_5 = \omega_0^2 \sigma_3 \Delta_4 > 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Первое из неравенств (4.5) выполнено всегда, а последнее, если $\Delta_4 > 0$. Следовательно, круговые движения робота асимптотически устойчивы при условиях

$$\Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \Delta_4 > 0 \quad (4.6)$$

Поскольку все корни полинома $g_1(\lambda)\bar{g}_2(\lambda)$ лежат в левой полуплоскости (g_1 и $\bar{g}_2$ – квадратные трехчлены с положительными коэффициентами), то Δ_{20} , Δ_{30} и Δ_{40} всегда положительны. Следовательно, существует значение $\omega_*^2 > 0$ такое, что все условия (4.6) выполнены при $\omega_0^2 \in (0, \omega_*^2)$. В зависимости от параметров задачи эти условия могут выполняться как при любом $\omega_0^2 > 0$, так и только при $\omega_0^2 \in (0, \omega_*^2)$. Действительно, вычисляя Δ_{21} , Δ_{32} и Δ_{43} , имеем

$$\Delta_{21} = 2kr^2 \left[r^2(a^2 + 2) - \left(\frac{b^2}{k+1} + c^2 \right) \right], \quad \Delta_{32} = \sigma_1 \Delta_{21}, \quad \Delta_{43} = (\sigma_1 \sigma_2 - r^2 \sigma_3) \Delta_{21},$$

причем $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_1 \sigma_2 - r^2 \sigma_3 > 0$ (последнее легко проверяется). Таким образом, если

$$b^2 + c^2(k+1) > (k+1)r^2(a^2 + 2), \quad (4.7)$$

то $\Delta_{21} < 0$ и первое из условий (4.6) выполняется только при $\omega_0^2 < -\Delta_{21}/\Delta_{20}$.

Заключение. Итак, в пространстве параметров задачи есть область, для которой круговые движения робота асимптотически устойчивы на ограниченном интервале изменения параметра p : $p \in (p_*, p_0)$ (p_* определяется из соотношения (4.2), в котором ω_0^2 заменено на ω_*^2). При переходе параметра p через критическое значение p_* пара комплексно-сопряженных корней уравнения $f(\lambda)$ переходит из левой полуплоскости в правую через мнимую ось. Это означает, что при условии (4.7) имеет место бифуркация Андронова–Хопфа [7] и робот может совершать периодические движения, рождающиеся из его круговых движений (уравнения (4.3) имеют периодические решения).

Отметим, что в неголономной постановке задачи (ведущие колеса не могут скользить по плоскости) при управлениях рассмотренного вида круговые движения всегда устойчивы и бифуркации Андронова–Хопфа нет [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-01-00140).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буданов В.М., Девянин Е.А. О движении колесных роботов // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 244–255.
2. Охоцимский Д.Е., Мартыненко Ю.Г. Новые задачи динамики и управления движением колесных роботов // Успехи механики. 2003. Т. 42. № 1. С. 3–47.
3. Мартыненко Ю.Г. Управление движением мобильных колесных роботов // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 8. С. 29–80.
4. Карапетян А.В., Салмина М.А. Бифуркации Пуанкаре–Четаева и Андронова–Хопфа в динамике трехколесного робота // Вестник МГУ. Сер. I. Матем., механ. 2006. № 2. С. 56–58.
5. Карапетян А.В., Салмина М.А. Об одном случае интегрируемости уравнений движения колесного робота // Вестник МГУ. Сер. I. Матем., механ. 2008 № 6. С. 67–69.
6. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 536 с.
7. Марсден Дж., Мак Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980, 368 с.

Dynamics of a Mobile Robot**A. V. Karapetyan^{a,#} and K. A. Katasonova^{a,##}**^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*[#] *e-mail: avkarapetyan@yandex.ru*^{##} *e-mail: xenia.katasonova@gmail.com*

The motion of mobile robot with one passive wheel and two driving wheels is considered. All the steady robot motions are found, their stability and branching are studied. Unlike numerous publications, wheel slip is allowed. Moreover, it is assumed that at the points of contact with the surface, forces of viscous friction are applied.

Keywords: three-wheel robot, wheel slip, steady motions, stability and bifurcations

REFERENCES

1. *Budanov V.M., Devyanin Ye.A.* The motion of wheeled robots // JAMM, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 215–225.
2. *Okhotsimsky D.E., Martynenko Yu.G.* New tasks of dynamics and traffic control of mobile wheeled robots // Advances in Mechanics, 2003, no. 1, pp. 3–46.
3. *Martynenko Yu.G.* Motion control of mobile wheeled robots // Fundam. Appl. Math., 2005, vol. 11, no. 8, pp. 29–80. (in Russian)
4. *Karapetyan A.V., Salmina M.A.* Poincaré–Chetayev and Andronov–Hopf bifurcations in the dynamics of a three-wheel robot // Moscow Univ. Mech. Bull., 2006, vol. 61, no. 2, pp. 20–22.
5. *Karapetyan A.V., Salmina M.A.* Integrability of equations of motion for a wheeled robot // Moscow Univ. Mech. Bull., vol. 63, no. 6, pp. 151–154.
6. *Chetaev N.G.* The Stability of Motion. N.Y.: Pergamon, 1961. 200 p.
7. *Marsden J.E., McCracken M.* Hopf Bifurcation and Its Applications. N.Y.: Springer, 1976. 408 p.