УДК 521, 1629

КВАТЕРНИОННЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ МОДЕЛИ ВОЗМУЩЕННОГО ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

© 2019 г. Ю. Н. Челноков[1,*]

[1] *Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия*
* *e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Поступила в редакцию 10.10.2018 г.
После доработки 28.11.2018 г.
Принята к публикации 25.12.2018 г.

Предлагаются регулярные кватернионные модели возмущенного орбитального движения твердого тела, не имеющие особенностей, присущих классическим моделям, при движении тела в ньютоновском гравитационном поле и, в общем случае, при движении тела в центральном силовом поле, потенциал которого имеет вид полинома отрицательных степеней расстояния до центра притяжения четвертого порядка. Предлагаются также регуляризованные кватернионные модели орбитального движения тела в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются не только центральная (ньютоновская), но и зональные, тессеральные и секториальные гармоники потенциала поля тяготения, учитывающие несферичность Земли. В этих моделях понижены на несколько порядков отрицательные степени расстояния до центра притяжения в слагаемых, описывающих влияние на орбитальное движение твердого тела зональных, тессеральных и секториальных гармоник потенциала поля тяготения Земли. Основными переменными являются параметры Эйлера, расстояние от центра масс тела до центра притяжения, полная энергия орбитального движения тела и квадрат модуля вектора момента орбитальной скорости тела (или проекции этого вектора). В них используется новая независимая переменная, связанная с временем дифференциальным соотношением, содержащим квадрат расстояния от центра масс тела до центра притяжения. В случае орбитального движения тела в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются только его центральная и зональные гармоники, найдены первые интегралы полученных уравнений орбитального движения, предложены замены переменных и преобразования этих уравнений, позволившие получить для изучения движения тела замкнутые системы дифференциальных уравнений меньшей размерности, в частности, систему уравнений третьего порядка для расстояния, синуса геоцентрической широты и квадрата модуля вектора момента орбитальной скорости.

Ключевые слова: твердое тело, возмущенное орбитальное движение, регуляризация, гравитационное поле Земли, параметры Эйлера, кватернион, первые интегралы

DOI: 10.1134/S003282351902005X

Классические модели возмущенного орбитального движения твердого тела в декартовых и криволинейных координатах [1–3] имеют особенности типа сингулярности (деления на нуль), а также особенности типа малых знаменателей, порождаемые силами гравитации и возникающие при равенстве нулю расстояния от центра масс тела до центра притяжения или при движении тела по вытянутым орбитам в малых окрестностях центрального (притягивающего) тела. Эти особенности приводят к существенной потере точности при изучении движения тела в окрестности центра притяжения или его движения по орбитам с большими эксцентриситетами. Под регуляризацией в небесной механике и астродинамике понимается устранение указанных особенностей.

Статья посвящена проблеме построения кватернионных регуляризованных моделей возмущенного орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли. Предлагаемая регуляризация достигается за счет записи уравнений движения тела во вращающейся системе координат, использования для описания вращения этой системы координат кватерниона поворота Гамильтона, компонентами которого являются параметры Эйлера, часто называемые параметрами Родрига–Гамильтона, использования в качестве дополнительных переменных полной энергии орбитального движения тела, квадрата модуля вектора момента орбитальной скорости тела (или проекций этого вектора), а также за счет использования регуляризующего преобразования времени.

Предлагаемые уравнения удобны для применения методов нелинейной механики и высокоточных численных расчетов. Удобство и эффективность использования полученных в статье регуляризованных кватернионных моделей орбитального движения твердого тела для аналитического исследования движения тела показано на примере рассмотрения движения тела в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются центральная и зональные гармоники потенциала поля тяготения.

Отметим, что эффективность применения кватернионных моделей и методов теоретической механики для решения проблем регуляризации моделей небесной механики и астродинамики [4] впервые была продемонстрирована автором статьи в работах [5, 6], а затем в его работах [7–13] и работах других авторов [14–19]. На приоритет автора статьи в области кватернионной регуляризации уравнений небесной механики указывается в работе [19].

1. Кватернионные уравнения возмущенного орбитального движения твердого тела. Векторное дифференциальное уравнение (ДУ) возмущенного орбитального движения твердого тела, движущегося в центральном силовом поле с потенциалом Π под действием возмущающей силы, равной геометрической сумме силы, имеюшей потенциал Π^*, и силы $m\mathbf{p}$, имеет вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{1}{m}\left(\frac{d\Pi}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\partial\Pi^*}{\partial\mathbf{r}}\right) + \mathbf{p} \tag{1.1}$$
$$r = |\mathbf{r}|, \quad \Pi = \Pi(r), \quad \Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt)$$

Здесь m – масса тела, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор центра масс M тела, проведенный из центра O притяжения, $\mathbf{p}$ – возмущающее ускорение центра масс тела, обусловленное силой $m\mathbf{p}$, t – время. Уравнение невозмущенного центрального движения тела получается из уравнения (1.1), если в нем положить $\Pi^* = 0$, $\mathbf{p} = 0$.

Введем в рассмотрение следующие системы координат: $X(OX_1X_2X_3)$ – система координат с началом в точке O, движущаяся относительно инерциальной системы координат (ИСК) поступательно, $Y(MY_1Y_2Y_3)$ – вращающаяся система координат (ВСК) с началом в центре масс M тела и осью MY_3, направленной по радиус-вектору $\mathbf{r}$. Тогда

$$\frac{\partial\Pi^*}{\partial\mathbf{r}} = \operatorname{grad}\mathbf{\Pi}^* = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\Pi^*}{\partial x_i}\mathbf{x}_i, \quad \mathbf{p} = \sum_{i=1}^{3}p_i\mathbf{x}_i$$
$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3}x_i\mathbf{x}_i = r\mathbf{y}_3, \quad \Pi^* = \Pi^*(t, x_1, x_2, x_3)$$

Здесь $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_i$ – орты осей X_i и Y_i; x_i и p_i – проекции векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ на ось X_i (x_i – декартовы координаты точки M в системе координат X).

В дальнейшем уравнения движения тела будем рассматривать, записывая их в ВСК Y. Ориентацию системы координат Y в основной системе координат X будем задавать с помощью параметров Эйлера λ_j $(j = 0,1,2,3)$, связанных соотношением $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. Декартовы координаты x_i центра масс тела связаны с параметрами Эйлера и расстоянием r от центра масс до центра Земли соотношениями

$$x_1 = 2r(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2), \quad x_2 = 2r(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1), \quad x_3 = r(\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$$

или в кватернионной записи

$$\mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = r\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{k} \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\mathbf{i} + \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k} \tag{1.2}$$

Здесь и далее запись вида $\mathbf{a}_\xi$ означает отображение вектора $\mathbf{a}$ на базис $\xi(\xi = X, Y)$, т.е. $\mathbf{a}_\xi$ – кватернион с нулевой скалярной частью, составленный из проекций вектора $\mathbf{a}$ на базис ξ, $\boldsymbol{\lambda}$ – кватернион ориентации ВСК Y в системе координат X, норма которого равна единице, центральный кружок $\circ$ – символ кватернионного произведения, тильда – символ кватернионного сопряжения: $\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \lambda_0 - \lambda_1\mathbf{i} - \lambda_2\mathbf{j} - \lambda_3\mathbf{k}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – векторные мнимые единицы Гамильтона [20, 21].

Запишем уравнения возмущенного орбитального движения тела в ВСК Y:

$$\begin{gathered} \ddot{r} - r(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{m}\frac{d\Pi}{dr} = P_3 \\ 2\omega_2\dot{r} + r(\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3) = P_1, \quad 2\omega_1\dot{r} + r(\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3) = -P_2 \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\omega}_y; \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_1\mathbf{i} + \dot{\lambda}_2\mathbf{j} + \dot{\lambda}_3\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\omega}_y = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k} \tag{1.4}$$

$$P_i = -\frac{1}{m}\frac{\partial\Pi^*}{\partial\mathbf{y}_i} + p_{iy}, \quad \mathbf{y}_{1x} = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{y}_{2x} = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{j} \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{y}_{3x} = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{k} \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{r}_x = r\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{r}_y = r\mathbf{k} \tag{1.6}$$

$$\mathbf{p}_x = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_y = p_{1y}\mathbf{i} + p_{2y}\mathbf{j} + p_{3y}\mathbf{k} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{p}_x \circ \boldsymbol{\lambda} \tag{1.7}$$

Здесь и далее ω_i – проекция вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости вращения системы координат Y на ось Y_i, $p_{iy} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_i$ – проекция вектора $\mathbf{p}$ на ось Y_i, $\partial\boldsymbol{\Pi}^*/\partial\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i \cdot \partial\Pi^*/\partial\mathbf{r}$ – производная функции Π^* по направлению $\mathbf{y}_i$, верхняя точка – символ дифференцирования по времени t.

Уравнения (1.3)–(1.7) образуют замкнутую систему ДУ относительно неизвестных $r, \omega_1, \omega_2, \lambda_j$ (проекция ω_3 может быть задана произвольно).

1.1. Преобразование уравнений движения, введение в рассмотрение модуля момента орбитальной скорости и энергии движения. Учитывая равенство

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2(\omega_1^2 + \omega_2^2), \quad v = |\dot{\mathbf{r}}|, \tag{1.8}$$

первое из уравнений (1.3) запишем в виде

$$\ddot{r} + r^{-1}(\dot{r}^2 - v^2) + \frac{1}{m}\frac{d\Pi}{dr} = P_3 \tag{1.9}$$

Доопределим вращательное движение системы координат Y, полагая произвольно задаваемую проекцию ω_3 вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости вращения системы координат Y на ось Y_3 (т.е. на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс тела) равной нулю:

$$\omega_3 = 2(\lambda_0\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_0 - \lambda_1\dot{\lambda}_2 + \lambda_2\dot{\lambda}_1) = 0 \tag{1.10}$$

В этом случае из равенства (1.8) получаем

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 = r^{-2}(v^2 - \dot{r}^2), \quad \omega = |\boldsymbol{\omega}|,$$

а второе и третье из уравнений (1.3) принимают вид

$$r\dot{\omega}_2 + 2\omega_2\dot{r} = P_1, \quad r\dot{\omega}_1 + 2\omega_1\dot{r} = -P_2 \tag{1.11}$$

Введем переменную C, определяемую соотношениями

$$C^2 = r^2(v^2 - \dot{r}^2) = r^4\omega^2 = 4r^4(\dot{\lambda}_0^2 + \dot{\lambda}_1^2 + \dot{\lambda}_2^2 + \dot{\lambda}_3^2), \quad C = r^2\omega \tag{1.12}$$

Величина C – модуль вектора момента орбитальной скорости центра масс тела и связана с модулем L кинетического момента орбитального движения, вычисленного относительно центра O, соотношением $L = mC$. Эту величину будем использовать в качестве дополнительной переменной при рассмотрении орбитального движения тела.

Из уравнений (1.11) и соотношений (1.12) получаем ДУ для переменной C в одной из следующих форм:

$$dC^2/dt = 2r^3(P_1\omega_2 - P_2\omega_1), \quad \dot{C} = r\omega^{-1}(P_1\omega_2 - P_2\omega_1)$$

Величина C для невозмушенного центрального движения (когда $\Pi^* = 0$, $\mathbf{p} = 0$) является постоянной площадей.

Используя соотношения (1.12), приведем уравнение (1.9) к виду

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} + \frac{1}{m}\frac{d\Pi}{dr} = P_3 \tag{1.13}$$

Отметим, что в рассматриваемом случае введения ВСК Y в кватернионном кинематическом уравнении (1.4) кватернион угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_y$ упрощается: $\boldsymbol{\omega}_y = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j}$.

Введем в рассмотрение переменную h, являющуюся энергией орбитального движения тела при $\Pi^* = 0$:

$$h = mv^2/2 + \Pi(r)$$

Переменная h удовлетворяет уравнению

$$\dot{h} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \left(m\mathbf{p} - \frac{\partial\Pi^*}{\partial\mathbf{r}}\right), \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$$

Здесь и далее центральная точка – символ скалярного произведения векторов, $\mathbf{v}$ – вектор скорости центра масс тела в основной системе координат X, $v = |\mathbf{v}|$.

Введем также полную энергию h^* орбитального движения тела, определяемую соотношением

$$h^* = h + \Pi^*(t, \mathbf{r})$$

и меняющуюся в соответствии с ДУ

$$\dot{h}^* = \frac{\partial\Pi^*}{\partial t} + m\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} \tag{1.14}$$

Энергию h^* будем использовать в качестве дополнительной переменной при рассмотрении орбитального движения тела.

1.2. Кватернионные уравнения возмущенного орбитального движения в осцилляторной форме. Запишем уравнение (1.1) в кватернионной форме

$$\ddot{\mathbf{r}}_x = -\frac{1}{m}\left(\frac{d\Pi}{dr}\frac{\mathbf{r}_x}{r} + \frac{\partial\Pi^*}{\partial\mathbf{r}_x}\right) + \mathbf{p}_x$$
$$\frac{\partial\Pi^*}{\partial\mathbf{r}_x} = \left(\frac{\partial\Pi^*}{\partial\mathbf{r}}\right)_x = (\operatorname{grad}\Pi^*)_x = \frac{\partial\Pi^*}{\partial x_1}\mathbf{i} + \frac{\partial\Pi^*}{\partial x_2}\mathbf{j} + \frac{\partial\Pi^*}{\partial x_3}\mathbf{k} \tag{1.15}$$
$$\mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_x = \ddot{x}_1\mathbf{i} + \ddot{x}_2\mathbf{j} + \ddot{x}_3\mathbf{k}$$

Вектор $\mathbf{p}$ задан своими проекциями p_i в системе координат X. Проекции p_i в общем случае – заданные функции переменных $t, x_i, \dot{x}_i$: $p_i = p_i(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$. Поэтому кватернион $\mathbf{p}_x$, определяемый первым из равенств (1.7) – функция тех же переменных:

$$\mathbf{p}_x = \mathbf{p}_x(t, \mathbf{r}_x, \dot{\mathbf{r}}_x), \quad \mathbf{r}_x = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{r}}_x = \dot{x}_1\mathbf{i} + \dot{x}_2\mathbf{j} + \dot{x}_3\mathbf{k}$$

Учитывая соотношения (1.2) и (1.10), найдем отображение вектора $\mathbf{v}$ скорости возмущенного орбитального движения тела (точки M) на инерциальный базис X:

$$\mathbf{v}_x = \dot{\mathbf{r}}_x = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{k} \circ \tilde{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{k} \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \boldsymbol{\mu} = \dot{r}\boldsymbol{\lambda} + 2r\dot{\boldsymbol{\lambda}} \tag{1.16}$$

Дифференцируя равенства (1.16) по времени t с учетом соотношения (1.10), а также соотношения

$$\operatorname{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{k} \circ \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}) = \lambda_0\dot{\lambda}_3 - \lambda_3\dot{\lambda}_0 - \lambda_1\dot{\lambda}_2 + \lambda_2\dot{\lambda}_1 = \omega_3/2$$

и подставляя результат дифференцирования, а также равенство (1.2) в уравнение (1.15), после преобразований получим

$$\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{k} \circ \left[2r\ddot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} + 4\dot{r}\dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} - 2r\mathbf{k} \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{k} \circ \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} + \left(\ddot{r} + \frac{1}{m}\frac{d\Pi}{dr}\right)\tilde{\boldsymbol{\lambda}}\right] = -\frac{1}{m}\frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{r}_x} + \mathbf{p}_x \tag{1.17}$$

Используя кинематическое уравнение (1.4) и равенство (1.10), можно показать, что

$$\mathbf{k} \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{k} \circ \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} = (\dot{\boldsymbol{\lambda}} \circ \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}})\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \tag{1.18}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} \circ \dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} = \sum_{j=0}^{3} \dot{\lambda}_j^2 = \frac{1}{4}\omega^2 = \frac{1}{4}r^{-2}(v^2 - \dot{r}^2) = \frac{1}{4}r^{-4}C^2 \tag{1.19}$$

Подставляя выражения (1.18), (1.19) и (1.13) в равенство (1.17), получим уравнение

$$2r\ddot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} + 4\dot{r}\dot{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} + \frac{1}{2}r^{-3}C^2\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{k} \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \left(\frac{1}{m}\frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{r}_x} - \mathbf{p}_x\right) - P_3\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$$

которое может быть преобразовано к виду

$$2r\ddot{\boldsymbol{\lambda}} + 4\dot{r}\dot{\boldsymbol{\lambda}} + \frac{1}{2}r^{-3}C^2\boldsymbol{\lambda} = \tilde{\mathbf{Q}}^* - \operatorname{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{Q}^*)\boldsymbol{\lambda}, \tag{1.20}$$

где

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{q} - \frac{r^{-1}}{2m}\frac{\partial \Pi^*}{\partial \tilde{\boldsymbol{\lambda}}}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}^* = \tilde{\mathbf{q}} - \frac{r^{-1}}{2m}\frac{\partial \Pi^*}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{k} \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{p}_x, \quad \tilde{\mathbf{q}} = -\mathbf{p}_x \circ \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \tilde{\boldsymbol{\lambda}}} = \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_0} - \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_1}\mathbf{i} - \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_2}\mathbf{j} - \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_3}\mathbf{k}, \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_0} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_1}\mathbf{i} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_2}\mathbf{j} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_3}\mathbf{k} \tag{1.21}$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_x), \quad \mathbf{p}_x = \mathbf{p}_x(t, \mathbf{r}_x, \dot{\mathbf{r}}_x), \quad \mathbf{r}_x = r\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{k} \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \dot{\mathbf{r}}_x = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{k} \circ \tilde{\boldsymbol{\mu}}, \quad \boldsymbol{\mu} = \dot{r}\boldsymbol{\lambda} + 2r\dot{\boldsymbol{\lambda}}$$

Правая часть P_3 уравнения (1.13) для расстояния r может быть представлена в виде

$$P_3 = \operatorname{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{q}) - \frac{1}{m}\frac{\partial \Pi^*}{\partial r}$$

Поэтому уравнение (1.13) записывается следующим образом:

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} + \frac{1}{m}\frac{d\Pi}{dr} = \operatorname{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{q}) - \frac{1}{m}\frac{\partial \Pi^*}{\partial r} \tag{1.22}$$

Уравнения (1.20), (1.21), (1.19) и (1.22) образуют замкнутую систему ДУ возмущенного орбитального движения тела второго порядка относительно неизвестных параметров Эйлера λ_j и расстояния r. Квадрат модуля момента орбитальной скорости C^2, присутствующий в этих уравнениях, определяется соотношением (1.12). Координаты x_i и проекции $\dot{x}_i$ скорости центра масс M тела определяются с помощью соотношений (1.2) и (1.16).

В дальнейшем понадобятся также уравнения для переменных h^* и C, записанные через параметры Эйлера λ_j, расстояние r и их производные по времени.

Уравнение (1.14) для полной энергии h^* может быть записано в виде

$$\dot{h}^* = \frac{\partial \Pi^*}{\partial t} - m\,\mathrm{scal}(\mathbf{v}_x \circ \mathbf{p}_x) = \frac{\partial \Pi^*}{\partial t} + m\,\mathrm{scal}(\boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{q}) \tag{1.23}$$

Кватернионы $\boldsymbol{\mu}$ и $\mathbf{q}$ определяются вторым и третьим соотношениями из соотношений (1.16) и (1.21).

Переменная C в соответствии с равенствами (1.19) выражается через $\dot{\lambda}_j$ и r по формулам

$$C^2 = 4r^4\dot{\boldsymbol{\lambda}} \circ \dot{\bar{\boldsymbol{\lambda}}} = 4r^4(\dot{\lambda}_0^2 + \dot{\lambda}_1^2 + \dot{\lambda}_2^2 + \dot{\lambda}_3^2) = r^4\omega^2, \quad C = r^2\omega,$$

которые согласуются с определением (1.12).

С учетом равенства $\omega_3 = 0$ ДУ для переменной C может быть записано в одной из следующих форм:

$$dC^2/dt = 4r^3\,\mathrm{scal}(\dot{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{Q}^*), \quad \dot{C} = 2r^3C^{-1}\,\mathrm{scal}(\dot{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{Q}^*) \tag{1.24}$$

1.3. Нормальная форма кватернионных уравнений возмущенного орбитального движения твердого тела. Для ее получения введем в качестве новых переменных проекции C_i на оси ВСК Y вектора $\mathbf{C}$ момента скорости центра масс тела, вычисленного относительно центра O:

$$C_1 = r^2\omega_1 = 2r^2(\lambda_0\dot{\lambda}_1 - \lambda_1\dot{\lambda}_0 - \lambda_2\dot{\lambda}_3 + \lambda_3\dot{\lambda}_2)\ (1, 2, 3); \quad C_3 = 0 \tag{1.25}$$

Величины C_i в случае невозмущенного центрального движения — постоянные площадей.

Уравнения (1.11) в переменных (1.25) принимают вид

$$\dot{C}_1 = -rP_2, \quad \dot{C}_2 = rP_1$$

и их можно записать в кватернионной форме

$$\dot{\mathbf{C}}_y = r[\mathrm{scal}(\mathbf{Q}^* \circ \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{Q}^* \circ \boldsymbol{\lambda}] - r\,\mathrm{vect}(\mathbf{Q}^* \circ \boldsymbol{\lambda}), \tag{1.26}$$

где кватернион $\mathbf{C}_y = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j}$ — отображение вектора $\mathbf{C}$ на базис Y, кватернион $\mathbf{Q}^*$ определяется первым из соотношений (1.21), а $\mathrm{vect}(\mathbf{Q}^* \circ \boldsymbol{\lambda})$ означает векторную часть кватерниона $\mathbf{Q}^* \circ \boldsymbol{\lambda}$.

Используя равенства (1.25) и равенство $\omega_3 = 0$, запишем кватернионное кинематическое уравнение (1.4) в виде

$$2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = r^{-2}\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{C}_y, \quad \mathbf{C}_y = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} \tag{1.27}$$

Уравнения (1.26), (1.27) и (1.21), дополненные уравнением (1.22) для расстояния r (в этом уравнении $C^2 = C_1^2 + C_2^2$), образуют замкнутую систему кватернионных уравнений возмущенного орбитального движения твердого тела относительно неизвестных параметров Эйлера λ_j (компонент кватерниона $\boldsymbol{\lambda}$), проекций C_1 и C_2 вектора момента орбитальной скорости тела на оси ВСК Y (компонент кватерниона $\mathbf{C}_y$) и расстояния r.

Координаты x_i и проекции $\dot{x}_i$ скорости центра масс тела определяются через указанные переменные с помощью соотношений (1.2) и соотношений

$$\mathbf{v}_x = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{v}_y \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{v}_y = \mathbf{k} \circ (\dot{r} - r^{-1}\mathbf{C}_y),$$

вытекающих из равенств (1.16) и (1.27).

Отметим, что совокупность уравнений первого порядка (1.26), (1.27) эквивалентна уравнению второго порядка (1.20). Чтобы убедиться в этом, достаточно продифференцировать уравнение (1.27) по времени и учесть уравнение (1.26). После преобразований получим уравнение (1.20).

Отметим также, что уравнения (1.26) и (1.27) можно заменить уравнениями

$$\dot{\mathbf{C}}_x = r[\mathrm{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{Q}^*) - \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{Q}^*] = -r\,\mathrm{vect}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{Q}^*) \tag{1.28}$$

$$2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = r^{-2}\mathbf{C}_x \circ \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{C}_x = C_1^*\mathbf{i} + C_2^*\mathbf{j} + C_3^*\mathbf{k}, \tag{1.29}$$

использующими в качестве переменных проекции C_i^* вектора момента орбитальной скорости тела на оси системы координат X.

Координаты x_i и проекции $\dot{x}_i$ скорости центра масс тела определяются в этом случае с помощью соотношения (1.3) и соотношения

$$\mathbf{v}_x = r^{-1}\mathbf{r}_x \circ (\dot{r} - r^{-1}\mathbf{C}_x),$$

вытекающего из равенств (1.16) и (1.29).

1.4. Системы регуляризованных дифференциальных уравнений возмущенного орбитального движения твердого тела, использующие для описания орбитального движения параметры Эйлера. Перейдем в полученных ДУ возмущенного орбитального движения тела с целью их регуляризации (устранения особенности (деления на нуль при $r = 0$), порождаемой ньютоновским гравитационным полем) от независимой переменной t (времени) к новой независимой переменной τ по формуле $dt = r^2 d\tau$. Ниже приводятся полученные регуляризованные уравнения, имеющие осцилляторную или нормальную форму, в которых используется независимая переменная τ ($d\tau = r^{-2}dt$).

1.4.1. Система уравнений, содержащая кватернионное уравнение осцилляторного вида:

$$\boldsymbol{\lambda}'' + \frac{C^2}{4}\boldsymbol{\lambda} = \frac{r^3}{2}[\tilde{\mathbf{Q}}^* - \mathrm{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{Q}^*)\boldsymbol{\lambda}] \tag{1.30}$$

$$r'' + C^2 r + \frac{1}{m}\left[\frac{d}{dr}(r^4\Pi) - 4(h^* - \Pi^*)r^3\right] = r^4\left[\mathrm{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{q}) - \frac{1}{m}\frac{\partial \Pi^*}{\partial r}\right] \tag{1.31}$$

$$h^{*\prime} = r^2\frac{\partial \Pi^*}{\partial t} + m\,\mathrm{scal}(\boldsymbol{\mu}^* \circ \mathbf{q}), \quad \boldsymbol{\mu}^* = r'\boldsymbol{\lambda} + 2r\boldsymbol{\lambda}' \tag{1.32}$$

$$C^{2\prime} = 4r^3\,\mathrm{scal}(\boldsymbol{\lambda}' \circ \mathbf{Q}^*) \tag{1.33}$$

$$t' = r^2, \tag{1.34}$$

где

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_x), \quad \mathbf{p}_x = \mathbf{p}_x(t, \mathbf{r}_x, \mathbf{v}_x), \quad \mathbf{r}_x = r\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{k} \circ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{v}_x = r^{-2}\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{k} \circ \tilde{\boldsymbol{\mu}}^* \tag{1.35}$$

В этой системе кватернионы $\mathbf{Q}^*$, $\tilde{\mathbf{Q}}^*$ и $\mathbf{q}$ определяются соотношениями (1.21). Здесь и далее штрих – символ дифференцирования по независимой переменной τ; так,

$$\boldsymbol{\lambda}' = d\boldsymbol{\lambda}/d\tau = \lambda_0' + \lambda_1'\mathbf{i} + \lambda_2'\mathbf{j} + \lambda_3'\mathbf{k}$$

1.4.2. Системы уравнений, содержащие кватернионные уравнения в нормальной форме. Система уравнений с независимой переменной τ, в которой используются проекции C_1, C_2 ($C_3 = 0$) вектора момента орбитальной скорости тела на оси ВСК Y и кватернион $\boldsymbol{\lambda}$ ориентации этой системы координат:

$$\mathbf{C}'_y = -r^3\,\mathrm{vect}(\mathbf{Q}^* \circ \boldsymbol{\lambda}), \quad \mathbf{C}_y = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j}, \quad 2\boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{C}_y, \quad t' = r^2 \tag{1.36}$$

Система дополняется уравнениями (1.31), (1.32) и соотношениями (1.21).

Система уравнений с независимой переменной τ, в которой в качестве переменных используются проекции C_i^* ($i = 1, 2, 3$) вектора момента орбитальной скорости тела на оси ИСК X и кватернион $\boldsymbol{\lambda}$ инерциальной ориентации ВСК Y:

$$\mathbf{C}'_x = -r^3\,\mathrm{vect}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{Q}^*), \quad \mathbf{C}_x = C_1^*\mathbf{i} + C_2^*\mathbf{j} + C_3^*\mathbf{k}, \quad 2\boldsymbol{\lambda}' = \mathbf{C}_x \circ \boldsymbol{\lambda}, \quad t' = r^2 \tag{1.37}$$

Система дополняется уравнениями (1.31), (1.32) и соотношениями (1.21).

Полученная для произвольного вида потенциала $\Pi(r)$ центрального силового поля система ДУ возмущенного орбитального движения тела (1.30)–(1.35) осцилляторного вида имеет 13-й порядок. В ней неизвестными являются параметры Эйлера λ_j, расстояние r, время t, полная энергия h^* и величина C^2, пропорциональная квадрату модуля кинетического момента орбитального движения.

Эта система имеет три первых частных интеграла

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1, \quad \lambda_0\lambda'_0 + \lambda_1\lambda'_1 + \lambda_2\lambda'_2 + \lambda_3\lambda'_3 = 0$$

$$\lambda_0\lambda'_3 - \lambda_3\lambda'_0 - \lambda_1\lambda'_2 + \lambda_2\lambda'_1 = 0,$$

соответствующие любым начальным условиям возмущенного орбитального движения тела. Первые два интеграла отвечают смыслу параметров Эйлера и их производных, а третий следует из дифференциального соотношения (1.10), имеющего место в силу сделанного выбора ВСК Y.

ДУ (1.33) для переменной C^2 может быть исключено из состава системы уравнений (1.30)–(1.34), если учесть, что эта переменная может быть выражена через производные от параметров Эйлера λ_j по формуле

$$C^2 = 4(\lambda_0'^2 + \lambda_1'^2 + \lambda_2'^2 + \lambda_3'^2) \tag{1.38}$$

Основное достоинство полученной системы уравнений (1.30)–(1.35) заключается в том, что кватернионное уравнение (1.30) в параметрах Эйлера λ_j, входящее в состав этой системы, регулярно для возмущенного орбитального движения тела в центральном силовом поле с любым видом потенциала $\Pi(r)$ при условии, что члены уравнений, обусловленные возмущающим потенциалом Π^* и возмущающим ускорением $\mathbf{p}$, сохраняют конечные значения. Кроме того, в случае невозмущенного центрального движения кватернионное уравнение (1.30) становится эквивалентным уравнению движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора. Частота колебаний этого осциллятора равна $C/2$ и ее значение зависит от типа движения. Кватернион $\boldsymbol{\lambda}$ характеризует в случае невозмущенного центрального движения ориентацию плоскости орбиты в пространстве. Следовательно, уравнение (1.30) – регулярное кватернионное уравнение мгновенной ориентации плоскости орбиты в пространстве для возмущенного центрального движения тела.

Уравнение (1.32) для полной энергии h^* и уравнение (1.33) для переменной C^2 также регулярны для любого вида потенциала $\Pi(r)$ (при том же условии конечности возмущающих сил). Уравнение (1.31) для расстояния r регулярно лишь для потенциала вида

$$\Pi(r) = -a_1r^{-1} - a_2r^{-2} - a_3r^{-3} - a_4r^{-4}; \quad a_i = \mathrm{const} \tag{1.39}$$

Поэтому система уравнений (1.30)–(1.35) в целом регулярна для возмущенного центрального движения твердого тела в силовом поле с потенциалом (1.39). Эти уравнения сложнее кватернионных уравнений возмущенного орбитального движения тела в переменных Кустаанхеймо–Штифеля [4–6, 10–12] (KS-переменных), поскольку содержат “лишнее” уравнение (1.31) для расстояния r (уравнения в KS-переменных могут рассматриваться независимо от уравнения для расстояния) и уравнение (1.33) для переменной C^2; к тому же уравнение для расстояния (1.31) не является линейным для невозмущенного кеплеровского движения, как в случае использования KS-переменных. Однако уравнения в KS-переменных регулярны лишь для возмущенного орбитального движения тела в центральном силовом поле с потенциалом

$$\Pi(r) = -a_1 r^{-1} \tag{1.40}$$

(при том же условии конечности возмущающих сил); кроме того, основное кватернионное уравнение в KS-переменных, имеющее также вид уравнения движения четырехмерного возмущенного осциллятора, нелинейно для невозмущенного центрального движения с любым видом потенциала $\Pi(r)$, за исключением потенциала (1.40), в отличие от кватернионного уравнения (1.30).

Отметим, что если возмущающее ускорение $\mathbf{p}$ и возмущающий потенциал Π^* не зависят явно от времени t, то уравнения (1.30)–(1.33) могут рассматриваться независимо от уравнения для времени (1.34). Кроме того, если ускорение $\mathbf{p} = 0$, а потенциал Π^* не зависит явно от времени t, то полная энергия $h^* = \mathrm{const}$ и уравнение (1.32) для энергии выпадает из рассмотрения.

Полученные для произвольного вида потенциала $\Pi(r)$ центрального силового поля система ДУ возмущенного орбитального движения тела (1.36), (1.31), (1.32) имеет 10-й порядок, что на три единицы меньше порядка системы осцилляторного вида (или меньше на две единицы при исключении из системы уравнений осцилляторного вида уравнения для переменной C^2). Эта система содержит кватернионное ДУ первого порядка относительно двух проекций C_1 и C_2 ($C_3 = 0$) вектора момента орбитальной скорости тела на оси ВСК Y (первое уравнение подсистемы (1.36)) и кватернионное ДУ первого порядка относительно четырех параметров Эйлера λ_j (второе уравнение подсистемы (1.36)), ДУ (1.31) второго порядка относительно расстояния r и ДУ (1.32) первого порядка относительно полной энергии h^*.

Уравнения для переменных C_1, C_2 и h^* регулярны для любого вида потенциала $\Pi(r)$ центрального силового поля (при условии конечности возмущающих сил). Кинематические уравнения для параметров Эйлера λ_j, входящие во вторую подсистему уравнений (1.36), регулярны для любого возмущенного орбитального движения твердого тела. Уравнение (1.31) для расстояния регулярно, как уже отмечалось, для потенциала (1.39).

Система ДУ возмущенного орбитального движения тела (1.37), (1.31), (1.32), в отличие от системы (1.36), (1.31), (1.32), содержит кватернионные ДУ (1.37) первого порядка в отображениях на инерциальный (а не вращающийся) базис. В нем используются три проекции C_i^* вектора момента орбитальной скорости тела на оси ИСК. Поэтому оно имеет 11-й порядок. Эта система уравнений имеет аналогичные свойства (в смысле регулярности), что и система уравнений (1.36), (1.31), (1.32).

2. Кватернионные уравнения возмущенного орбитального движения тела в гравитационном поле Земли. В векторной форме ДУ возмущенного орбитального движения тела в гравитационном поле Земли имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial \Pi_e}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{p} = -\left(\frac{d\Pi}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{r}}\right) + \mathbf{p}, \tag{2.1}$$

где

$$\begin{gathered} r = |\mathbf{r}|, \quad \Pi_e = \Pi + \Pi^*, \quad \Pi = \Pi(r) = -fm_e r^{-1} \\ \Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}) = \Pi_z^*(\mathbf{r}) + \Pi_{\text{ts}}^*(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt) \end{gathered} \tag{2.2}$$

$\mathbf{r}$ – геоцентрический радиус-вектор центра масс тела, Π_e – потенциал гравитационного поля Земли, $\Pi = \Pi(r)$ – его центральная составляющая, Π^* – составляющая, обусловленная нецентральностью гравитационного поля Земли ($\Pi_z^*(\mathbf{r})$ – составляющая потенциала, содержащая зональные гармоники гравитационного поля Земли, $\Pi_{\text{ts}}^*(t, \mathbf{r})$ – составляющая потенциала, содержащая тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли [1–3]), f – постоянная тяготения, m_e – масса Земли, $\mathbf{p}$ – возмущающее ускорение центра масс тела от действующих на него негравитационных сил.

Систему координат X, в которой рассматривается орбитальное движение тела, введем следующим образом: ее начало O поместим в центр Земли, ось OX_3 направим к северному полюсу, а ось OX_1 – в точку весеннего равноденствия.

Потенциалы, описывающие зональные, тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли, имеют вид [1–3]

$$\Pi_z^*(\mathbf{r}) = \Pi_z^*(r, \gamma) = \frac{fm_e}{r} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\gamma), \quad \gamma = \sin\varphi = \cos\theta = \frac{x_3}{r} \tag{2.3}$$

$$\Pi_{\text{ts}}^*(t, \mathbf{r}) = \Pi_{\text{ts}}^*(r, \gamma, l) = \frac{fm_e}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nk}(\gamma)(C_{nk} \cos kl + S_{nk} \sin kl), \tag{2.4}$$

где

$$\gamma = \sin\varphi = \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 - 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1,$$

R – средний экваториальный радиус Земли, J_n – безразмерные постоянные, характеризующие фигуру Земли, P_n – полином Лежандра n-го порядка, φ – геоцентрическая широта, C_{nk} и S_{nk} – безразмерные постоянные, характеризующие фигуру Земли, P_{nk} – присоединенные функции Лежандра, l – географическая долгота.

Географическая долгота определяется через декартовы координаты x_i и параметры Эйлера λ_j, описывающие ориентацию ранее введенной ВСК Y в ИСК X, посредством соотношений

$$l = l_a - \Omega_e t, \quad l_a = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} = \operatorname{arctg}\frac{\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1}{\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2}, \tag{2.5}$$

где l_a – абсолютная долгота, Ω_e – угловая скорость суточного вращения Земли.

Тригонометрические функции $\cos kl$ и $\sin kl$ находятся через функции $\cos l$ и $\sin l$ с помощью кватернионных соотношений, вытекающих из формулы Муавра.

В соответствии с изложенным в разд. 1 и с уравнениями (1.30)–(1.35) векторной форме ДУ (2.1)–(2.5) возмущенного орбитального движения тела в гравитационном поле Земли будут соответствать следующие регуляризованные кватернионные ДУ возмущенного орбитального движения тела, записанные в ВСК Y с использованием параметров Эйлера:

$$\boldsymbol{\lambda}'' + \frac{C^2}{4}\boldsymbol{\lambda} = \frac{r^3}{2}[\tilde{\mathbf{Q}}^* - \operatorname{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{Q}^*)\boldsymbol{\lambda}] \tag{2.6}$$

$$r'' + C^2 r - 3fm_e r^2 - 4h^* r^3 = -\frac{\partial(r^4\Pi^*)}{\partial r} + r^4\,\mathrm{scal}(\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{q}) \tag{2.7}$$

$$h^{*\prime} = r^2\frac{\partial\Pi^*_{\mathrm{ts}}}{\partial t} + \mathrm{scal}(\boldsymbol{\mu}^*\circ\mathbf{q}),\quad \boldsymbol{\mu}^* = r'\boldsymbol{\lambda} + 2r\boldsymbol{\lambda}' \tag{2.8}$$

$$C^{2\prime} = 4r^3\,\mathrm{scal}(\boldsymbol{\lambda}'\circ\mathbf{Q}^*) \tag{2.9}$$

$$t' = r^2, \tag{2.10}$$

где

$$\Pi^* = \Pi^*_z(\mathbf{r}_x) + \Pi^*_{\mathrm{ts}}(t,\mathbf{r}_x),\quad \mathbf{p}_x = \mathbf{p}_x(t,\mathbf{r}_x,\mathbf{v}_x),\quad \mathbf{r}_x = r\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{k}\circ\tilde{\boldsymbol{\lambda}},\quad \mathbf{v}_x = r^{-2}\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{k}\circ\tilde{\boldsymbol{\mu}}^*$$

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{q} - \frac{1}{2r}\frac{\partial\Pi^*}{\partial\tilde{\boldsymbol{\lambda}}},\quad \tilde{\mathbf{Q}}^* = \tilde{\mathbf{q}} - \frac{1}{2r}\frac{\partial\Pi^*}{\partial\boldsymbol{\lambda}},\quad \mathbf{q} = -\mathbf{k}\circ\tilde{\boldsymbol{\lambda}}\circ\mathbf{p}_x,\quad \tilde{\mathbf{q}} = -\mathbf{p}_x\circ\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{k} \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial\Pi^*}{\partial\tilde{\boldsymbol{\lambda}}},\frac{\partial\Pi^*}{\partial\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\partial\Pi^*}{\partial\lambda_0} \mp \left(\frac{\partial\Pi^*}{\partial\lambda_1}\mathbf{i} + \frac{\partial\Pi^*}{\partial\lambda_2}\mathbf{j} + \frac{\partial\Pi^*}{\partial\lambda_3}\mathbf{k}\right),$$

h^* — полная энергия единицы массы тела.

В уравнениях (2.6)–(2.9) и соотношениях (2.11)

$$\frac{\partial\Pi^*}{\partial\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\partial\Pi^*}{\partial\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\boldsymbol{\lambda}} + \frac{\partial\Pi^*_{\mathrm{ts}}}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial\boldsymbol{\lambda}} =$$

$$= 2\frac{\partial\Pi^*}{\partial\gamma}(\lambda_0 - \lambda_1\mathbf{i} - \lambda_2\mathbf{j} + \lambda_3\mathbf{k}) + \frac{\partial\Pi^*_{\mathrm{ts}}}{\partial l}(-\lambda_{30} - \lambda_{21}\mathbf{i} + \lambda_{12}\mathbf{j} + \lambda_{03}\mathbf{k}) \tag{2.12}$$

$$\mathrm{scal}(\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{Q}^*) = \mathrm{scal}(\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{q}) - \frac{1}{2r}\mathrm{scal}\left(\boldsymbol{\lambda}\circ\frac{\partial\Pi^*}{\partial\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}\right) = \mathrm{scal}(\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{q}) - \frac{\gamma}{r}\frac{\partial\Pi^*}{\partial\gamma} \tag{2.13}$$

$$\mathrm{scal}(\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{q}) = p_{3y} = a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 \tag{2.14}$$

$$\mathrm{scal}(\boldsymbol{\lambda}'\circ\mathbf{Q}^*) = \mathrm{scal}(\boldsymbol{\lambda}'\circ\mathbf{q}) - \frac{1}{2r}\mathrm{scal}\left(\boldsymbol{\lambda}'\circ\frac{\partial\Pi^*}{\partial\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}\right) \tag{2.15}$$

$$2\,\mathrm{scal}\,(\boldsymbol{\lambda}'\circ\mathbf{q}) = a'_{31}p_1 + a'_{32}p_2 + a'_{33}p_3 \tag{2.16}$$

$$\mathrm{scal}\left(\boldsymbol{\lambda}'\circ\frac{\partial\Pi^*}{\partial\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}\right) = \frac{\partial\Pi^*}{\partial\gamma}\gamma' + \frac{\partial\Pi^*_{\mathrm{ts}}}{\partial l}(\lambda_{03}\lambda'_3 - \lambda_{30}\lambda'_0 + \lambda_{12}\lambda'_2 - \lambda_{21}\lambda'_1), \tag{2.17}$$

где

$$\lambda_{ij} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \lambda_j^2},\quad i,j = 0,1,2,3$$

Элементы a_{ik} матрицы a направляющих косинусов углов между осями ВСК Y и ИСК X выражаются через параметры Эйлера λ_j посредством соотношений

$$\begin{gathered}
a_{11} = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2,\quad a_{12} = 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3),\quad a_{13} = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)\\
a_{21} = 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3),\quad a_{22} = \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2,\quad a_{23} = 2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1)\\
a_{31} = 2(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3),\quad a_{32} = 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1),\quad a_{33} = \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2
\end{gathered} \tag{2.18}$$

Потенциал Π^* определяется предпоследней формулой (2.2) и формулами (2.3) и (2.4).

В скалярной записи регуляризованные уравнения возмущенного орбитального движения тела в гравитационном поле Земли образуют систему ДУ 13-го порядка и имеют при учете соотношений (2.12)–(2.17) вид

$$\lambda_0'' + \frac{C^2}{4}\lambda_0 = \frac{r^2}{2}\frac{\partial \Pi^*}{\partial \gamma}(\gamma - 1)\lambda_0 + \frac{r^2}{4}\frac{\partial \Pi^*_{\text{ts}}}{\partial l}\lambda_{30} + \frac{r^3}{2}[(p_3 - p_{3y})\lambda_0 - p_2\lambda_1 + p_1\lambda_2]$$

$$\lambda_1'' + \frac{C^2}{4}\lambda_1 = \frac{r^2}{2}\frac{\partial \Pi^*}{\partial \gamma}(\gamma + 1)\lambda_1 + \frac{r^2}{4}\frac{\partial \Pi^*_{\text{ts}}}{\partial l}\lambda_{21} + \frac{r^3}{2}[-p_2\lambda_0 - (p_3 + p_{3y})\lambda_1 + p_1\lambda_3]$$

$$\lambda_2'' + \frac{C^2}{4}\lambda_2 = \frac{r^2}{2}\frac{\partial \Pi^*}{\partial \gamma}(\gamma + 1)\lambda_2 - \frac{r^2}{4}\frac{\partial \Pi^*_{\text{ts}}}{\partial l}\lambda_{12} + \frac{r^3}{2}[p_1\lambda_0 - (p_3 + p_{3y})\lambda_2 + p_2\lambda_3] \tag{2.19}$$

$$\lambda_3'' + \frac{C^2}{4}\lambda_3 = \frac{r^2}{2}\frac{\partial \Pi^*}{\partial \gamma}(\gamma - 1)\lambda_3 - \frac{r^2}{4}\frac{\partial \Pi^*_{\text{ts}}}{\partial l}\lambda_{03} + \frac{r^3}{2}[p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + (p_3 - p_{3y})\lambda_3]$$

$$r'' + C^2 r - 3fm_e r^2 - 4h^* r^3 = -\frac{\partial (r^4 \Pi^*)}{\partial r} + p_{3y} r^4 \tag{2.20}$$

$$h^{*\prime} = \frac{\partial \Pi^*_{\text{ts}}}{\partial t} r^2 + p_{3y} r' + 2r\,\text{scal}(\boldsymbol{\lambda}' \circ \mathbf{q}) \tag{2.21}$$

$$C^{2\prime} = -2r^2\left[\frac{\partial \Pi^*}{\partial \gamma}\gamma' + \frac{\partial \Pi^*_{\text{ts}}}{\partial l}(\lambda_{03}\lambda_3' - \lambda_{30}\lambda_0' + \lambda_{12}\lambda_2' - \lambda_{21}\lambda_1')\right] + 4r^3\,\text{scal}(\boldsymbol{\lambda}' \circ \mathbf{q}) \tag{2.22}$$

$$t' = r^2 \tag{2.23}$$

Величины $p_{3y} = \text{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{q})$ и $\text{scal}(\boldsymbol{\lambda}' \circ \mathbf{q})$ определены соотношениями (2.14) и (2.16).

Кватернионные регуляризованные ДУ возмущенного орбитального движения тела в гравитационном поле Земли, в которых используются проекции C_1 и C_2 ($C_3 = 0$) вектора момента орбитальной скорости тела на оси ВСК Y, кватернион $\boldsymbol{\lambda}$ ориентации этой системы координат в ИСК и независимая переменная τ, имеют вид уравнений (1.36), (2.7), (2.8), (2.10), дополненных соотношениями (2.3), (2.4), (2.11), (2.14), (2.16) и соотношениями

$$\text{vect}(\mathbf{Q}^* \circ \boldsymbol{\lambda}) = \text{vect}(\mathbf{q} \circ \boldsymbol{\lambda}) - \frac{1}{2r}\text{vect}\left(\frac{\partial \Pi^*}{\partial \tilde{\boldsymbol{\lambda}}} \circ \boldsymbol{\lambda}\right)$$

$$\text{vect}(\mathbf{q} \circ \boldsymbol{\lambda}) = -\text{vect}(\mathbf{k} \circ \mathbf{p}_y) = p_{2y}\mathbf{i} - p_{1y}\mathbf{j} =$$

$$= (a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3)\mathbf{i} - (a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3)\mathbf{j}$$

$$\text{vect}\left(\frac{\partial \Pi^*}{\partial \tilde{\boldsymbol{\lambda}}} \circ \boldsymbol{\lambda}\right) = \left[2\frac{\partial \Pi^*}{\partial \gamma}a_{23} + \frac{\partial \Pi^*_{\text{ts}}}{\partial l}(\lambda_{03}\lambda_{21} - \lambda_{12}\lambda_{30})\right]\mathbf{i} -$$

$$- \left[2\frac{\partial \Pi^*}{\partial \gamma}a_{13} + \frac{\partial \Pi^*_{\text{ts}}}{\partial l}(\lambda_{03}\lambda_{12} + \lambda_{21}\lambda_{30})\right]\mathbf{j}$$

В скалярной записи эти уравнения возмущенного орбитального движения тела в гравитационном поле Земли образуют систему ДУ 10-го порядка и имеют вид

$$C_s' = (-1)^{s+1} r^2 \left(\frac{\partial \Pi^*}{\partial \gamma} a_{3-s3} - (-1)^{s+1} \frac{1}{4} \frac{\partial \Pi_{\text{ts}}^*}{\partial l} \frac{a_{s3}}{1 - a_{33}^2} \right) - $$
$$- (-1)^{s+1} r^3 (a_{3-s1} p_1 + a_{3-s2} p_2 + a_{3-s3} p_3) \tag{2.24}$$
$$s = 1, 2$$

$$2\lambda_0' = -C_1\lambda_1 - C_2\lambda_2, \quad 2\lambda_1' = C_1\lambda_0 - C_2\lambda_3$$
$$2\lambda_2' = C_2\lambda_0 + C_1\lambda_3, \quad 2\lambda_3' = C_2\lambda_1 - C_1\lambda_2 \tag{2.25}$$

$$r'' + (C_1^2 + C_2^2) r - 3 f m_e r^2 - 4 h^* r^3 = -\frac{\partial (r^4 \Pi^*)}{\partial r} + (a_{31} p_1 + a_{32} p_2 + a_{33} p_3) r^4 \tag{2.26}$$

$$h^{*\prime} = \frac{\partial \Pi_{\text{ts}}^*}{\partial t} r^2 + (a_{31} p_1 + a_{32} p_2 + a_{33} p_3) r' + (a_{31}' p_1 + a_{32}' p_2 + a_{33}' p_3) r \tag{2.27}$$

Отметим, что в уравнениях (2.24), (2.26) и (2.27) присутствуют элементы a_{ik} матрицы a направляющих косинусов углов между осями ВСК Y и ИСК X, выражаемые через параметры Эйлера λ_j посредством соотношений (2.18). Поэтому вместо системы уравнений (2.24)–(2.27), (2.18) в параметрах Эйлера λ_j может быть использована система уравнений в направляющих косинусах a_{ik} (образуемая уравнениями (2.24), (2.26), (2.27) и кинематическими уравнениями Пуассона)

$$a_{1i}' = -C_2 a_{3i}, \quad a_{2i}' = C_1 a_{3i}, \quad a_{3i}' = C_2 a_{1i} - C_1 a_{2i}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.28}$$

вместо кинематических уравнений (2.25) в параметрах Эйлера. Эти уравнения должны быть дополнены ДУ (2.10) для времени t. Здесь

$$\Pi^* = \Pi_z^* + \Pi_{\text{ts}}^*, \quad \Pi_z^* = \Pi_z^*(r, \gamma), \quad \Pi_{\text{ts}}^* = \Pi_{\text{ts}}^*(r, \gamma, l)$$
$$\gamma = a_{33}, \quad l = l_a - \Omega_e t, \quad l_a = a_{32}/a_{31}$$

Уравнения (2.24), (2.26)–(2.28), (2.10) образуют замкнутую систему регуляризованных ДУ 15-го порядка относительно двух проекций C_1 и C_2 вектора момента орбитальной скорости тела на оси ВСК Y, девяти направляющих косинусов углов a_{ki} ориентации этой системы координат, расстояния r и его производной r', энергии h^* и времени t.

Вместо уравнений (2.24) и (2.28) в этой системе могут быть использованы уравнения относительно трех проекций C_i^* вектора момента орбитальной скорости тела на оси ИСК X и другая форма кинематических уравнений Пуассона, имеющие в скалярной записи вид

$$C_s^{*\prime} = r^2 \left[-(-1)^{s+1} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \gamma} a_{33-s} + \frac{1}{4} \frac{\partial \Pi_{\text{ts}}^*}{\partial l} \frac{a_{3s} a_{33}}{1 - a_{33}^2} \right] - (-1)^{s+1} r^3 (a_{33-s} p_3 - a_{33} p_{3-s}), \quad s = 1, 2 \tag{2.29}$$

$$C_3^{*\prime} = -r^2 \frac{\partial \Pi_{\text{ts}}^*}{\partial l} - r^3 (a_{31} p_2 - a_{32} p_1) \tag{2.30}$$

$$a_{i1}' = C_2^* a_{i3} - C_3^* a_{i2}, \quad a_{i2}' = C_3^* a_{i1} - C_1^* a_{i3}, \quad a_{i3}' = C_1^* a_{i2} - C_2^* a_{i1}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.31}$$

При этом в уравнении (2.26) вместо суммы $C_1^2 + C_2^2$ необходимо взять сумму $C_1^{*2} + C_2^{*2} + C_3^{*2}$.

Регуляризованные уравнения возмущенного орбитального движения тела, использующие проекции C_i^* вектора момента орбитальной скорости тела на оси ИСК X, в отличие от уравнений, использующих проекции C_i этого вектора на оси ВСК Y, имеют более сложную структуру и образуют систему ДУ 16-го порядка.

Полученные уравнения возмущенного орбитального движения тела (2.19)–(2.23) и (2.24)–(2.27), (2.23), записанные в ВСК с использованием в качестве параметров ориентации этой системы координат четырехмерных параметров Эйлера и с использованием новой независимой переменной τ, связанной с временем t дифференциальным соотношением $dt/d\tau = r^2$, в отличие от классических уравнений в декартовых и криволинейных координатах, регулярны (не содержат деления на расстояние r от центра масс тела до центра масс Земли) для орбитального движения тела в ньютоновском гравитационном поле Земли под действием возмущающих сил, в описании которых не содержатся отрицательные степени расстояния r выше первой. Кроме того, полученные уравнения движения тела в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются не только центральная (ньютоновская), но и зональные, тессеральные и секториальные гармоники потенциала поля тяготения Земли, т.е. учитывается несферичность Земли, имеют следующие дополнительные (в смысле регулярности) достоинства.

1. В ДУ второго порядка для параметров Эйлера λ_j слагаемые правых частей уравнений, описывающие влияние зональных, тессеральных и секториальных гармоник гравитационного потенциала поля Земли и содержащие при использовании в качестве независимой переменной времени t отрицательные степени расстояния r пятого, шестого и выше степеней, переходят при использовании новой независимой переменной τ в слагаемые ДУ (2.19), имеющие первую, вторую и, так далее, отрицательные степени расстояния r, т.е. отрицательные степени расстояния r в этих слагаемых уменьшаются на четыре единицы.

2. В ДУ (2.20) или (2.26) для расстояния r регуляризуются первые две гармоники потенциала гравитационного поля Земли (первые два слагаемых преобразованного потенциала $r^4\Pi^*$ содержат первую и нулевую степени расстояния r), так как в этом уравнении присутствует частная производная $\partial(r^4\Pi^*)/\partial r$, а не частная производная $\partial\Pi^*/\partial r$, присутствующая в уравнении для расстояния r в случае использования в качестве независимой переменной времени t. Поэтому слагаемые в правой части уравнения для расстояния r, описывающие влияние зональных, тессеральных и секториальных гармоник гравитационного потенциала поля Земли и содержащие в соответствии с формулами (2.3) и (2.4) при использовании независимой переменной времени t отрицательные степени расстояния r четвертой, пятой и выше степеней, переходят в регуляризованном уравнении (2.20), использующем новую независимую переменную τ, в слагаемые, имеющие нулевую, первую, вторую и так далее отрицательные степени, т.е. отрицательные степени расстояния r в этих слагаемых уменьшаются на четыре единицы.

3. В ДУ (2.21) или (2.27) для полной энергии h^* в правой части уравнения присутствует слагаемое $r^2(\partial\Pi_{ts}^*/\partial t)$, содержащее лишь частную производную по времени от потенциала, описывающего тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли (влияние на изменение полной энергии зональных гармоник гравитационного поля Земли отсутствует). В отличие от нерегуляризованного уравнения (1.14) для полной энергии, в регуляризованном уравнении (2.21) отрицательные степени расстояния r в слагаемых, описывающих влияние тессеральных и секториальных гармоник гравитационного поля Земли, уменьшаются на две единицы.

4. ДУ (2.22) для переменной C^2 (квадрата модуля вектора момента орбитальной скорости тела), в котором в качестве независимой переменной используется переменная τ, с точки зрения регулярности равносильно первому ДУ из совокупности уравнений (1.24), в котором в качестве независимой переменной используется время t: и в том, и в другом уравнении отрицательные степени расстояния r в слагаемых, описывающих влияние зональных, тессеральных и секториальных гармоник гравитационного поля Земли, уменьшаются на две единицы. Однако, как уже отмечалось, уравнение (2.22) может быть исключено из состава системы регуляризованных уравнений (2.19)–(2.23), если учесть, что переменная C^2 может быть выражена через производные λ'_j от параметров Эйлера λ_j по формуле (1.38).

5. ДУ (2.24) для проекций C_1 и C_2 ($C_3 = 0$) вектора момента орбитальной скорости тела имеют с точки зрения регулярности свойства, аналогичные уравнению (2.22) для переменной C^2.

6. Дифференциальные кинематические уравнения (2.25) первого порядка для параметров Эйлера λ_j, входящие в систему (2.24)–(2.27), особых точек не имеют для любого возмущенного орбитального движения тела.

Полученные регуляризованные уравнения возмущенного орбитального движения тела (2.24), (2.26)–(2.28), (2.10) и (2.29)–(2.31), (2.26) (при учете равенства $C_1^2 + C_2^2 = C_1^{*2} + C_2^{*2} + C_3^{*2}$), (2.27), (2.10), записанные во вращающейся системе координат с использованием в качестве параметров ориентации этой системы координат направляющих косинусов углов, имеют свойства, аналогичные указанным выше свойствам регуляризованных уравнений, использующим для этих целей параметры Эйлера, но имеют более высокие размерности, равные 15-ти и 16-ти единицам соответственно.

3. Уравнения орбитального движения тела в гравитационном поле Земли при учете его зональных гармоник и их анализ. При учете только центральной и зональных гармоник имеем

$$p_i = 0, \quad p_{3y} = 0, \quad \Pi^* = \Pi_z^*, \quad \Pi_{\text{ts}}^* = 0$$

и уравнения (2.19)–(2.23) орбитального движения тела в гравитационном поле Земли принимают вид

$$\lambda_k'' + \frac{1}{4}C^2\lambda_k = \frac{r^2}{2}\frac{\partial\Pi_z^*}{\partial\gamma}(\gamma + \delta_k)\lambda_k, \quad \delta_k = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad k = 0, 3 \\ +1 & \text{при} \quad k = 1, 2 \end{cases} \tag{3.1}$$

$$r'' + C^2 r - 3fm_e r^2 - 4h^* r^3 = -\frac{\partial(r^4\Pi_z^*)}{\partial r} \tag{3.2}$$

$$h^{*\prime} = 0 \tag{3.3}$$

$$C^{2\prime} = -2r^2\frac{\partial\Pi_z^*}{\partial\gamma}\gamma' \tag{3.4}$$

$$t' = r^2, \tag{3.5}$$

где

$$\Pi_z^* = \Pi_z^*(r, \gamma), \quad \gamma = \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 - 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1$$

Уравнение (3.4) может быть исключено из состава системы уравнений (3.1)–(3.5), если учесть, что переменная C^2 может быть выражена через производные λ'_j от параметров Эйлера λ_j по формуле

$$C^2 = 4(\lambda_0'^2 + \lambda_1'^2 + \lambda_2'^2 + \lambda_3'^2)$$

Из уравнения (3.3) следует первый интеграл уравнений движения тела

$$h^* = \frac{v^2}{2} - \frac{fm_e}{r} + \Pi_z^*(r, \gamma) = \text{const} = h^*(0) = h_0^*, \tag{3.6}$$

где

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} = \frac{r'^2}{r^4} + \frac{4}{r^2}(\lambda_0'^2 + \lambda_1'^2 + \lambda_2'^2 + \lambda_3'^2)$$

Из уравнения (3.4) следует равенство

$$\frac{dC^2}{d\gamma} = -2r^2\frac{\partial\Pi_z^*(r, \gamma)}{\partial\gamma}$$

учитывая которое, ДУ (3.1) можно записать в виде

$$\lambda_k'' + \frac{1}{4}\left[C^2 + (\gamma + \delta_k)\frac{dC^2}{d\gamma}\right]\lambda_k = 0 \quad \text{или} \quad \lambda_k'' + \frac{1}{4}\left\{\frac{d}{d\gamma}[(\gamma + \delta_k)C^2]\right\}\lambda_k = 0;$$
$$k = 0, 1, 2, 3,$$

иллюстрирующем влияние переменной C^2 (квадрата модуля вектора момента орбитальной скорости тела), являющейся постоянной величиной в случае орбитального движения тела в ньютоновском гравитационном поле, на переменные λ_j.

Отметим, что вместо уравнений (3.1) и (3.4) в составе уравнений орбитального движения тела могут быть использованы уравнения (2.25) и уравнения

$$C_1' = 2r^2\frac{\partial\Pi^*}{\partial\gamma}(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \quad C_2' = 2r^2\frac{\partial\Pi^*}{\partial\gamma}(\lambda_0\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3), \tag{3.7}$$

вытекающие в рассматриваемом случае из другой формы уравнений орбитального движения тела (2.24) и использующие для описания движения тела ДУ (2.25) не второго, а первого порядка относительно параметров Эйлера λ_j.

Умножим уравнение системы (3.1) при $k = 0$ на $2\lambda_0'$, а при $k = 3$ – на $2\lambda_3'$ и сложим левые и правые части полученных уравнений. Аналогично, умножим уравнение системы (3.1) при $k = 1$ на $2\lambda_1'$, а при $k = 2$ – на $2\lambda_2'$ и сложим левые и правые части полученных уравнений. Интегрируя найденные уравнения, получим первые интегралы уравнений орбитального движения тела (3.1)–(3.5)

$$\lambda_0'^2 + \lambda_3'^2 + \frac{1}{8}(\gamma - 1)C^2 = \lambda_0'^2 + \lambda_3'^2 - \frac{1}{4}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)C^2 = c_\alpha = \text{const} \tag{3.8}$$

$$\lambda_1'^2 + \lambda_2'^2 - \frac{1}{8}(\gamma + 1)C^2 = \lambda_1'^2 + \lambda_2'^2 - \frac{1}{4}(\lambda_0^2 + \lambda_3^2)C^2 = c_\beta = \text{const} \tag{3.9}$$

Можно показать, используя уравнения (2.25), что постоянные интегрирования c_α и c_β равны нулю и что в силу равенств

$$C^2 = 4(\lambda_0'^2 + \lambda_1'^2 + \lambda_2'^2 + \lambda_3'^2), \quad \gamma = 1 - 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1$$

интегралы (3.8) и (3.9) эквивалентны (из интеграла (3.8) при учете равенств $c_\alpha = c_\beta = 0$ следует (с точностью до знака) интеграл (3.9) и наоборот). С учетом сказанного из интегралов (3.8) и (3.9) выводим равенства

$$\lambda_0'^2 + \lambda_3'^2 - \frac{1}{4}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)C^2 = -(\lambda_1'^2 + \lambda_2'^2) + \frac{1}{4}(\lambda_0^2 + \lambda_3^2)C^2 = 0 \tag{3.10}$$

Умножим уравнение системы (3.1) при $k = 0$ на λ_3, а при $k = 3$ – на λ_0 и вычтем из первого полученного уравнения второе полученное уравнение. Аналогично, умножим уравнение системы (3.1) при $k = 1$ на λ_2, а при $k = 2$ – на λ_1 и вычтем из первого полученного уравнения второе полученное уравнение. Проинтегрируем полученные уравнения. Получим первые интегралы уравнений орбитального движения тела (3.1)–(3.5)

$$\lambda_3\lambda_0' - \lambda_0\lambda_3' = c_{03} = \text{const}, \quad \lambda_2\lambda_1' - \lambda_1\lambda_2' = c_{12} = \text{const} \tag{3.11}$$

Из соотношения (1.10), справедливого в силу сделанного выбора ВСК Y, следует равенство

$$\lambda_3\lambda_0' - \lambda_0\lambda_3' = \lambda_2\lambda_1' - \lambda_1\lambda_2'$$

Из сопоставления этого соотношения с соотношениями (3.11) следует равенство постоянных интегрирования c_{03} и c_{12}.

Подставим в выражения $2(\lambda_3\lambda_0' - \lambda_0\lambda_3')$ и $2(\lambda_2\lambda_1' - \lambda_1\lambda_2')$ производные λ_j' из уравнений (2.25). Получим соотношения, из сопоставления которых с соотношениями (3.11) следует, что первым интегралам (3.11) уравнений орбитального движения тела (3.1)–(3.5) соответствует первый интеграл другой формы уравнений орбитального движения тела (3.7) и (2.25), имеющий вид

$$C_1(\lambda_0\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3) - C_2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) = 2c_{03} = 2c_{12} = \text{const}$$

Его можно записать следующим образом:

$$C_3^* = 2(\lambda_0\lambda_3' - \lambda_3\lambda_0' + \lambda_1\lambda_2' - \lambda_2\lambda_1') = -4c_{03} = -4c_{12} = \text{const}, \tag{3.12}$$

где $C_3^* = 2C_1(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) + 2C_2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)$ – проекция вектора момента орбитальной скорости тела на ось OX_3 ИСК.

С другой стороны, в силу сделанного выбора ВСК Y имеет место равенство $C_3 = 0$, из которого с учетом третьего из соотношений (1.25) следует, что

$$C_3 = 2(\lambda_0\lambda_3' - \lambda_3\lambda_0' - \lambda_1\lambda_2' + \lambda_2\lambda_1') = 0 \tag{3.13}$$

Таким образом, уравнения орбитального движения тела в гравитационном поле Земли при учете его зональных гармоник имеют два интеграла моментов орбитальной скорости (3.12) и (3.13), в соответствии с которыми проекция C_3^* вектора момента скорости центра масс тела на инерциальную координатную ось OX_3, направленную вдоль оси вращения Земли, – величина постоянная, а проекция C_3 этого вектора на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс тела (ось OY_3) остается во все время движения тела равной нулю.

Отметим, что интегралы (3.12) и (3.13) – линейные композиции интегралов (3.11).

Введем новые переменные

$$\kappa = \lambda_0^2 + \lambda_3^2, \quad \nu = \lambda_1^2 + \lambda_2^2, \quad \alpha = \lambda_0'^2 + \lambda_3'^2, \quad \beta = \lambda_1'^2 + \lambda_2'^2 \tag{3.14}$$

связанные с переменными γ и C^2 соотношениями

$$\kappa = \frac{1}{2}(1 + \gamma), \quad \nu = \frac{1}{2}(1 - \gamma), \quad \gamma = 2\kappa - 1 = 1 - 2\nu, \quad \alpha + \beta = \frac{1}{4}C^2$$

Отметим, что имеют место равенства

$$\kappa + \nu = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1, \quad \kappa' + \nu' = 2(\lambda_0\lambda_0' + \lambda_1\lambda_1' + \lambda_2\lambda_2' + \lambda_3\lambda_3') = 0, \tag{3.15}$$

являющиеся первыми частными интегралами уравнений (3.1), выполняющимися для любых начальных условий возмущенного орбитального движения тела в силу смысла параметров Эйлера λ_j.

Введем обозначения

$$A_{\mp} = C^2 - 2r^2\frac{\partial\Pi_z^*}{\partial\gamma}(\gamma \mp 1) = C^2 + (\gamma \mp 1)\frac{dC^2}{d\gamma} = \frac{d}{d\gamma}[(\gamma\mp)C^2] \tag{3.16}$$

Уравнения (3.1) примут вид

$$\lambda_k'' + \frac{1}{4}A\lambda_k = 0, \quad k = 0,1,2,3; \quad A = \begin{cases} A_- & \text{при} \quad k = 0,3 \\ A_+ & \text{при} \quad k = 1,2 \end{cases} \tag{3.17}$$

Умножим уравнение системы (3.17) при $k = 0$ на $2\lambda_0$, а при $k = 3$ – на $2\lambda_3$ и сложим левые и правые части полученных уравнений. Затем умножим уравнение системы (3.17) при $k = 0$ на $2\lambda_0'$, а при $k = 3$ – на $2\lambda_3'$ и сложим левые и правые части полученных уравнений. Аналогичные операции проделаем с уравнениями системы (3.17) при $k = 1$ и $k = 2$, умножая эти уравнения соответственно на $2\lambda_1$ и $2\lambda_2$ и складывая полученные уравнения, а затем – на $2\lambda_1'$ и $2\lambda_2'$ и складывая полученные уравнения. В итоге с учетом обозначений (3.14) получим уравнения орбитального движения тела в новых переменных κ, α, ν и β

$$\kappa'' - 2\alpha + \frac{1}{2}A_-\kappa = 0, \quad \alpha' + \frac{1}{4}A_-\kappa' = 0, \quad \nu'' - 2\beta + \frac{1}{2}A_+\nu = 0, \quad \beta' + \frac{1}{4}A_+\nu' = 0 \tag{3.18}$$

При этом переменная γ в выражениях для коэффициентов A_- и A_+ этих уравнений должна быть заменена (после вычисления производной $\partial\Pi_z^*/\partial\gamma$) на переменную κ или ν по формуле $\gamma = 2\kappa - 1$ или $\gamma = 1 - 2\nu$.

Умножим первое уравнение системы (3.18) на κ', а второе на 2κ и сложим левые и правые части полученных уравнений. Аналогично, умножим третье уравнение системы (3.18) на ν', а четвертое на 2ν и сложим левые и правые части полученных уравнений. В итоге после интегрирования полученных уравнений найдем первые интегралы уравнений орбитального движения тела в переменных κ, α, ν и β

$$\kappa'^2 - 4\alpha\kappa = c_\kappa = \text{const}, \quad \nu'^2 - 4\beta\nu = c_\nu = \text{const} \tag{3.19}$$

Имеют место равенства

$$\kappa' = -\nu', \quad \alpha\kappa = \beta\nu = \frac{1}{4}C^2\kappa\nu = \frac{1}{4}C^2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2),$$

второе из которых устанавливается с помощью уравнений (2.25). Поэтому постоянные интегрирования c_κ и c_ν равны, а первый и второй интегралы (3.19) эквивалентны:

$$\kappa'^2 - 4\alpha\kappa = \nu'^2 - 4\beta\nu = c_\kappa = c_\nu = \text{const} \tag{3.20}$$

Из интеграла (3.20) следуют соотношения

$$\alpha - \beta + (\kappa - \nu)(\alpha + \beta) = \alpha - \beta + \gamma(\alpha + \beta) = \alpha - \beta + \frac{1}{4}\gamma C^2 = 0$$

Из соотношений (3.10), вытекающих из первых интегралов (3.8) и (3.9), при учете обозначений (3.14) выводим равенства

$$\alpha = \frac{1}{4}\nu C^2 = \frac{1}{4}(1-\kappa)C^2, \quad \beta = \frac{1}{4}\kappa C^2 = \frac{1}{4}(1-\nu)C^2 \tag{3.21}$$

Первый интеграл (3.20) с учетом соотношений (3.21) запишем в виде

$$\kappa'^2 - \kappa(1-\kappa)C^2 = \nu'^2 - \nu(1-\nu)C^2 = c_\kappa = c_\nu = \mathrm{const} \tag{3.22}$$

После подстановки в интеграл (3.22) первого из соотношений (3.14), выполнения операции дифференцирования и подстановки в полученный результат выражений для производных λ_0' и λ_3' из уравнений (2.25) найдем

$$[(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)C_1 + (\lambda_0\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3)C_2]^2 - (\lambda_0^2 + \lambda_3^2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)(C_1^2 + C_2^2) = c_\kappa = \mathrm{const} \tag{3.23}$$

С учетом выражений (2.18) для направляющих косинусов углов первый интеграл (3.23) запишем в виде

$$(a_{23}C_1 - a_{13}C_2)^2 - (1 - a_{33}^2)(C_1^2 + C_2^2)L_\kappa = 4c_\kappa = \mathrm{const} \tag{3.24}$$

Первый интеграл (3.23) может быть также преобразован к виду

$$[(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2)C_1 + (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_0\lambda_1)C_2]^2 = -c_\kappa = \mathrm{const},$$

а интеграл (3.24) — к виду

$$(a_{13}C_1 + a_{23}C_2)^2 = C_3^{*2} = -4c_\kappa = \mathrm{const} \tag{3.25}$$

Из сопоставления первых интегралов (3.25) и (3.12) видно, что они связаны нелинейной (квадратичной) зависимостью, а постоянные интегрирования c_κ и c_{03} связаны соотношением $c_\kappa = -4c_{03}^2$.

С учетом соотношений (3.21) для переменных α и β и соотношений (3.16) для коэффициентов A_- и A_+ первое и третье уравнения системы (3.18) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} &\kappa'' - \frac{1}{2}C^2 + \left[C^2 + 2r^2\frac{\partial \Pi_z^*}{\partial \gamma}(1-\kappa)\right]\kappa = 0 \\ &\nu'' - \frac{1}{2}C^2 + \left[C^2 + 2r^2\frac{\partial \Pi_z^*}{\partial \gamma}(\nu-1)\right]\nu = 0, \end{aligned} \tag{3.26}$$

где переменная γ должна быть заменена (после вычисления производной $\partial\Pi_z^*/\partial\gamma$) на переменную κ или ν по формуле $\gamma = 2\kappa - 1$ или $\gamma = 1 - 2\nu$.

Таким образом, из системы уравнений (3.1) для переменных λ_k следуют уравнения (3.26) для переменных κ и ν, которые эквивалентны в силу соотношения $\kappa = 1 - \nu$.

Из первого уравнения (3.26) следует (при учете равенства $\kappa = (1+\gamma)/2$) уравнение

$$\gamma'' + C^2\gamma + r^2\frac{\partial \Pi_z^*(r,\gamma)}{\partial \gamma}(1-\gamma^2) = 0 \tag{3.27}$$

для переменной γ, от которой зависит потенциал Π_z^* зональных гармоник гравитационного поля Земли. Из первого интеграла (3.22) следует соотношение

$$\gamma'^2 - (1-\gamma^2)C^2 = 4c_\kappa = 4c_\nu = \mathrm{const}, \tag{3.28}$$

которое является первым интегралом уравнений (3.27) и (3.4).

Умножим ДУ (3.2) для расстояния r на r', ДУ (3.4) для переменной C^2 на r^2. Сложим левые и правые части полученных уравнений и проинтегрируем. Получим первый интеграл уравнений орбитального движения тела

$$r'^2 + C^2 r^2 - 2fm_e r^3 - 2(h^* - \Pi_z^*(r, \gamma))r^4 = c_r = \text{const}, \tag{3.29}$$

где h^* — постоянная полная энергия орбитального движения тела (точнее, единицы массы тела), определяемая интегралом энергии (3.6).

Можно показать, что постоянная интегрирования c_r в интеграле (3.29) равна нулю.

Таким образом, уравнения (3.1)—(3.5) орбитального движения тела, в которых учтены зональные гармоники гравитационного поля Земли, имеют первые интегралы (3.6), (3.8), (3.9), (3.11), (3.29). Интегралы (3.8) и (3.9) эквивалентны, из них следует интеграл (3.10). Интегралы моментов орбитальной скорости (3.12) и (3.13) — линейные композиции интегралов (3.11). Частные первые интегралы (3.15) выполняются для любых начальных условий возмущенного орбитального движения тела в силу смысла параметров Эйлера λ_j.

Из уравнений орбитального движения (3.1)—(3.5) вытекает замкнутая система трех регуляризованных ДУ (3.2), (3.4) и (3.27) относительно расстояния r, квадрата модуля орбитальной скорости C^2 и переменной $\gamma = \sin\varphi$ (φ — геоцентрическая широта). Уравнения (3.2) и (3.27) имеют второй порядок, уравнение (3.4) — первый. Уравнения (3.2) и (3.27) имеют первые интегралы (3.29) и (3.28), которые вместе с уравнением (3.4) образуют замкнутую нелинейную систему трех ДУ первого порядка относительно переменных r, C^2 и γ.

4. Заключение.

1. Получена для произвольного вида потенциала $\Pi(r)$ центрального силового поля система регуляризованных ДУ возмущенного орбитального движения твердого тела 13-го порядка. Кватернионное уравнение в параметрах Эйлера, входящее в состав этой системы, имеет осцилляторный вид и регулярно для возмущенного орбитального движения тела в центральном силовом поле с любым видом потенциала $\Pi(r)$ при условии, что члены уравнений, обусловленные возмущающим потенциалом Π^* и возмущающим ускорением $\mathbf{p}$, сохраняют конечные значения. В случае невозмущенного центрального движения это кватернионное уравнение эквивалентно уравнению движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, частота колебаний которого равна половине модуля вектора момента орбитальной скорости тела и зависит от типа движения. Параметры Эйлера характеризуют в случае невозмущенного центрального движения ориентацию плоскости орбиты тела в пространстве.

Уравнение для полной энергии и уравнение для квадрата модуля вектора момента орбитальной скорости, входящие в состав этой системы, также регулярны для любого вида потенциала $\Pi(r)$ (при том же условии конечности возмущающих сил). Уравнение для расстояния r регулярно для потенциала $\Pi(r)$, имеющего вид полинома четвертого порядка относительно отрицательных степеней расстояния до центра притяжения. Поэтому полученная система уравнений в целом регулярна для возмущенного центрального движения тела в силовом поле с этим потенциалом.

Полученные уравнения сложнее кватернионных уравнений в KS-переменных [4, 5, 10—12], поскольку содержат "лишнее" уравнение для расстояния r и уравнение для квадрата модуля вектора момента орбитальной скорости, к тому же уравнение для расстояния не является линейным для невозмущенного кеплеровского движения, как в случае использования KS-переменных. Однако уравнения в KS-переменных регулярны лишь для возмущенного орбитального движения тела в центральном силовом поле с ньютоновским потенциалом $\Pi(r) = -a_1 r^{-1}$ (при том же условии конечности возмущающих сил).

2. Получена для произвольного вида потенциала $\Pi(r)$ центрального силового поля система регуляризованных ДУ возмущенного орбитального движения тела 10-го порядка. Эта система содержит кватернионное ДУ первого порядка относительно двух проекций вектора момента орбитальной скорости тела на оси ВСК и кватернионное ДУ первого порядка относительно четырех параметров Эйлера, ДУ второго порядка относительно расстояния r и ДУ первого порядка относительно полной энергии. Уравнение для расстояния r регулярно для потенциала $\Pi(r)$ центрального силового поля, имеющего вид полинома четвертого порядка относительно отрицательных степеней расстояния до центра притяжения. Остальные уравнения системы регулярны для любого вида потенциала $\Pi(r)$.

Также получена система регуляризованных ДУ возмущенного орбитального движения тела 11-го порядка, содержащая кватернионные ДУ первого порядка в отображениях на инерциальный (а не вращающийся) базис. В нем используются три проекции вектора момента орбитальной скорости тела на оси ИСК. Эта система уравнений имеет такие же свойства (в смысле регулярности), что и система уравнений, использующая проекции вектора момента орбитальной скорости тела на оси ВСК.

3. Предложены регуляризованные кватернионные уравнения возмущенного орбитального движения тела в гравитационном поле Земли. В этих уравнениях помимо центральной (ньютоновской) составляющей гравитационного поля Земли учитываются его зональные, тессеральные и секториальные гармоники. Уравнения регулярны для возмущенного орбитального движения тела в ньютоновском гравитационном поле Земли (при условии конечности возмущающих сил). Кроме того, они имеют дополнительные (в смысле регулярности) достоинства, в частности, в дифференциальных регуляризованных уравнениях второго порядка для параметров Эйлера и расстояния r отрицательные степени расстояния r в слагаемых правых частях уравнений, описывающих влияние зональных, тессеральных и секториальных гармоник гравитационного потенциала поля Земли, уменьшаются (по сравнению с нерегуляризованными уравнениями) на четыре единицы.

4. Получены с использованием направляющих косинусов углов регуляризованные уравнения возмущенного орбитального движения тела, содержащие регуляризованные кинематические уравнения Пуассона. Эти уравнения имеют свойства, аналогичные вышеуказанным свойствам регуляризованных уравнений, использующих параметры Эйлера, но имеют более высокую размерность, равную 15-ти или 16-ти единицам.

5. Найдены первые интегралы полученных регуляризованных уравнений орбитального движения тела в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются центральная (ньютоновская) и зональные гармоники. Получена замкнутая система трех регуляризованных ДУ относительно расстояния r, квадрата модуля орбитальной скорости и синуса геоцентрической широты. Показано, что эти уравнения имеют два первых интеграла, которые позволяют получить замкнутую нелинейную систему трех ДУ первого порядка.

Отметим, что ранее автором статьи были получены [7–10] регулярные кватернионные модели орбитального движения тела, отличные от моделей, полученных в первом разделе статьи. Эти модели также были записаны в ВСК Y с использованием для описания ориентации этой системы координат параметров Эйлера. Однако по радиус-вектору $\mathbf{r}$ центра масс тела направлялась не ось MY_3 ВСК Y, а ее ось MY_1. Поэтому декартовы координаты x_k центра масс тела находились через параметры

Эйлера λ_j^* (отличные от используемых в статье параметров Эйлера λ_j) и расстояние r по формулам

$$x_1 = r(\lambda_0^{*2} + \lambda_1^{*2} - \lambda_2^{*2} - \lambda_3^{*2}), \quad x_2 = 2r(\lambda_1^*\lambda_2^* + \lambda_0^*\lambda_3^*), \quad x_3 = 2r(\lambda_1^*\lambda_3^* - \lambda_0^*\lambda_2^*),$$

отличным от используемых в настоящей работе формул

$$x_1 = 2r(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2), \quad x_2 = 2r(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1), \quad x_3 = r(\lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$$

Переменные λ_j связаны с ранее использованными переменными λ_j^* соотношениями

$$\lambda_{0,3} = \frac{1}{2}(\lambda_0^* \mp \lambda_1^* - \lambda_2^* \mp \lambda_3^*), \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\lambda_0^* \pm \lambda_1^* + \lambda_2^* \mp \lambda_3^*),$$

которые в кватернионной записи принимают вид ортогонального преобразования

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^* \circ \boldsymbol{\pi}, \quad \boldsymbol{\pi} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

Полученные во втором разделе статьи с использованием переменных λ_j регуляризованные кватернионные уравнения возмущенного орбитального движения тела в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются зональные, тессеральные и секториальные гармоники, имеют более простую и симметричную структуру в сравнении с уравнениями, которые могут быть получены с использованием переменных λ_j^*. Это обусловлено тем, что выражения переменной $\gamma = \sin\varphi$ (φ — геоцентрическая широта), от которой зависит потенциал гравитационного поля Земли, через переменные λ_j могут быть представлены в двух различных, более компактных симметричных формах

$$\gamma = 1 - 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1$$

в сравнении с ее представлением

$$\gamma = 2(\lambda_1^*\lambda_3^* - \lambda_0^*\lambda_2^*)$$

в переменных λ_j^*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.
2. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика: Методы теории движения искусственных небесных тел. М.: Наука, 1983. 352 с.
3. *Демин В.Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевский институт компьютерных исследований. 2010. 420 с.
4. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971.
5. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 12–21.
6. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 151–158.
7. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. Ч. 1 // Космические исследования. 1992. Т. 30. Вып. 6. С. 759–770.
8. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 20–30.

9. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 2 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 3–11.

10. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.

11. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. I // Космические исследования. 2013. Т. 51. № 5. С. 389–401.

12. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 6. С. 24–54.

13. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. II // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 6. С. 41–63.

14. *Vivarelli M.D.* The KS transformation in hypercomplex form // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1983. V. 29. P. 45–50.

15. *Шагов О.Б.* О двух видах уравнений движения искусственного спутника Земли в осцилляторной форме // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 3–8.

16. *Vrbik J.* Celestial mechanics via quaternions // Can. J. Phys. 1994. V. 72. P. 141–146.

17. *Vrbik J.* Perturbed Kepler problem in quaternionic form // J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 193–198.

18. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2006. V. 95. P. 201–212.

19. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2008. V. 102. № 1. P. 149–162.

20. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

21. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения М.: Физматлит, 2006. 511 с.

Quaternion Regular Models of Perturbed Orbital Motion of a Rigid Body in the Gravitational Field of the Earth

Yu. N. Chelnokov[a,#]

[a] *Institute of Precision Mechanics and Control of the RAS, Saratov, Russia*
[#] *e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Regular quaternion models of perturbed orbital motion of a rigid body are proposed. The models do not have the features inherent in classical models, both when a body moves in a Newtonian gravitational field, and, in the general case, when a body moves in a central force field, the potential of which has the form of a polynomial of negative degrees of distance to the center of attraction of the fourth order. Regularized quaternion models of the orbital motion of the body in the Earth's gravitational field are also proposed, in the description of which not only the central (Newtonian), but also the zonal, tesseral and sectorial harmonics of the gravitational field potential which describe the non-sphericity of the Earth are taking into account. In these models, the negative degrees of distance to the center of attraction are reduced by several orders of magnitude in terms describing the influence of the zonal, tesseral, and sectorial harmonics of the Earth's gravitational field potential on the orbital motion of a solid body. The main variables are the Euler parameters, the distance from the center of mass of the body to the center of attraction, the total energy of the orbital motion of the body, and the square of the modulus of the vector of the moment of the orbital velocity of the body (or projection of this vector). There were used a new independent variable associated with time by a differential relation containing the square of the distance from the center of mass of the body to the center of attraction. In the case of the orbital motion of the body in the Earth's gravitational field, in the description of which only its central and zonal harmonics are taken into account, the first integrals of the obtained equations of orbital motion are found. Substitutions of variables and transformations of these equations are proposed, which made it possible to obtain closed systems of differential equations of lower dimension for studying body motion, in particular, a system of third-order equations for distance, sine of geocentric latitude and the square of the absolute value of the vector of the moment of orbital velocity.

Keywords: rigid body, of perturbed orbital motion, regularization, gravitational field of the Earth, Euler's parameters, quaternion, first integrals

REFERENCES

1. *Abalakin V.K., Aksenov E.P., Grebenikov E.A., Demin V.G., Ryabov Yu.A.* Handbook on Celestial Mechanics and Astrodynamics (Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoi mekhanike i astrodinamike). Moscow: Nauka, 1976. 864 p.
2. *Duboshin G.N.* Celestial Mechanics: Methods for Theory of Artificial Celestial Bodies (Nebesnaya mekhanika: Metody teorii dvizheniya iskusstvennykh nebesnykh tel). Moscow: Nauka, 1983. 352 p. (in Russian)
3. *Demin V.G.* Motion of Artificial Satellite in Noncentral Gravitational Field (Dvizhenie iskusstvennogo sputnika v netsentral'nom pole tyagoteniya). Moscow, Izhevsk: Regulyarnaya i Haoticheskaya Dinamika, Institut Komp'uternykh Issledovanii, 2010. (in Russian)
4. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971.
5. *Chelnokov Yu.N.* On regularization of the equations of the three-dimensional two body problem // Mech. Solids, 1981, vol. 16, no. 6, pp. 1–10.
6. *Chelnokov Yu.N.* Regular equations of the three-dimensional two body problem // Mech. Solids, 1984, vol. 19, no. 1, pp. 1–7.
7. *Chelnokov Yu.N.* Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I //Cosmic Research, 1992, vol. 30, no. 6, pp. 612–621.
8. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. I // Mech. Solids, 1993, vol. 28, no. 1, pp. 16–25.
9. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. II // Mech. Solids, 1993, vol. 28, no. 2, pp. 1–12.
10. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion Models and Methods for Dynamic, Navigation, and Control of Motion (Kvaternionnye modeli i metody dinamiki, navigatsii i upravleniya dvizheniem). Moscow: Fizmatlit, 2011. (in Russian)
11. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. I // Cosmic Res., 2013, vol. 51, no. 5, pp. 350–361.
12. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: I // Mech. Solids, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 613–639.
13. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: II // Mech. Solids, 2018, vol. 53, no. 6.
14. *Vivarelli M.D.* The KS transformation in hypercomplex form // Celestial Mech. Dyn. Astron., 1983, vol. 29, pp. 45–50.
15. *Shagov O.B.* On two types of equations of motion of artificial satellite of the Earth in oscillatory form // Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela, 1990, no. 2, pp. 3–8. (in Russian)
16. *Vrbik J.* Celestial mechanics via quaternions // Can. J. Phys., 1994, vol. 72, pp. 141–146.
17. *Vrbik J.* Perturbed Kepler problem in quaternionic form // J. Phys., 1995, vol. 28, pp. 193–198.
18. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // Celestial Mech. Dyn. Astron., 2006, vol. 95, pp. 201–212.
19. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // Celestial Mech. Dyn. Astron., 2008, vol. 102, no. 1, pp. 149–162.
20. *Branets V.N., Shmyglevskii I.P.* Quaternions Application for Problems on Rigid Body Orientation. (Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela) Moscow: Nauka, 1973. 320 p. (in Russian)
21. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion and Biquaternion Models and Methods for Mechanics of Solids and their Applications. Geometry and Kinematic of Motion. (Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ikh prilozheniya. Geometriya i kinematika dvizheniya) Moscow: Fizmatlit, 2006. 511 p. (in Russian)