УДК 532.5+519.6

О ВЛИЯНИИ ВИХРЕВОГО СЛОЯ И ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ГРАНИЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ДВУМЕРНЫХ ВИХРЕВЫХ МЕТОДАХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

© 2019 г. К. С. Кузьмина^{1,2,*}, И. К. Марчевский^{1,2,**}

¹ Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия ² Институт системного программирования имени В.П. Иванникова РАН, Москва, Россия *e-mail: kuz-ksen-serg@yandex.ru

**e-mail: iliamarchevsky@mail.ru

Поступила в редакцию 04.03.2019 г. После доработки 15.03.2019 г. Принята к публикации 19.03.2019 г.

Рассмотрено граничное интегральное уравнение относительно интенсивности вихревого слоя, возникающее при использовании вихревых методов моделирования двумерных течений. Для его приближенного решения применен метод Галёркина с кусочно-постоянным и кусочно-линейным представлением решения на участках границы профиля. Коэффициенты возникающей системы линейных уравнений выражают влияние вихревого слоя, расположенного на одних участках границы профиля, на другие участки; компоненты вектора правой части выражают влияние точечных вихрей, моделирующих вихревой след в области течения. При аппроксимации границы профиля ломаной, состоящей из прямолинейных участков-панелей, получены точные аналитические выражения для коэффициентов матрицы и правой части системы; при учете криволинейности панелей профиля предложена методика их приближенного вычисления и получены все необходимые расчетные формулы.

Ключевые слова: вихревые методы, граничное интегральное уравнение, вычислительная гидродинамика

DOI: 10.1134/S003282351903010X

Введение. Вихревые методы относятся к классу лагранжевых методов вычислительной гидродинамики. Их история восходит к фундаментальным работам Н.Е. Жуковского и Л. Розенхеда [1, 2]; к настоящему времени разработано множество модификаций вихревых методов, как чисто лагранжевых, так и гибридных — лагранжево-эйлеровых. Обзоры современного на тот момент состояния вихревых методов были даны Сарпкайей [3] и Леонардом [4], однако на сегодняшний день они носят скорее историческую ценность. Представление о современном состоянии вихревых методов можно получить из монографий [5–10], краткого обзора [11], а также многочисленных статей по соответствующей тематике.

Следует отметить, что в большинстве работ по вихревым методам основное внимание уделено проблеме моделирования эволюции завихренности в области течения, а вопросы удовлетворения граничных условий часто затрагиваются весьма поверхностно, за исключением работ И.К. Лифанова и его последователей, в основном относящихся к задачам моделирования трехмерных течений. В данной работе ограничимся рассмотрением плоских течений и приведем результаты, относящиеся к вопросу удовлетворения на профиле граничного условия прилипания, которое может быть сведено к граничному интегральному уравнению относительно интенсивности вихревого слоя.

1. Сведение задачи к решению граничного интегрального уравнения. Среда считается однородной, вязкой и несжимаемой. Без ограничения общности будем рассматривать внешнее обтекание профиля; все приведенные далее результаты без существенных изменений можно перенести на случай обтекания системы профилей и моделирования внутренних течений.

В соответствии с обобщенным разложением Гельмгольца [12, 13] поле скоростей среды в любой точке области течения *S* можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{r})\mathbf{V}(\mathbf{r}) &= \mathbf{V}_{\infty} + \int_{S} \frac{\Omega(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^{2}} dS_{\boldsymbol{\xi}} + \oint_{K} \frac{\gamma(\boldsymbol{\xi}) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^{2}} dI_{\boldsymbol{\xi}} + \\ &+ \oint_{K} \frac{(\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{V}(\boldsymbol{\xi})) \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^{2}} dI_{\boldsymbol{\xi}} + \oint_{K} \frac{(\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{V}(\boldsymbol{\xi}))(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^{2}} dI_{\boldsymbol{\xi}} \end{aligned}$$
(1.1)

Здесь $\alpha(\mathbf{r})$ — коэффициент, равный единице для точек, находящихся внутри области течения *S*, нулю для точек, находящихся внутри контура профиля *K*, и внешнему углу, отнесенному к 2π , для точек контура *K*. Величина $\Omega(\mathbf{r}) = \Omega(\mathbf{r})\mathbf{k}$ означает распределение завихренности в области течения, $\gamma(\mathbf{r}) = \gamma(\mathbf{r})\mathbf{k}$ — искомую интенсивность вихревого слоя на профиле, \mathbf{k} — орт нормали к плоскости течения, $\mathbf{n}(\boldsymbol{\xi})$ — орт нормали к границе профиля, направленный в сторону среды, $\mathbf{V}(\boldsymbol{\xi})$ в контурных интегралах в правой части равенства (1.1) — скорость течения на границе. Эта скорость в силу выполнения условия прилипания равна скорости движения границы профиля $\mathbf{V}_{K}(\mathbf{r})$, что позволяет трактовать два последних слагаемых как влияние присоединенного вихревого слоя и слоя источников соответственно с интенсивностями

$$\gamma^{\text{att}}(\xi) = \mathbf{n}(\xi) \times \mathbf{V}_K(\xi), \quad q^{\text{att}}(\xi) = \mathbf{n}(\xi) \cdot \mathbf{V}_K(\xi), \quad \xi \in K$$

Далее примем, что скорости движения точек границы профиля $V_K(\mathbf{r})$ известны. Рассматривая уравнение (1.1) на границе профиля *K* и переходя к предельным значениям контурных интегралов, которые в этом случае становятся сингулярными, получаем граничное интегральное уравнение (ГИУ)

$$\oint_{K} \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \mathbf{\xi})}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{\xi}|^{2}} \gamma(\mathbf{\xi}) dl_{\xi} - \alpha(\mathbf{r})(\mathbf{k} \times \mathbf{n}(\mathbf{r})) \gamma(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \alpha(\mathbf{r}) \mathbf{V}_{K}(\mathbf{r}) - \mathbf{V}_{\infty} - \int_{S} \frac{\mathbf{\Omega}(\mathbf{\xi}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{\xi})}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{\xi}|^{2}} dS_{\xi} - \oint_{K} \frac{\gamma^{\text{att}}(\mathbf{\xi}) \times (\mathbf{r} - \mathbf{\xi})}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{\xi}|^{2}} dl_{\xi} - \oint_{K} \frac{q^{\text{att}}(\mathbf{\xi})(\mathbf{r} - \mathbf{\xi})}{2\pi |\mathbf{r} - \mathbf{\xi}|^{2}} dl_{\xi} \qquad (1.2)$$

ГИУ (1.2) — векторное уравнение относительно скалярной неизвестной величины $\gamma(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in K$; показано [12], что для его решения достаточно рассмотреть любое из двух скалярных ГИУ, получаемых из ГИУ (1.2) путем проецирования на направление нормали к границе профиля:

$$\oint_{K} Q_{n}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) dl_{\boldsymbol{\xi}} = f_{n}(\mathbf{r})$$
(1.3)

или на направление касательной к границе профиля:

$$\oint_{K} Q_{\tau}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) dl_{\boldsymbol{\xi}} - \alpha(\mathbf{r}) \gamma(\mathbf{r}) = f_{\tau}(\mathbf{r})$$
(1.4)

Здесь и далее

$$Q_n(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2}, \quad Q_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2}$$
$$f_n(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}), \quad f_{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})$$

— ядра и правые части соответствующих уравнений, $\tau(\mathbf{r})$ — орт касательной к границе профиля в соответствующей точке, направление которого выбирается таким образом, что $\mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \tau(\mathbf{r}) = \mathbf{k}$.

При рассмотрении внешних течений оба ГИУ (1.3) и (1.4) имеют бесконечное множество решений; для выделения единственного решения, имеющего физический смысл, обычно задается величина интеграла вдоль границы контура K:

$$\oint_{K} \gamma(\xi) dl_{\xi} = \Gamma, \tag{1.5}$$

где величина Г – циркуляция поля скоростей среды вдоль границы профиля.

Следует отметить, что при моделировании внутренних течений свойства ГИУ (1.3) не изменяются, тогда как ГИУ (1.4) в этом случае имеет единственное решение, и необходимости в постановке дополнительного условия в виде равенства (1.5) не возникает, так как его выполнение обеспечивается автоматически.

ГИУ (1.3) является сингулярным, его ядро неинтегрируемо в обычном смысле, а интеграл в нем понимается в смысле главного значения по Коши, в то время как ядро ГИУ (1.4) – функция, ограниченная при $|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}| \rightarrow 0$, если граница обтекаемого профиля – гладкая кривая, и абсолютно интегрируемая, если *K* – кусочно-гладкая кривая. При этом $\alpha(\vec{r}) = 1/2$, $\vec{r} \in K$, за исключением угловых точек профиля.

2. Подход Галеркина. Для приближенного численного решения ГИУ (1.3) или (1.4) совместно с дополнительным условием (1.5) возможно применение процедуры Галеркина, в соответствии с которой искомое решение выражается линейной комбинацией функций, называемых базисными, а неизвестные коэффициенты находятся из условий ортогональности невязки системе проекционных функций. Такая процедура останется корректной также и в случае кусочно-гладких профилей с угловыми точками, поскольку искомая функция $\gamma(\mathbf{r})$, хотя и может стать неограниченной в окрестности угловых точек, останется интегрируемой с квадратом [14].

Отметим, что традиционную расчетную схему известного метода дискретных вихрей [14] можно получить как результат применения описанной процедуры к ГИУ (1.3), выбрав в качестве базисных и проекционных семейства дельта-функций Дирака. Здесь будем рассматривать ГИУ (1.4), поскольку расчетные схемы вихревых методов на его основе обеспечивают бо́льшую точность [15], однако изложенные подходы могут быть применены и к численному решению ГИУ (1.3).

Границу профиля *К* заменим совокупностью *N* участков-панелей K_i , i = 1,...,N. Введем набор базисных функций $\phi_i^q(\mathbf{r})$ (i = 1,...,N, q = 0,...,m) и примем, что функция $\phi_i^q(\mathbf{r})$ отлична от нуля только на *i*-й панели. Приближенное решение ГИУ будем искать в виде линейной комбинации базисных функций

$$\gamma(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{q=0}^{m} \gamma_i^q \phi_i^q(\mathbf{r})$$
(2.1)

Неизвестные γ_i^q найдем из условия ортогональности невязки уравнения (1.4) после подстановки в него представления (2.1) набору проекционных функций, которые выберем совпадающими с базисными:

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{q=0}^{m} \gamma_{j}^{q} \int_{K_{i}} \phi_{i}^{p}(\mathbf{r}) dl_{r} \int_{K_{j}} Q_{\tau}(\mathbf{r}, \xi) \phi_{j}^{q}(\xi) dl_{\xi} - \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{m} \gamma_{i}^{q} \int_{K_{i}} \phi_{i}^{q}(\mathbf{r}) \phi_{i}^{p}(\mathbf{r}) dl_{r} = \int_{K_{i}} f_{\tau}(\mathbf{r}) \phi_{i}^{p}(\mathbf{r}) dl_{r}, \qquad (2.2)$$
$$i = 1, \dots, N, \quad p = 0, \dots, m$$

Завихренность $\Omega(\mathbf{r})$ в области течения в вихревых методах представляется заданной в виде набора точечных вихрей с циркуляциями Γ_w , расположенных в точках $\boldsymbol{\rho}_w$ ($w = 1, ..., N_v$):

$$\Omega(\mathbf{r}) = \sum_{w=1}^{N_v} \Gamma_w \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_w),$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{\rho}_w)$ – двумерная дельта-функция Дирака.

Интенсивности присоединенных слоев вихрей и источников $\gamma^{\text{att}}(\mathbf{r})$ и $q^{\text{att}}(\mathbf{r})$ будем считать представлеными в виде разложения по базисным функциям:

$$\gamma^{\text{att}}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{q=0}^{m} (\gamma^{\text{att}})_{i}^{q} \phi_{i}^{q}(\mathbf{r}), \quad q^{\text{att}}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{q=0}^{m} (q^{\text{att}})_{i}^{q} \phi_{i}^{q}(\mathbf{r})$$

Вводя обозначение **G**(**r**) = $\frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^2}$ для градиента функции Грина — фундаментального решения двумерного уравнения Лапласа, систему ураванений (2.2) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{q=0}^{m} \gamma_{j}^{q} \int_{K_{i}} \phi_{i}^{p}(\mathbf{r}) dl_{r} \int_{K_{j}} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \phi_{j}^{q}(\boldsymbol{\xi}) dl_{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{m} \gamma_{i}^{q} \int_{K_{i}} \phi_{i}^{q}(\mathbf{r}) \phi_{i}^{p}(\mathbf{r}) ds =$$

$$= \int_{K_{i}} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) \cdot \left(\frac{\mathbf{V}_{K}(\mathbf{r})}{2} - \mathbf{V}_{\infty}\right) \phi_{i}^{p}(\mathbf{r}) dl_{r} - \sum_{w=1}^{N_{v}} \Gamma_{w} \int_{K_{i}} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_{w}) \phi_{i}^{p}(\mathbf{r}) dl_{r} -$$

$$- \sum_{j=1}^{N} \sum_{q=0}^{m} (\gamma^{\text{att}})_{j}^{q} \int_{K_{i}} \phi_{i}^{p}(\mathbf{r}) dl_{r} \int_{K_{j}} \mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \phi_{j}^{q}(\boldsymbol{\xi}) dl_{\boldsymbol{\xi}} -$$

$$- \sum_{j=1}^{N} \sum_{q=0}^{m} (q^{\text{att}})_{j}^{q} \int_{K_{i}} \phi_{i}^{p}(\mathbf{r}) dl_{r} \int_{K_{j}} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \phi_{j}^{q}(\boldsymbol{\xi}) dl_{\boldsymbol{\xi}} -$$

$$- \sum_{j=1}^{N} \sum_{q=0}^{m} (q^{\text{att}})_{j}^{q} \int_{K_{i}} \phi_{i}^{p}(\mathbf{r}) dl_{r} \int_{K_{j}} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \phi_{j}^{q}(\boldsymbol{\xi}) dl_{\boldsymbol{\xi}}$$

$$i = 1, \dots, N, \quad p = 0, \dots, m$$

$$(2.3)$$

Дополнительное условие для выделения единственного решения (1.5) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{p=0}^{m} \gamma_{i}^{p} \int_{K_{i}} \phi_{i}^{p}(\mathbf{r}) dl_{r} = \Gamma$$
(2.4)

В качестве базисных и проекционных далее будем рассматривать систему финитных полиномиальных функций, считая, что функция $\phi_i^p(\mathbf{r})$ отлична от нуля только на панели K_i и задана на ней полиномом степени *p*.

Система линейных алгебраических уравнений (2.3), (2.4) переопределенная, для ее регуляризации можно применить подход, аналогичный описанному И.К. Лифановым [14], состоящий во введении дополнительной регуляризирующей переменной.

Считая, что m = 1, т.е. рассматривая кусочно-постоянные и кусочно-линейные базисные функции $\phi_i^0(\mathbf{r})$ и $\phi_i^1(\mathbf{r})$, результирующую систему можно записать в блочной форме:

$$\begin{pmatrix} A^{00} + D^{00} & A^{01} + D^{01} & I_N \\ A^{10} + D^{10} & A^{11} + D^{11} & O_N \\ L^0 & L^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ \Gamma \end{pmatrix},$$
(2.5)

где A^{pq} – квадратные матрицы размером $N \times N$, D^{pq} – диагональные матрицы размером $N \times N$ (p, q = 0, 1), L^0 и $L^1 - N$ -мерные вектор-строки; I_N – столбец из единиц; O_N – столбец из нулей, γ^0 и $\gamma^1 - N$ -мерные векторы, составленные из искомых коэф-фициентов, b^0 и $b^1 - N$ -мерные векторы, образующие правую часть системы:

$$A_{ij}^{pq} = \int_{K_i} \left(\int_{K_j} (\mathbf{G}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})) \varphi_j^q(\boldsymbol{\xi}) dl_{\boldsymbol{\xi}} \right) \varphi_i^p(\mathbf{r}) dl_r$$
$$D_{ii}^{pq} = -\frac{1}{2} \int_{K_i} \varphi_i^p(\mathbf{r}) \varphi_i^q(\mathbf{r}) dl_r, \quad L_i^p = \int_{K_i} \varphi_i^p(\mathbf{r}) dl_r$$
$$b_i^p = (b_V)_i^p - \sum_{w=1}^{N_v} \Gamma_w(z_w)_i^p - \sum_{j=1}^{N} \sum_{q=0}^m A_{ij}^{pq} (\gamma^{\text{att}})_j^q - \sum_{j=1}^N \sum_{q=0}^m S_{ij}^{pq} (q^{\text{att}})_j^q$$
$$p, q = 0, 1, \quad i, j = 1, \dots, N$$

В выражении для компонент вектора правой части введены следующие обозначения для коэффициентов:

$$(b_{V})_{i}^{p} = \int_{K_{i}} \left(\frac{\mathbf{V}_{K}(\mathbf{r})}{2} - \mathbf{V}_{\infty} \right) \cdot \mathbf{\tau}(\mathbf{r}) \varphi_{i}^{p}(\mathbf{r}) dl_{r}, \quad (z_{w})_{i}^{p} = \int_{K_{i}} (\mathbf{G}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_{w}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})) \varphi_{i}^{p}(\mathbf{r}) dl_{r}$$

$$S_{ij}^{pq} = \int_{K_{i}} \left(\int_{K_{j}} (\mathbf{G}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{\tau}(\mathbf{r})) \varphi_{j}^{q}(\boldsymbol{\xi}) dl_{\boldsymbol{\xi}} \right) \varphi_{i}^{p}(\mathbf{r}) dl_{r}, \quad p, q = 0, 1, \quad i, j = 1, \dots, N$$
(2.6)

Отметим, что по аналогии с системой (2.5) можно получить систему, соответствующую расчетной схеме с кусочно-постоянными базисными функциями $\phi_i^0(\mathbf{r})$ [16].

Вычисление интегралов, входящих в выражения для коэффициентов системы (2.5), является нетривиальной задачей. Далее рассмотрим случай аппроксимации профиля прямолинейными панелями, а также общий случай криволинейной границы профиля.

3. Случай прямолинейных панелей. Наиболее простым подходом, позволяющим точно вычислить интегралы, входящие в коэффициенты системы (2.5), представляется замена исходной границы профиля прямолинейными панелями *K_i*. Базисные функции имеют вид

$$\phi_i^0(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in K_i \\ 0, & \mathbf{r} \notin K_i \end{cases} \quad \phi_i^1(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{c}_i) \cdot \mathbf{\tau}_i}{L_i}, & \mathbf{r} \in K_i \\ 0, & \mathbf{r} \notin K_i \end{cases}$$
(3.1)

где \mathbf{c}_i — радиус-вектор центра *i*-й панели, $\mathbf{\tau}_i$ — направляющий вектор (орт касательной), L_i — длина *i*-й панели. Тогда элементы диагональных матриц D^{pq} и векторстрок L^p таковы:

$$D_{ii}^{00} = -\frac{L_i}{2}, \quad D_{ii}^{11} = -\frac{L_i}{24}, \quad D_{ii}^{01} = D_{ii}^{10} = 0, \quad L_i^0 = L_i, \quad L_i^1 = 0, \quad i = 1, \dots, N$$



Рис. 1. Точка r, *j*-я панель и вспомогательные векторы.



Рис. 2. Вспомогательные векторы для *i* -й и *j*-й панелей.

Поскольку орты касательных и внешних нормалей остаются постоянными на панелях, выражения для всех коэффициентов системы (2.5) с учетом свойства $G(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) = -G(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{r})$ сводятся к вычислению шести интегралов:

$$\mathbf{I}_{ji}^{0}(\mathbf{r}) = \int_{K_{j}} \mathbf{G}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) dl_{\boldsymbol{\xi}}, \quad \mathbf{I}_{j}^{1}(\mathbf{r}) = \int_{K_{j}} \mathbf{G}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \phi_{j}^{1}(\boldsymbol{\xi}) dl_{\boldsymbol{\xi}}$$
$$\mathbf{I}_{ij}^{00} = \int_{K_{i}} dl_{r} \int_{K_{j}} \mathbf{G}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) dl_{\boldsymbol{\xi}}, \quad \mathbf{I}_{ij}^{01} = \int_{K_{i}} dl_{r} \int_{K_{j}} \mathbf{G}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \phi_{j}^{1}(\boldsymbol{\xi}) dl_{\boldsymbol{\xi}}$$
$$\mathbf{I}_{ij}^{10} = \int_{K_{i}} dl_{r} \int_{K_{j}} \mathbf{G}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \phi_{i}^{1}(\mathbf{r}) dl_{\boldsymbol{\xi}}, \quad \mathbf{I}_{ij}^{11} = \int_{K_{i}} dl_{r} \int_{K_{j}} \mathbf{G}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \phi_{i}^{1}(\mathbf{r}) \phi_{j}^{1}(\boldsymbol{\xi}) dl_{\boldsymbol{\xi}}$$

Вычисление интегралов $\mathbf{I}_{j}^{0}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{I}_{j}^{1}(\mathbf{r})$. На рис. 1 изображены *j*-я панель и точка **r**, а также введены вспомогательные векторы: вектор **d**_j совпадает с *j*-й панелью; векторы **s** и **p** соединяют начало и конец*j*-й панели с точкой **r** соответственно.

С помощью данных векторов можно записать

$$\mathbf{I}_{j}^{0}(\mathbf{r}) = \alpha \mathbf{u}_{0} \times \mathbf{k} + \lambda \mathbf{u}_{0}, \quad \mathbf{I}_{j}^{1}(\mathbf{r}) = \alpha \mathbf{u}_{1} \times \mathbf{k} + \lambda \mathbf{u}_{1} - \frac{1}{2\pi} \boldsymbol{\tau}_{j}$$

Здесь введены обозначения

$$\mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau}_j) = \boldsymbol{\tau}_j, \quad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{2|\mathbf{d}_j|} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{p} + \mathbf{s}, \boldsymbol{\tau}_j, \boldsymbol{\tau}_j), \quad \boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2\pi} \angle (\mathbf{p}, \mathbf{s}), \quad \boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{s}|}{|\mathbf{p}|}$$

где

$$\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, \quad \angle(\mathbf{p}, \mathbf{s}) = \operatorname{Arg}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{s} + i(\mathbf{psk})),$$

функция Arg(z) означает главное значение аргумента комплексного числа z.

Вычисление интегралов \mathbf{I}_{ij}^{00} , \mathbf{I}_{ij}^{01} , \mathbf{I}_{ij}^{10} и \mathbf{I}_{ij}^{11} . На рис. 2 изображены *i*-я и *j*-я панели и вспомогательные векторы, введенные по аналогии со сказанным выше: векторы \mathbf{d}_i и \mathbf{d}_j совпадают с *i*-й и *j*-й панелями, векторы \mathbf{s}_1 и \mathbf{s}_2 соединяют начало *j*-й панели с концом и началом *i*-й панели соответственно; векторы \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 соединяют конец *j*-й панели с концом и началом *i*-й панели соответственно.

Введенные векторы позволяют записать следующие формулы:

$$\mathbf{I}_{ij}^{00} = (\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3) \times \mathbf{k} + (\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3)$$
$$\mathbf{I}_{ij}^{01} = ((\alpha_1 + \alpha_3) \mathbf{v}_4 + (\alpha_2 + \alpha_3) \mathbf{v}_5) \times \mathbf{k} + ((\lambda_1 + \lambda_3) \mathbf{v}_4 + (\lambda_2 + \lambda_3) \mathbf{v}_5) - \frac{1}{4\pi} |\mathbf{d}_i| \mathbf{\tau}_j$$
$$\mathbf{I}_{ij}^{10} = ((\alpha_1 + \alpha_3) \mathbf{v}_6 + \alpha_3 \mathbf{v}_7) \times \mathbf{k} + ((\lambda_1 + \lambda_3) \mathbf{v}_6 + \lambda_3 \mathbf{v}_7) + \frac{1}{4\pi} |\mathbf{d}_j| \mathbf{\tau}_i$$
$$\overset{11}{ii} = ((\alpha_1 + \alpha_3) \mathbf{v}_8 + (\alpha_2 + \alpha_3) \mathbf{v}_9 + \alpha_3 \mathbf{v}_{10}) \times \mathbf{k} + ((\lambda_1 + \lambda_3) \mathbf{v}_8 + (\lambda_2 + \lambda_3) \mathbf{v}_9 + \lambda_3 \mathbf{v}_{10})$$

$$\mathbf{I}_{ij}^{I,i} = ((\alpha_1 + \alpha_3)\mathbf{v}_8 + (\alpha_2 + \alpha_3)\mathbf{v}_9 + \alpha_3\mathbf{v}_{10}) \times \mathbf{k} + ((\lambda_1 + \lambda_3)\mathbf{v}_8 + (\lambda_2 + \lambda_3)\mathbf{v}_9 + \lambda_3\mathbf{v}_{10}) + \frac{1}{24\pi}(|\mathbf{d}_j|\boldsymbol{\tau}_i + |\mathbf{d}_i|\boldsymbol{\tau}_j - 2\boldsymbol{\omega}(\mathbf{s}_1, \boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{\tau}_j))$$

Здесь введены обозначения для коэффициентов

00

$$\alpha_{1} = \frac{1}{2\pi} \angle (\mathbf{s}_{2}, \mathbf{s}_{1}), \quad \alpha_{2} = \frac{1}{2\pi} \angle (\mathbf{s}_{2}, \mathbf{p}_{1}), \quad \alpha_{3} = \frac{1}{2\pi} \angle (\mathbf{p}_{1}, \mathbf{p}_{2})$$
$$\lambda_{1} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{s}_{1}|}{|\mathbf{s}_{2}|}, \quad \lambda_{2} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{p}_{1}|}{|\mathbf{s}_{2}|}, \quad \lambda_{3} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{p}_{2}|}{|\mathbf{p}_{1}|}$$

и вспомогательных векторов

$$\mathbf{v}_{1} = \mathbf{\omega}(\mathbf{s}_{1}, \mathbf{\tau}_{i}, \mathbf{\tau}_{j}), \quad \mathbf{v}_{2} = -\mathbf{\omega}(\mathbf{d}_{i}, \mathbf{\tau}_{i}, \mathbf{\tau}_{j}), \quad \mathbf{v}_{3} = \mathbf{\omega}(\mathbf{p}_{2}, \mathbf{\tau}_{i}, \mathbf{\tau}_{j})$$

$$\mathbf{v}_{4} = \frac{1}{2|\mathbf{d}_{j}|}(((\mathbf{p}_{1} + \mathbf{s}_{1}) \cdot \mathbf{\tau}_{j})\mathbf{\omega}(\mathbf{s}_{1}, \mathbf{\tau}_{i}, \mathbf{\tau}_{j}) - |\mathbf{s}_{1}|^{2}\mathbf{\tau}_{i}), \quad \mathbf{v}_{5} = -\frac{|\mathbf{d}_{i}|}{2|\mathbf{d}_{j}|}\mathbf{\omega}(\mathbf{s}_{1} + \mathbf{p}_{2}, \mathbf{\tau}_{j}, \mathbf{\tau}_{j})$$

$$\mathbf{v}_{6} = -\frac{1}{2|\mathbf{d}_{i}|}(((\mathbf{s}_{1} + \mathbf{s}_{2}) \cdot \mathbf{\tau}_{i})\mathbf{\omega}(\mathbf{s}_{1}, \mathbf{\tau}_{i}, \mathbf{\tau}_{j}) - |\mathbf{s}_{1}|^{2}\mathbf{\tau}_{j}), \quad \mathbf{v}_{7} = \frac{|\mathbf{d}_{j}|}{2|\mathbf{d}_{i}|}\mathbf{\omega}(\mathbf{s}_{1} + \mathbf{p}_{2}, \mathbf{\tau}_{i}, \mathbf{\tau}_{i})$$

$$\mathbf{v}_{8} = \frac{1}{12|\mathbf{d}_{i}||\mathbf{d}_{j}|}(2(\mathbf{s}_{1} \cdot \mathbf{\omega}(\mathbf{s}_{1} - 3\mathbf{p}_{2}, \mathbf{\tau}_{i}, \mathbf{\tau}_{j}))\mathbf{\omega}(\mathbf{s}_{1}, \mathbf{\tau}_{i}, \mathbf{\tau}_{j}) - |\mathbf{s}_{1}|^{2}(\mathbf{s}_{1} - 3\mathbf{p}_{2})) - \frac{1}{4}\mathbf{\omega}(\mathbf{s}_{1}, \mathbf{\tau}_{i}, \mathbf{\tau}_{j})$$

$$\mathbf{v}_{9} = -\frac{1}{12}\frac{|\mathbf{d}_{i}|}{|\mathbf{d}_{j}|}\mathbf{\omega}(\mathbf{d}_{i}, \mathbf{\tau}_{j}, \mathbf{\tau}_{j}), \quad \mathbf{v}_{10} = -\frac{1}{12}\frac{|\mathbf{d}_{j}|}{|\mathbf{d}_{i}|}\mathbf{\omega}(\mathbf{d}_{j}, \mathbf{\tau}_{i}, \mathbf{\tau}_{i})$$

Для соседних панелей, когда i = j + 1 (т.е. $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{s}_1 \neq \mathbf{0}$), коэффициенты α_3 и λ_3 следует положить равными нулю; в случае, когда j = i + 1 ($\mathbf{s}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{p}_2 \neq \mathbf{0}$), нулю следует приравнять коэффициенты α_1 и λ_1 .

В случае, когда i = j, соответствующие интегралы сингулярные, а их предельные значения выражаются следующим образом (формально можно считать, что все коэффициенты α_k и λ_k равны нулю):

$$\mathbf{I}_{ii}^{00} = \mathbf{I}_{ii}^{11} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{I}_{ii}^{01} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{d}_i, \quad \mathbf{I}_{ii}^{10} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{d}_i$$

4. Случай криволинейной границы профиля. Если исходная гладкая граница профиля аппроксимирована криволинейными панелями таким образом, что она представляет

собой кривую класса C^2 , можно получить приближенные выражения для коэффициентов системы (2.5). Будем считать границу параметризованной естественным параметром *s*, тогда базисные функции $\phi_i^0(\mathbf{r})$ определяются первым равенством (3.1), а базисные функции $\phi_i^1(\mathbf{r})$ имеют вид

$$\phi_i^{1}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{s(\mathbf{r}) - s(\mathbf{c}_i)}{L_i}, & \mathbf{r} \in K_i; \\ 0, & \mathbf{r} \notin K_i \end{cases}$$

Выражения для элементов диагональных матриц D^{pq} и векторов-строк L^{p} остаются такими же, как для случая прямолинейных панелей, однако процедура вычисления остальных элементов усложняется, поскольку векторы касательных и нормалей к панелям теперь изменяются вдоль них.

Для удобства введем понятие "кривизны со знаком" плоской кривой, которую определим как

$$\varkappa(s) = (\mathbf{r}'(s) \times \mathbf{r}''(s)) \cdot \mathbf{k},$$

где \mathbf{k} — орт нормали к плоскости контура. Тогда положительные значения \varkappa соответствуют выпуклым участкам контура, и для ортов касательной и внешней нормали справедливы соотношения, следующие из формул Френе:

$$\frac{d\mathbf{\tau}(s)}{ds} = -\varkappa(s)\mathbf{n}(s), \quad \frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = \varkappa(s)\mathbf{\tau}(s)$$

Пусть начала и концы панелей соответствуют значениям s_i (i = 0, ..., N) параметра s, тогда i-я панель соответствует значениям параметра $s \in [s_{i-1}, s_i]$, и выражение для элементов матрицы A_{ii}^{pq} примет вид

$$A_{ij}^{pq} = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left(\int_{s_{j-1}}^{s_j} (\mathbf{G}(s-\sigma) \cdot \mathbf{n}(s)) \varphi_j^q(\sigma) d\sigma \right) \varphi_i^p(s) ds$$

Будем считать, что длина *i*-й панели $L_i = s_i - s_{i-1}$ мала, тогда получим приближенные формулы для A_{ij}^{pq} путем интегрирования предварительно разложенных по формуле Тейлора по параметрам *s* и σ подынтегральных выражений. Ограничимся учетом только тех слагаемых, которые пропорциональны $(L_i)^k$, где $k \leq 3$. Для диагональных элементов A_{ij}^{pq} в результате получаем

$$A_{ii}^{00} = \frac{L_i^2}{4\pi} \varkappa_i, \quad A_{ii}^{01} = \frac{L_i^3}{144\pi} \varkappa_i', \quad A_{ii}^{10} = \frac{L_i^3}{72\pi} \varkappa_i', \quad A_{ii}^{11} = 0,$$

где κ_i — кривизна со знаком границы профиля в центре *i*-й панели, штрих означает производную по длине дуги.

Теперь рассмотрим внедиагональные коэффициенты, вычисление которых требует интегрирования по разным панелям $(i \neq j)$. Введем вспомогательные обозначения: $\mathbf{h}_{ij} = \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j$ – вектор, соединяющий центры соответствующих панелей; $\mathbf{\tau}_i$, $\mathbf{\tau}_j$, \mathbf{n}_i , \mathbf{n}_j – единичные векторы касательных и внешних нормалей в центрах *i*-й и *j*-й панелей соответственно. Тогда для элементов матриц A_{ij}^{00} , A_{ij}^{01} и A_{ij}^{10} можно получить следующие приближенные формулы:



Рис. 3. Две криволинейные панели и вспомогательные углы.

$$A_{ij}^{00} \approx \frac{L_i L_j}{2\pi |\mathbf{h}_{ij}|^2} (\mathbf{h}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i), \quad A_{ij}^{01} \approx \frac{L_i L_j^2}{24\pi |\mathbf{h}_{ij}|^2} \left((\mathbf{\tau}_i \cdot \mathbf{n}_j) + 2 \frac{(\mathbf{h}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i)(\mathbf{h}_{ij} \cdot \mathbf{\tau}_j)}{|\mathbf{h}_{ij}|^2} \right),$$

$$A_{ij}^{10} \approx \frac{L_i^2 L_j}{24\pi |\mathbf{h}_{ij}|^2} (\mathbf{h}_{ij} \cdot \mathbf{\tau}_i) \left(\varkappa_i - 2 \frac{(\mathbf{h}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i)}{|\mathbf{h}_{ij}|^2} \right)$$
(4.1)

Коэффициентами A_{ii}^{11} можно пренебречь и принять их равными нулю.

Если ввести обозначения δ_i и δ_j для углов между векторами $\mathbf{\tau}_i$, $\mathbf{\tau}_j$ и вектором \mathbf{h}_{ij} соответственно, измеряемых с учетом знака таким образом, что положительный угол соответствует повороту \mathbf{h}_{ij} к $\mathbf{\tau}$ против часовой стрелки (рис. 3), то формулы (4.1) можно записать в более компактной форме:

$$A_{ij}^{00} \approx \frac{L_i L_j}{2\pi h_{ij}} \sin \delta_i, \quad A_{ij}^{01} \approx \frac{L_i L_j^2}{24\pi h_{ij}^2} \sin(\delta_i + \delta_j), \quad A_{ij}^{10} \approx \frac{L_i^2 L_j}{24\pi h_{ij}^2} (h_{ij} \varkappa_i \cos \delta_i - \sin 2\delta_i)$$

При вычислении коэффициентов, которые требуют интегрирования по соседним панелям (|i - j| = 1), применение формул (4.1) может приводить к погрешности, поскольку разложение подынтегрального выражения производится в центрах панелей, и следовательно, величина $|\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(\sigma)|$ после разложения по *s* и σ будет иметь большу́ю относительную погрешность при приближении к общей точке смежных панелей. Поэтому для вычисления таких коэффициентов целесообразно раскладывать подынтегральное выражение по обеим переменным в окрестности их общей точки, и в результате для соседних панелей можно получить следующие приближенные формулы, которые проще и точнее по сравнению с формулами (4.1):

$$A_{ij}^{00} = \frac{L_i L_j}{4\pi} \left(\varkappa_{ij}' \pm \frac{L_j - 2L_i}{6} \varkappa_{ij}' \right), \quad A_{ij}^{01} = \frac{L_i L_j^2}{144\pi} \varkappa_{ij}', \quad A_{ij}^{10} = \frac{L_i^2 L_j}{72\pi} \varkappa_{ij}'$$
(4.2)

Здесь \varkappa_{ij} — кривизна со знаком границы профиля в общей точке соседних панелей, штрих означает производную по длине дуги, знак плюс в формуле для A_{ij}^{00} используется, когда j = i + 1, а знак минус — когда j = i - 1.

Для интегралов (2.6), входящих в выражение для коэффициентов правой части, также могут быть получены приближенные формулы. Для коэффициентов $(b_V)_i^p$ при

помощи изложенной выше методики разложения по формуле Тейлора в центре панели получаем следующие приближенные формулы:

$$(b_V)_i^0 = \frac{L_i}{2} ((\mathbf{V}_{K,i} - 2\mathbf{V}_{\infty}) \cdot \mathbf{\tau}_i) + \frac{L_i^3}{48} ((\mathbf{V}_{K,i} - 2\mathbf{V}_{\infty}) \cdot \mathbf{\tau}_i)''$$
$$(b_V)_i^1 = \frac{L_i^2}{24} ((\mathbf{V}_{K,i} - 2\mathbf{V}_{\infty}) \cdot \mathbf{\tau}_i)' = \frac{L_i^2}{24} ((\mathbf{V}_{K,i}' \cdot \mathbf{\tau}_i) - \varkappa_i ((\mathbf{V}_{K,i} - 2\mathbf{V}_{\infty}) \cdot \mathbf{n}_i))'$$

Здесь $V_{K,i}$ – скорость границы профиля в центре *i*-й панели, τ_i и \mathbf{n}_i – единичные векторы касательной и внешней нормали в центре *i*-й панели соответственно, штрих означает производную по длине дуги.

Теперь запишем приближенные формулы для элементов S_{ij}^{pq} , отвечающих за учет влияния присоединенного слоя источников. Техника их получения остается принципиально той же, что и для элементов A_{ij}^{pq} , однако преобразования становятся более трудоемкими, поскольку подынтегральная функция при $|i - j| \le 1$ имеет неинтегрируемую особенность и следует вычислять главные значения интегралов в смысле Коши.

Для диагональных элементов *S*^{*pq*}_{*ii*} справедливы формулы

$$S_{ii}^{00} = S_{ii}^{11} = 0, \quad S_{ii}^{01} = -S_{ii}^{10} = -\frac{1}{4\pi}L_i + \frac{\kappa_i^2}{288\pi}L_i^3$$

Для элементов, вычисление которых требует интегрирования вдоль разных панелей, как и ранее, используем обозначение $\mathbf{h}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ для вектора, соединяющего центры *i*-й и *j*-й панелей, тогда при |i - j| > 1 можно получить следующие приближенные формулы:

$$S_{ij}^{00} \approx \frac{L_{i}L_{j}}{2\pi |\mathbf{h}_{ij}|^{2}} (\mathbf{h}_{ij} \cdot \mathbf{\tau}_{i}), \quad S_{ij}^{01} \approx \frac{L_{i}L_{j}^{2}}{12\pi |\mathbf{h}_{ij}|^{2}} \left(\frac{(\mathbf{h}_{ij} \cdot \mathbf{\tau}_{i})(\mathbf{h}_{ij} \cdot \mathbf{\tau}_{j})}{|\mathbf{h}_{ij}|^{2}} - \frac{(\mathbf{\tau}_{i} \cdot \mathbf{\tau}_{j})}{2} \right)$$

$$S_{ij}^{10} \approx \frac{L_{i}^{2}L_{j}}{12\pi |\mathbf{h}_{ij}|^{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{(\mathbf{h}_{ij} \cdot \mathbf{\tau}_{i})^{2}}{|\mathbf{h}_{ij}|^{2}} - \frac{(\mathbf{h}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{i})}{2} \varkappa_{i} \right), \quad S_{ij}^{11} \approx 0$$
(4.3)

С учетом введенных на рис. 3 обозначений формулы (4.3) можно записать в виде

$$S_{ij}^{00} \approx \frac{L_i L_j}{2\pi h_{ij}} \cos \delta_i, \quad S_{ij}^{01} \approx \frac{L_i L_j^2}{12\pi h_{ij}^2} \cos(\delta_i + \delta_j), \quad S_{ij}^{10} \approx -\frac{L_i^2 L_j}{24\pi h_{ij}^2} (h_{ij} \varkappa_i \sin \delta_i + \cos 2\delta_i)$$

При вычислении элементов, которые требуют интегрирования по соседним панелям (|i - j| = 1), для вычисления главных значений сингулярных интегралов следует применить прием, аналогичный описанному при получении формул (4.2); в результате получаются следующие приближенные формулы:

$$\begin{split} S_{ij}^{00} &= \pm \left(-\frac{L_i}{2\pi} \ln \frac{L_i + L_j}{L_i} - \frac{L_j}{2\pi} \ln \frac{L_i + L_j}{L_j} + \frac{L_i(L_i + L_j)L_j}{48\pi} \varkappa_{ij}^2 \right) \\ S_{ij}^{01} &= -\frac{L_i}{4\pi} + \frac{L_i(L_i + L_j)}{4\pi L_j} \ln \frac{L_i + L_j}{L_i} + \frac{L_iL_j^2}{288\pi} \varkappa_{ij}^2 \\ S_{ij}^{10} &= \frac{L_j}{4\pi} - \frac{L_j(L_i + L_j)}{4\pi L_i} \ln \frac{L_i + L_j}{L_j} - \frac{L_i^2 L_j}{288\pi} \varkappa_{ij}^2 \\ S_{ij}^{11} &= \pm \left(\frac{L_i + L_j}{24\pi} - \frac{L_i^2}{24\pi L_j} \ln \frac{L_i + L_j}{L_i} - \frac{L_j^2}{24\pi L_i} \ln \frac{L_i + L_j}{L_j} \right) \end{split}$$



Рис. 4. Положение вихревого элемента, криволинейной границы профиля и ее аппроксимация соприкасающейся окружностью.

Здесь κ_{ij} – кривизна со знаком границы профиля в общей точке соседних панелей; знак плюс в формулах для S_{ij}^{00} и S_{ij}^{11} используется при j = i + 1, а минус – при j = i - 1.

Для учета влияния вихревых элементов, находящихся в области течения, т.е. для вычисления интегралов $(z_w)_i^p$ в формулах (2.6) введем вектор $\mathbf{h}_{iw} = \mathbf{c}_i - \mathbf{\rho}_w$, который соединяет точку расположения *w*-го вихря с центром *i*-й панели.

Необходимо рассмотреть два случая. В случае малой величины отношения $\frac{L_i}{|\mathbf{h}_{iw}|}$, т.е. когда вихревой элемент находится достаточно далеко от панели, применимы приближенные формулы, получаемые по вышеописанной методике:

$$\begin{aligned} (z_w)_i^0 &= \frac{(\mathbf{h}_{iw} \cdot \mathbf{n}_i)}{2\pi |\mathbf{h}_{iw}|^2} L_i + \frac{1}{2\pi} \Biggl[\Biggl(\frac{1}{4} - \frac{(\mathbf{h}_{iw} \cdot \mathbf{n}_i)^2}{3|\mathbf{h}_{iw}|^2} - \frac{\varkappa_i^2 |\mathbf{h}_{iw}|^2}{24} \Biggr] \frac{(\mathbf{h}_{iw} \cdot \mathbf{n}_i)}{|\mathbf{h}_{iw}|} + \\ &+ \Biggl(\frac{\varkappa_i' |\mathbf{h}_{iw}|^2}{24} - \frac{\varkappa_i (\mathbf{h}_{iw} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)}{4} \Biggr] \frac{(\mathbf{h}_{iw} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)}{|\mathbf{h}_{iw}|} + \frac{\varkappa_i |\mathbf{h}_{iw}|}{8} \Biggr] \frac{L_i^3}{|\mathbf{h}_{iw}|^3} \\ &\quad (z_w)_i^1 = \frac{(\mathbf{h}_{iw} \cdot \boldsymbol{\tau}_i)}{12\pi |\mathbf{h}_{iw}|} \Biggl(\frac{\varkappa_i |\mathbf{h}_{iw}|}{2} - \frac{(\mathbf{h}_{iw} \cdot \mathbf{n}_i)}{|\mathbf{h}_{iw}|} \Biggr) \frac{L_i^2}{|\mathbf{h}_{iw}|^2} \end{aligned}$$

Если же вихревой элемент расположен достаточно близко к панели, получить по разработанной методике сравнительно простые и при этом достаточно точные приближенные формулы, позволяющие учитывать криволинейность границы профиля, не удается. В этом случае криволинейная панель может быть заменена на дугу соприкасающейся окружности радиусом $R_i = |\varkappa_i|^{-1}$, которая имеет ту же длину, что и исходная панель. При таком подходе, используя точное решение для случая окружности [17], можно получить следующую формулу, точную для дуги окружности:

$$(z_w)_i^0 \approx \Psi_{iw}^0 \left(\chi_i + \frac{L_i \varkappa_i}{2} \right) - \Psi_{iw}^0 \left(\chi_i - \frac{L_i \varkappa_i}{2} \right),$$

где

$$\Psi_{iw}^{0}(\beta) = \frac{1}{4\pi} \left(\beta - \theta_{iw} + 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha_{iw}}{2 + \alpha_{iw}} \operatorname{ctg}\frac{\beta - \theta_{iw}}{2}\right) - 2\pi \operatorname{sign}\alpha_{iw}\eta(\beta - \theta_{iw}) \right)$$

обозначает непрерывную ветвь первообразной (по длине дуги) для соответствующей подынтегральной функции, χ_i – аргумент вектора ($\mathbf{c}_i - \mathbf{q}_i$), т.е. угол между этим вектором и горизонтальной прямой (рис. 4), измеряемый в диапазоне ($-\pi, \pi$], $\mathbf{q}_i = \mathbf{c}_i - \frac{\mathbf{n}_i}{\varkappa_i}$ – радиус-вектор центра соприкасающейся окружности, L_i и \varkappa_i – как и ранее, длина *i*-й

панели и кривизна со знаком в ее центре, θ_{iw} – аргумент вектора ($\rho_w - q_i$), величина которого может быть поправлена на $\pm 2\pi$ для обеспечения выполнения условия

$$-\pi < \beta - heta_{iw} \le \pi$$
 для $\chi_i - rac{L_i |ec{ec{\kappa}_i}|}{2} \le eta \le \chi_i + rac{L_i |ec{\kappa}_i|}{2}$

α_{*iw*} – безразмерный параметр, показывающий, насколько близко вихревой элемент расположен к дуге окружности:

$$\alpha_{iw} = |\kappa_i| \cdot |\boldsymbol{\rho}_w - \boldsymbol{q}_i| - 1 = \frac{|\boldsymbol{\rho}_w - \boldsymbol{q}_i|}{R_i} - 1; \quad \eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0\\ 0 & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$$

Описанный прием, однако, не позволяет вычислить коэффициент $(z_w)_i^l$, точнее, выполнить аналитическое интегрирование соответствующей функции вдоль дуги соприкасающейся окружности возможно, но результат не выражается в элементарных функциях, а дается с помощью специальной функции полилогарифма [18], что не позволяет производить практические расчеты. В этом случае можно принять еще одно упрощающее предположение и, считая ранее введенный параметр α_{iw} малым, разложить полилогарифмы по формуле Тейлора по степеням α_{iw} с учетом того, что производные могут быть выражены элементарными функциями. В результате получим приближенную формулу

$$(z_w)_i^1 \approx \Psi_{iw}^1 \left(\chi_i + \frac{L_i \varkappa_i}{2} \right) - \Psi_{iw}^1 \left(\chi_i - \frac{L_i \varkappa_i}{2} \right),$$

где $\Psi^1_{iw}(\beta)$ – непрерывная ветвь первообразной; все обозначения соответствуют описанным выше:

$$\Psi_{iw}^{1}(\beta) = \frac{1}{4\pi L_{i} |\varkappa_{i}|} \left(\frac{(\beta - \theta_{iw})^{2}}{2} + \left((\beta - \theta_{iw}) - 2\pi\eta(\alpha_{iw}) - 2\frac{\beta - \theta_{iw}}{\alpha_{iw}} - \frac{\alpha_{iw}^{2}(\beta - \theta_{iw})}{\alpha_{iw}^{2} + (\beta - \theta_{iw})^{2}} \right) (\theta_{iw} - \chi_{i}) + \alpha_{iw}(2 - \alpha_{iw}) - \left(\alpha_{iw} - \frac{\alpha_{iw}^{2}}{2} + \frac{\alpha_{iw}^{3}}{3} \right) \ln(\alpha_{iw}^{2} + (\beta - \theta_{iw})^{2}) - \frac{\alpha_{iw}^{4}}{18} \frac{5\alpha_{iw} - 18}{\alpha_{iw}^{2} + (\beta - \theta_{iw})^{2}} \right)$$

Заключение. Рассмотрено граничное интегральное уравнение относительно интенсивности свободного вихревого слоя, возникающее в вихревых методах моделирования двумерных течений. Для приближенного решения данного уравнения использован метод Галёркина с кусочно-постоянными и кусочно-линейными базисными функциями. Коэффициенты полученной линейной системы выражены интегралами, соответствующими влиянию вихревого слоя и слоя источников, расположенных на одних участках границы профиля, на другие участки, а также влиянию точечных вихрей, моделирующих вихревой след в области течения. При аппроксимации границы профиля ломаной, состоящей из прямолинейных участков-панелей, данные интегралы вычислены точно; в случае учета криволинейности панелей разработана методика их приближенного вычисления и получены все необходимые расчетные формулы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-79-20445).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Жуковский Н.Е.* О присоединенных вихрях // Тр. Отдел. физ. наук об-ва любителей естествознания. 1906. Т. 13. № 2. 14 с.
- 2. *Rosenhead L., Jeffreys H.* The formation of vortices from a surface of discontinuity // Proc. Roy. Soc. A. 1931. V. 134. № 823. P. 170–192.
- 3. *Sarpkaya T*. Computational methods with vortices the 1988 Freeman scholar Lecture // J. Fluids Eng. 1989. V. 111. P. 5–52.
- 4. Leonard A. Vortex methods for flow simulation // J. Comput. Phys. 1980. V. 37. № 3. P. 289–335.
- 5. Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D. Vortex Methods: Theory and Practice. Cambridge: Univ. Press, 2000. 328 p.
- 6. *Lewis R.I.* Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems. Cambridge: Univ. Press, 2005. 592 p.
- 7. *Branlard E*. Wind Turbine Aerodynamics and Vorticity-Based Methods: Fundamentals and Recent Applications. Cham: Springer, 2017. 632 p.
- 8. Головкин М.А., Головкин В.А., Калявкин В.М. Вопросы вихревой гидромеханики. Москва: Физматлит, 2009. 263 с.
- 9. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. Москва: Изд-во МГУ, 2006. 184 с.
- 10. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях. Москва: Янус-К., 2001. 508 с.
- 11. *Yokota R*. Vortex methods for the simulation of turbulent flows: review // J. Fluid Sci. Technol. 2011. V. 6. № 1. P. 14–29.
- Kempka S.N., Glass M.W., Peery J.S., Strickland J.H., Ingber M.S. Accuracy considerations for implementing velocity boundary conditions in vorticity formulations // SANDIA report. SAND96-0583, UC-700. 1996.
- 13. Wu J.C., Thompson J.F. Numerical solutions of time-dependent incompressible Navier Stokes equations using an integro-differential formulation // Comput. Fluids. 1973. V. 1. № 2. P. 197–215.
- 14. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). Москва: ТОО "Янус", 1995. 520 с.
- 15. Кузьмина К.С., Марчевский И.К., Морева В.С. Определение интенсивности вихревого слоя при моделировании вихревыми методами обтекания профиля потоком несжимаемой среды // MM. 2017. Т. 29. № 10. С. 20–34.
- 16. Кузьмина К.С., Марчевский И.К., Морева В.С., Рятина Е.П. Расчетная схема вихревых методов второго порядка точности для моделирования обтекания профилей несжимаемым потоком // Изв. вузов. Авиац. техника. 2017. № 3. С. 73–80.
- Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Ryatina E.P. Exact solutions of boundary integral equation arising in vortex methods for incompressible flow simulation around elliptical and Zhukovsky airfoils // J. Phys. Conf. Ser., in press. 2019.
- 18. Lewin L. Polylogarithms and Associated Functions. New York: North Holland, 1981. 359 p.

On the Calculation of the Vortex Sheet and Point Vortices Influence at Approximate Solution of the Boundary Integral Equation in Two-dimensional Vortex Methods of Computational Hydrodynamics

K. S. Kuzmina^{*a,b,#*} and I. K. Marchevskii^{*a,b,##*}

^a Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
 ^b Ivannikov Institute for System Programming of the RAS, Moscow, Russia
 [#]e-mail: kuz-ksen-serg@yandex.ru
 ^{##}e-mail: iliamarchevsky@mail.ru

When incompressible flow modeling around airfoil using vortex methods of computational hydrodynamics, it is necessary to solve the boundary integral equation with respect to the intensity of the vortex sheet on the airfoil surface line. For its approximate solution, the Galerkin method with a piecewise constant and piecewise linear representation of the solution on the airfoil surfaces line can be applied. The coefficients of the system of linear equations, arising from the procedure of discretization of the integral equation, express the influence of the vortex sheet located on the panels of the airfoil boundary of the profile on other panels; the components of the right-hand side vector express the influence of point vortices that simulate a vortex wake in the flow domain. For the case of the airfoil surface line approximation with a polyline consisting of rectilinear panels, exact analytical expressions are obtained for the coefficients of the matrix and the right-hand side vector; for the case of taking into account the curvature of the panels, an approach for their approximate calculation is proposed and all the necessary formulae are derived.

Keywords: vortex methods, boundary integral equation, computational hydrodynamics

REFERENCES

- 1. *Zhukovsky N.E.* On attached vortices. In: Proc. Phys. Sci. Div. Naturalists Soc., 1906, vol. 13, no. 2, 14 pp. (in Russian)
- 2. *Rosenhead L., Jeffreys H.* The formation of vortices from a surface of discontinuity // Proc. R. Soc. A, 1931, vol. 134, no. 823, pp. 170–192.
- 3. *Sarpkaya T*. Computational methods with vortices the 1988 Freeman scholar Lecture // J. Fluids Eng., 1989, vol. 111, pp. 5–52.
- 4. Leonard A. Vortex methods for flow simulation // J. Comput. Phys., 1980, vol. 37, no. 3, pp. 289–335.
- 5. Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D. Vortex Methods: Theory and Practice. Cambridge: Univ. Press, 2000. 328 p.
- 6. *Lewis R.I.* Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems. Cambridge: Univ. Press, 2005. 592 p.
- 7. *Branlard E*. Wind Turbine Aerodynamics and Vorticity-Based Methods: Fundamentals and Recent Applications. Cham: Springer, 2017. 632 p.
- 8. *Golovkin M.A., Golovkin V.A., Kalyavkin V.M.* Problems of the Vortex Hydromechanics. Moscow: Fizmatlit, 2009. 263 p. (in Russian)
- 9. Andronov P.R., Guvernuk S.V., Dynnikova G.Ya. Vortex Methods for Computation of the Unsteady Hydrodynamic Loads. Moscow: Moscow Univ. Publ., 2006. 184 p. (in Russian)
- 10. *Lifanov I.K., Poltavskii L.N., Vainikko G.M.* Hypersingular Integral Equations and Their Applications. Boca Raton: CRC Press, 2001. 416 p.
- 11. Yokota R. Vortex methods for the simulation of turbulent flows: review // J. Fluid Sci. Technol., 2011, vol. 6, no. 1, pp. 14–29.
- 12. Kempka S.N., Glass M.W., Peery J.S., Strickland J.H., Ingber M.S. Accuracy considerations for implementing velocity boundary conditions in vorticity formulations // SANDIA, 1996, Report SAND96-0583, UC-700.
- 13. Wu J.C., Thompson J.F. Numerical solutions of time-dependent incompressible Navier–Stokes equations using an integro-differential formulation // Comput. Fluids, 1973, vol. 1, no. 2, pp. 197–215.
- 14. Lifanov I.K. (1996) Singular Integral Equations and Discrete Vortices. Utrecht: VSP, 1996. 475 p.
- Kuzmina K.S., Marchevskii I.K., Moreva V.S. Vortex sheet intensity computation in incompressible flow simulation around an airfoil by using vortex methods // Math. Models Comput. Simul., 2018, vol. 10, no. 3, pp. 276–287.
- Kuzmina K.S., Marchevskii I.K., Moreva V.S., Ryatina E.P. Numerical scheme of the second order of accuracy for vortex methods for incompressible flow simulation around airfoils // Russ. Aeronaut., 2017, vol. 60, no. 3, pp. 398–405.
- Kuzmina K.S., Marchevsky I.K., Ryatina E.P. Exact solutions of boundary integral equation arising in vortex methods for incompressible flow simulation around elliptical and Zhukovsky airfoils // J. Phys.: Conf. Series, 2019, in press.
- 18. Lewin L. Polylogarithms and associated functions. New York: North Holland, 1981. 359 p.