

УДК 532.5

**К ДИНАМИКЕ ЦИЛИНДРА В ОГРАНИЧЕННОМ ПОТОКЕ
ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННОЙ ЗАВИХРЕННОСТЬЮ**© 2019 г. А. Г. Петров^{1,*}, М. А. Юдин^{2,3,**}¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*² *Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Москва, Россия*³ *Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия** *e-mail: petrovipmech@gmail.ru*** *e-mail: mikleudin@yandex.com*

Поступила в редакцию 14.07.2016 г.

После доработки 27.11.2018 г.

Принята к публикации 25.12.2018 г.

Исследуется устойчивость подвижного цилиндра в циркуляционном потоке идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью внутри неподвижного внешнего цилиндра. Используются методы лагранжевой механики. Получены функция Лагранжа в виде разложения в ряд по малому смещению цилиндра и условие устойчивости в нелинейном приближении.

Ключевые слова: неустойчивость, течение в ограниченной области, функция Лагранжа

DOI: 10.1134/S0032823519020127

Для цилиндра в неограниченном циркуляционном потоке идеальной несжимаемой жидкости с монотонно убывающей завихренностью была обнаружена сдвиговая неустойчивость [1], отвечающая за появление ветровых волн на воде [2], и неустойчивость различных сложных вихревых течений [3]. Бесконечный цилиндр в циркуляционном потоке идеальной несжимаемой жидкости – простейшая двумерная система, в которой реализуется сдвиговая неустойчивость. Для проведения экспериментальных исследований по выявлению такой неустойчивости необходимо рассмотреть случай ограниченной области течения. Было показано [4], что в этом случае в системе существует еще один тип неустойчивости, который реализуется в течении с постоянной завихренностью (в том числе и при нулевой завихренности) и связан именно с ограниченностью области течения. Был проведен анализ ограниченной задачи в линейном приближении и построен лагранжиан для потенциального течения [4]. Изучение обнаруженной неустойчивости течения в ограниченной области с постоянной завихренностью в нелинейном приближении – основная задача данной работы. Рассматриваемое среднее течение – известное течение Куэтта между вращающимися цилиндрами в вязкой жидкости, анализу, устойчивости которого посвящено большое количество исследований [5]. Исследовалась устойчивость системы из двух незакрепленных цилиндров в невязком потенциальном потоке между ними [6]. При анализе устойчивости твердого тела в идеальной жидкости получен обобщенный критерий устойчивости в линейном приближении [7, 8].

Для решения задачи в нелинейном приближении удобно использовать подход Лагранжа, который обладает рядом преимуществ. Найденная функция Лагранжа си-

стемы позволяет сразу сделать вывод об устойчивости или неустойчивости системы, не прибегая к решению дисперсионного уравнения.

Впервые уравнения Лагранжа для движения твердого тела в потенциальном потоке жидкости с однозначным потенциалом были применены Томсоном и Тэтом [9] и обоснованы Кирхгофом [10]. Для движения торообразных твердых тел в многосвязной области, занятой жидкостью, потенциал скорости может быть неоднозначным. Для этого случая Томсон [11] вывел новый вид функции Лагранжа, в котором по аналогии с методом Рауса исключения циклической координаты, добавлены произведения циркуляций и расходов через перегородки твердых тел. Эта идея далее была развита Жуковским [12] и его последователями [13, 14] для исследования динамики твердого тела с полостями, заполненными жидкостью.

В рассматриваемой задаче жидкость заполняет зазор между двумя круговыми цилиндрами, вставленными один в другой. Если расстояние между осями цилиндров не меняется, а течение потенциально, то для построения функции Лагранжа можно применить подход Томсона [11] и Жуковского [12]. Таким путем можно вычислить силу, действующую на внутренний цилиндр (задача Чизотти [15]). Однако в рассматриваемом здесь случае расстояние между осями цилиндров меняется и, кроме того, необходимо учитывать постоянную завихренность.

Для получения функции Лагранжа используется ее более общий вид, выведенный ранее [16], на основе которого для произвольного движения внутреннего цилиндра предложен алгоритм определения функции Лагранжа в виде разложения в ряд по малому смещению оси внутреннего цилиндра. Из найденной функции Лагранжа получено условие устойчивости и силы, действующей на цилиндр, в точной нелинейной постановке. Проведено сравнение результатов для частного случая циркуляционного обтекания внутреннего неподвижного цилиндра. Найденное выражение для силы совпадает с точным аналитическим выражением, полученным Чизотти [16]. Решение в линейном приближении полностью совпадает с полученным ранее решением [4].

Использование подхода Лагранжа во многих задачах механики жидкости также позволяет выявлять интегральные характеристики течений [17]. Проводимое ниже исследование представляет интерес как в связи с разделением двух неустойчивостей (сдвиговой и возникающей из-за ограниченности области течения) в эксперименте, так и в связи с развитием подхода Лагранжа в механике жидкости. Рассматриваемая неустойчивость имеет невязкую природу. Вязкий механизм неустойчивости системы, исследовался П.Л. Капицей [18] и были даны оценки вязких сил.

1. Постановка задачи. Рассматривается система, состоящая из двух вставленных один в другой цилиндров: внешний цилиндр радиуса R_2 жестко закреплен, внутренний цилиндр радиуса R_1 подвижный. В положении равновесия цилиндры коаксиальны. Область между ними заполнена несжимаемой идеальной жидкостью, поле скорости которой имеет циркуляцию, постоянную завихренность и удовлетворяет условиям непротекания на обоих цилиндрах.

Положение подвижного внутреннего цилиндра удобно описывать с помощью координат центра его поперечного сечения x_0, y_0 (рис. 1), \dot{x}_0 и \dot{y}_0 — компоненты вектора скорости его движения. В рамках плоской задачи требуется получить уравнения динамики внутреннего цилиндра с учетом гидродинамических сил и решить задачу устойчивости коаксиального стационарного течения при смещениях внутреннего цилиндра.

2. Метод решения. Метод решения задачи заключается в построении функции Лагранжа $L(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$, с помощью которой уравнения динамики цилиндра запишутся в лагранжевой форме

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} - \frac{\partial L}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_0} - \frac{\partial L}{\partial y_0} = 0$$

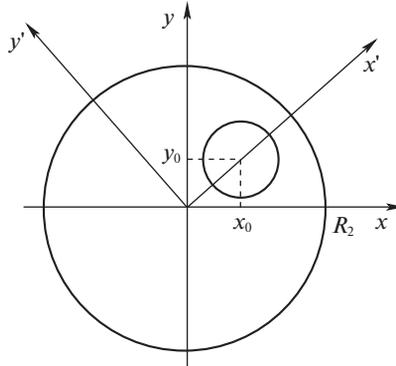


Рис. 1

Если течение потенциально ($\mathbf{v} = \nabla\Phi$) и потенциал Φ – однозначная функция, то функция Лагранжа равна кинетической энергии жидкости [15]: $L = \rho_0 \int_S \frac{\mathbf{v}^2}{2} dx dy$, где ρ_0 – плотность жидкости, а S – область, занятая жидкостью.

Если двусвязная полость внутри твердого тела заполнена жидкостью, течение которой имеет циркуляцию Γ , то потенциал Φ – неоднозначная функция.

В рассматриваемом случае полость ограничена двумя окружностями (рис. 1). При обходе контура сечения внутреннего цилиндра потенциал изменяется на величину Γ , тогда меняется вид функции Лагранжа: к ней добавляется полученное Томсоном [11] слагаемое

$$-\Gamma\chi; \chi = \int_P \rho(\mathbf{v}\mathbf{n} - \mathbf{v}^*\mathbf{n})ds, \quad \mathbf{v}^* = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (2.1)$$

где P – перегородка, искусственно вводимая в многосвязных областях [15], χ – относительный поток жидкости через воображаемую перегородку P , \mathbf{v}^* – скорость точек системы координат, скрепленной с твердым телом (так называемая переносная скорость [19]), а \mathbf{v}_0 и $\boldsymbol{\Omega}$ – поступательная скорость движения и угловая скорость твердого тела, соответственно. Было показано [16], что добавочное слагаемое (2.1) и функцию Лагранжа можно записать в виде

$$\Gamma\chi = \rho_0 \int_S (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*)\mathbf{v} dx dy, \quad L = \rho_0 \int_S \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*)\mathbf{v} \right) dx dy \quad (2.2)$$

Эта формула для функции Лагранжа была распространена [16, 20] на общий случай, в котором течение имеет циркуляцию Γ и постоянную завихренность ω , а граница полости деформируется. При этом в качестве скорости \mathbf{v}^* принимается скорость воображаемой несжимаемой среды. Значение \mathbf{v}^* на границе совпадает со скоростью точек границы, а внутри области S значение \mathbf{v}^* однозначно определяется положением границы. По аналогии с понятием переносной скорости, как распределения скорости точек системы координат, скрепленной с твердым телом, введено понятие скорости воображаемой несжимаемой среды, скрепленной с границей области течения [16]. Формула (2.2) распространяет обобщенную формулу Томсона для функции Лагранжа на случай течений с постоянной завихренностью в произвольной полости с деформируемой границей.

3. Нахождение скорости \mathbf{v}^* . Скорость \mathbf{v}^* может быть найдена с помощью функции $\mathbf{X}(x_0, y_0, \mathbf{X}^*)$ отображения фиксированной области $\mathbf{X}^* \in \tilde{S}$ на область течения $\mathbf{X} \in S$ с

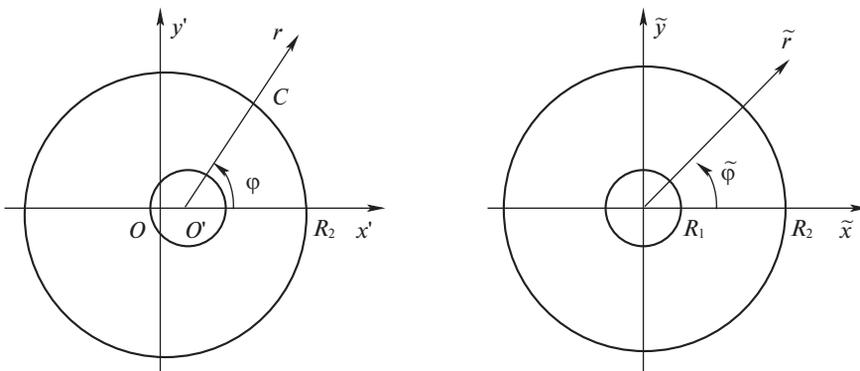


Рис. 2

якобианом преобразования равным единице ($\det \|\partial X / \partial X^*\| = 1$), и находится как производная сложной функции:

$$\mathbf{v}^* = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_0} \dot{x}_0 + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y_0} \dot{y}_0 \quad (3.1)$$

Преобразование $\mathbf{X}(x_0, y_0, \mathbf{X}^*)$, сохраняющее площадь, строится так. В физической области S введем полярные координаты r, φ с центром, совпадающим с центром круга радиуса R_1 (левая часть рис. 2). Воображаемая область \tilde{S} — кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями с теми же радиусами R_1 и R_2 (правая часть рис. 2). Введем полярные координаты $\tilde{r}, \tilde{\varphi}$ с центром, совпадающим с центром концентрических окружностей. Преобразование координат $r, \varphi \rightarrow \tilde{r}, \tilde{\varphi}$, сохраняющее площадь (с единичным якобианом) $r dr d\varphi = \tilde{r} d\tilde{r} d\tilde{\varphi}$, удобно строить в переменных $\rho, \varphi \rightarrow \tilde{\rho}, \tilde{\varphi}$:

$$\rho = r^2 - R_1^2, \quad \tilde{\rho} = \tilde{r}^2 - R_1^2 \quad (3.2)$$

Тогда условие сохранения площади элементарной площадки имеет вид $d\rho d\varphi = d\tilde{\rho} d\tilde{\varphi}$.

Введем производящую функцию отображения $F(\varphi, \tilde{\rho}) = (\varphi + \Phi(\varphi))\tilde{\rho}$. Тогда отображение, сохраняющее площадь, находится из уравнений (см. [21])

$$\rho = \frac{\partial F}{\partial \varphi} = (1 + \Phi'(\varphi))\tilde{\rho}, \quad \tilde{\varphi} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\rho}} = \varphi + \Phi(\varphi) \quad (3.3)$$

Используя уравнение (3.3) и значения ρ и $\tilde{\rho}$ на границе внутреннего цилиндра, получим уравнение для функции $\Phi(\varphi)$

$$r_0^2 \cos 2\varphi + R_2^2 - R_1^2 - 2r_0 \cos \varphi \sqrt{R_2^2 - r_0^2 \sin^2 \varphi} = (1 + \Phi'(\varphi))(R_2^2 - R_1^2)$$

Его решение имеет вид

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left(-R_2^2 \arcsin \frac{r_0 \sin \varphi}{R_2} + \frac{r_0^2 \sin 2\varphi}{2} - r_0 \sqrt{R_2^2 - r_0^2 \sin^2 \varphi} \sin \varphi \right) \quad (3.4)$$

Формулы (3.2)–(3.4) определяют отображение области течения (рис. 2 слева) на концентрическое кольцо $R_1 < \tilde{r} < R_2$ (рис. 2 справа). Декартовы компоненты скорости \mathbf{v}^* согласно равенству (3.1) имеют вид

$$\begin{aligned} V_{x'}^* &= \left(\frac{\partial X}{\partial x_0} \dot{x}_0 + \frac{\partial X}{\partial y_0} \dot{y}_0 \right), & V_{y'}^* &= \left(\frac{\partial Y}{\partial x_0} \dot{x}_0 + \frac{\partial Y}{\partial y_0} \dot{y}_0 \right) \\ X &= x_0' + r(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) \cos(\varphi(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) + \varphi_0'), & Y &= y_0' + r(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) \sin(\varphi(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) + \varphi_0') \end{aligned} \quad (3.5)$$

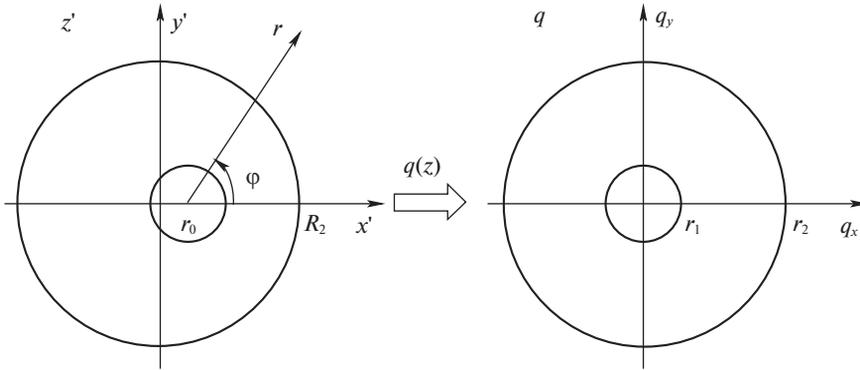


Рис. 3

Зависимости $r(\tilde{r}, \tilde{\phi})$ и $\phi(\tilde{r}, \tilde{\phi})$ определяются с помощью соотношений (3.2)–(3.4). По формулам (3.5) компоненты скорости вычисляются точно.

4. Нахождение потенциального поля скорости. Для вычисления функции Лагранжа (2.1) необходимо найти поле скорости \mathbf{v} . Для начала рассмотрим более простой случай потенциального среднего течения. Удобно перейти к комплексным переменным. Так, ось внутреннего цилиндра смещена в точку $z_0 = x_0 + iy_0$ (рис. 1), а комплексный вектор скорости жидкости между двумя цилиндрами на комплексной плоскости $z = x + iy$ можно записать в виде

$$U - iV = \frac{d(W_\Gamma + W)}{dz},$$

где W_Γ – комплексный потенциал чисто циркуляционного течения, W – комплексный потенциал бесциркуляционного течения.

С помощью преобразования поворота $z = \frac{z_0}{r_0} z'$ можно перейти из исходной системы координат $z = x + iy$ в систему координат $z' = x' + iy'$, в которой внутренний цилиндр оказывается смещен только по оси Ox' на величину $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Координаты этих систем связаны зависимостями

$$x = x' \frac{x_0}{r_0} - y' \frac{y_0}{r_0}, \quad y = x' \frac{y_0}{r_0} + y' \frac{x_0}{r_0}$$

В системе $z' = x' + iy'$ комплексную скорость жидкости можно переписать в виде

$$U' - iV' = \frac{d(W'_\Gamma + W)}{dz'} \tag{4.1}$$

Рассмотрим циркуляционную и бесциркуляционную части по отдельности.

Циркуляционное течение. Рассмотрим циркуляционное течение вокруг смещенного цилиндра. Потенциал W'_Γ определяется с помощью конформного отображения комплексной плоскости z' действительного течения на плоскость q (рис. 3).

Введем обозначения

$$\eta_1 = \frac{r_0 - R_1 - X_1}{r_0 - R_1 - X_2}, \quad \eta_2 = \frac{R_2 + X_1}{R_2 + X_2}, \quad \xi_\pm = R_1^2 \pm R_2^2, \quad \eta = R_1^2 R_2^2 \tag{4.2}$$

Отображение области между сечениями цилиндров на кольцо $r_1 < |q| < r_2$ можно осуществить с помощью дробно-линейного преобразования

$$q = \frac{z' - X_1}{z' - X_2}; \quad X_1 = \frac{r_0^2 - \xi_- - \kappa}{2r_0}, \quad X_2 = \frac{r_0^2 - \xi_- + \kappa}{2r_0}, \quad \kappa = \sqrt{(r_0^2 - \xi_-)^2 - 4R_2^2 r_0^2}$$

Комплексный потенциал циркуляционного течения имеет вид

$$W'_\Gamma = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln q = \Phi(x', y') + i\Psi(x', y') \quad (4.3)$$

Кинетическая энергия жидкости в кольце приводится к интегралу по границе

$$T = \frac{1}{2} \iint_S \mathbf{v}^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_S (\nabla\Psi)^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial S} \Psi \frac{\partial\Psi}{\partial n} ds = \frac{1}{2} \left(\Psi_2 \int_{C_2} \frac{\partial\Psi}{\partial n} ds + \Psi_1 \int_{C_1} \frac{\partial\Psi}{\partial n} ds \right)$$

Нормаль является внешней по отношению к области, занятой жидкостью. Производная функции тока по нормали к внешней окружности равна скорости жидкости с обратным знаком: $\partial\Psi/\partial n|_{C_2} = -v$, а производная по нормали к внутренней окружности равна скорости жидкости: $\partial\Psi/\partial n|_{C_1} = v$. Соответствующие интегралы равны циркуляции с выбранным знаком. Таким образом, для кинетической энергии получаем выражение

$$T = \frac{1}{2} \Gamma (\Psi_1 - \Psi_2) = \frac{\Gamma^2}{4\pi} \left(\ln \left| \frac{R_2 - X_1}{R_2 - X_2} \right| - \ln \left| \frac{r_0 + R_1 - X_1}{r_0 + R_1 - X_2} \right| \right)$$

Поскольку рассматривается чисто циркуляционное течение, в котором внутренний цилиндр неподвижен, скорость $\mathbf{v}^* = 0$. Функция Лагранжа согласно второму равенству (2.2) равна кинетической энергии с обратным знаком: $L = \frac{1}{2} \Gamma (\Psi_2 - \Psi_1)$.

Сила, действующая на цилиндр со стороны циркуляционного потока, вычисляется по формуле Лагранжа $F = \partial L / \partial r_0$. Выполнив дифференцирование, для силы получим выражение

$$F = \frac{\Gamma^2}{2\pi\kappa} = \frac{\Gamma^2}{2\pi} \frac{r_0}{\sqrt{((R_2 + R_1)^2 - r_0^2)((R_2 - R_1)^2 - r_0^2)}}$$

Цизотги было получено точное выражение для силы. Оно приведено в монографии Ламба [15]. Если устранить небольшую опечатку, то это выражение тождественно приведенному выше, что убедительно подтверждает достоверность метода Лагранжа и приведенного точного выражения функции Лагранжа для чисто циркуляционного течения.

Потенциальное течение. При отсутствии завихренности и циркуляции потенциал течения можно представить в виде

$$W(z') = \dot{x}'_0 W_x + \dot{y}'_0 W_y,$$

где \dot{x}'_0 и \dot{y}'_0 — компоненты скорости движения внутреннего цилиндра в системе координат x' , y' . Потенциалы W_x и W_y можно записать в виде рядов Лорана

$$W_x(z') = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{R_2^2}{z'^k} + z'^k \right), \quad W_y(z') = \sum_{k=1}^{\infty} iB_k \left(\frac{R_2^2}{z'^k} - z'^k \right) \quad (4.4)$$

Из них можно получить все коэффициенты A_k и B_k в виде рядов по степеням r_0 . С точностью до $O(r_0^3)$ найдем

$$A_1 = B_1 = \frac{R_1^2}{\xi_-} + \frac{2R_1^2\eta}{\xi_-^3\xi_+} r_0^2, \quad A_2 = B_2 = -\frac{\eta}{\xi_-^2\xi_+} r_0, \quad A_3 = B_3 = \frac{\eta(R_1^4 + R_2^4)}{\xi_-^3(R_1^6 + 2\xi_+\eta + R_2^6)} r_0^2 \quad (4.5)$$

$$A_n = B_n = O(r_0^{n-1}), \quad n = 4, 5, \dots$$

Такой порядок точности достаточен для определения условий устойчивости.

5. Постоянная завихренность. Для учета постоянной завихренности удобно перейти в систему координат $z'_\omega = x'_\omega + iy'_\omega$, вращающуюся с угловой скоростью ω : $z' = z'_\omega e^{i\omega t}$. В системах z' и z'_ω комплексные координаты центра поперечного сечения внутреннего цилиндра и его скорость в начальный момент времени связаны между собой:

$$z'_0 = z'_{\omega 0}, \quad \dot{z}'_0 = (\dot{z}'_{\omega 0} + i\omega z'_{\omega 0})e^{i\omega t} \Big|_{t=0} = \dot{z}'_{\omega 0} + i\omega z'_{\omega 0}$$

Для декартовых компонент центра поперечного сечения имеем

$$x'_0 = x'_{\omega 0} = r_0, \quad y'_0 = y'_{\omega 0} = 0$$

и для компонент скорости

$$\dot{x}'_0 = \dot{x}'_{\omega 0}, \quad \dot{y}'_0 = \dot{y}'_{\omega 0} + \omega r_0$$

Во вращающейся системе координат z'_ω течение имеет комплексный потенциал

$$W'(z'_\omega) = \dot{x}'_{\omega 0} W_x + \dot{y}'_{\omega 0} W_y$$

При возвращении в исходную систему скорости центра $\dot{x}'_{\omega 0}$, $\dot{y}'_{\omega 0}$ нужно заменить на \dot{x}'_0 , $\dot{y}'_0 - \omega r_0$. Тогда в разд. 4

$$W'(z') = \dot{x}'_0 W_x + (\dot{y}'_0 - \omega r_0) W_y$$

Таким образом, комплексный вектор скорости (4.1) представляется в следующем окончательном виде:

$$U' - iV' = \frac{dW'_\Gamma}{dz'} + \dot{x}'_0 \frac{dW_x}{dz'} + (\dot{y}'_0 - \omega r_0) \frac{dW_y}{dz'} - \omega y' - i\omega x' \quad (5.1)$$

Величины W'_Γ , W_x и W_y определены формулами (4.3)–(4.5).

6. Разложения для лагранжиана. Лагранжиан (2.1) удобно вычислять, перейдя к полярным координатам на плоскости \tilde{r} , $\tilde{\phi}$, изображенной на рис. 2 справа. Имеем выражение

$$\Lambda' = \rho_0 \int_a^R \tilde{r} d\tilde{r} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*)\mathbf{v} \right) d\tilde{\phi}$$

Подставляя в него скорость течения (5.1), используя связь координат (3.3), выражение для скорости \mathbf{v}^* (3.5) и обозначения (4.2), получим

$$\Lambda' = \hat{\rho}_0 (\Gamma^2 r_0^2 - 2\Gamma\pi\xi_+ r_0 (\dot{y}'_0 - \omega r_0)) + \\ + \hat{\rho}_0 (2\pi^2 R_1^2 (R_1^2 (\dot{x}'_0{}^2 + \dot{y}'_0{}^2) + R_2^2 (\dot{x}'_0{}^2 + \dot{y}'_0{}^2 - 4\dot{y}'_0 r_0 \omega + 2r_0^2 \omega^2)))$$

$$\hat{\rho}_0 = -\frac{\rho_0}{4\pi\xi_-}$$

Введем обозначения

$$\Omega_1 = \Gamma\xi_+ + 4\pi\eta\omega, \quad \Omega_2^\pm = \pi\rho_0 R_1^2 \xi_+ \pm M\xi_-$$

$$\Gamma_{12} = (\Gamma + 2\pi\omega R_1^2)(\Gamma + 2\pi\omega R_2^2), \quad \hat{M} = M - \pi\rho_0 R_1^2$$

С помощью замены

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad \dot{x}'_0 = \dot{x}_0 \frac{x_0}{r_0} + \dot{y}_0 \frac{y_0}{r_0}, \quad \dot{y}'_0 = -\dot{x}_0 \frac{y_0}{r_0} + \dot{y}_0 \frac{x_0}{r_0}$$

найдем с точностью до членов, квадратичных по координатам и скоростям, функцию Лагранжа в координатах x_0, y_0

$$\Lambda = 2\hat{\rho}_0\pi^2 R_1^2 \xi_+ (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + 2\hat{\rho}_0\pi\Omega_1 (\dot{x}_0 y_0 - \dot{y}_0 x_0) + \hat{\rho}_0\Gamma_{12} (x_0^2 + y_0^2)$$

Для того, чтобы получить функцию Лагранжа всей системы, необходимо добавить к найденному выражению кинетическую энергию движения цилиндра, т.е.

$$L = \frac{1}{2} M (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \Lambda$$

В полученной функции Лагранжа присутствуют линейные по скоростям слагаемые (гироскопические члены). Для того чтобы избавиться от них, перейдем во вращающуюся систему координат

$$x_0 = X_0 \cos \Omega t + Y_0 \sin \Omega t, \quad y_0 = -X_0 \sin \Omega t + Y_0 \cos \Omega t; \quad \Omega = -\rho_0 \frac{\Omega_1}{2\Omega_2^+}$$

В новых координатах функция Лагранжа имеет вид

$$L = T - \Pi$$

$$T = \frac{\Omega_2^-}{2\xi_-} (\dot{X}_0^2 + \dot{Y}_0^2) \quad (6.1)$$

$$\Pi = -\chi[\rho_0\Gamma^2(2M - \pi\rho_0\xi_+) + 4\pi\omega\hat{M}(\Gamma\xi_+ + 2\pi\eta\omega)]; \quad \chi = \frac{X_0^2 + Y_0^2}{8\pi\Omega_2^-},$$

где T – квадратичная форма по скоростям, функция Π не зависит от скоростей.

Вычисленная с этой точностью функция Лагранжа соответствует динамическим уравнениям линейной теории [4]. В нелинейном приближении следует учесть члены порядка четвертых степеней по x_0, y_0 . К функции Лагранжа (6.1) добавится слагаемое

$$\Delta L = \Delta T - \Delta\Pi$$

$$\Delta T = -\frac{2\pi\rho_0\eta^2}{\xi_-^3\xi_+} (X_0^2 + Y_0^2)(\dot{X}_0^2 + \dot{Y}_0^2), \quad \Delta\Pi = \frac{8\pi\chi^2\rho_0\hat{M}^2\Omega_1^2}{\xi_- \xi_+} \quad (6.2)$$

Нелинейный член в потенциале оказывается отрицательным, что ведет к неустойчивости системы в случае, если линейный член обращается в нуль.

7. Анализ устойчивости. В линейном приближении, согласно равенству (6.1), потенциальная энергия оказывается положительной, а система по теореме Лагранжа – устойчивой при

$$M < M_*; \quad M_* = \frac{\pi\rho_0}{2\Gamma_{12}} (\Gamma\Omega_1 + 4\pi R_1^2 \omega (\Gamma R_1^2 + 2\pi\eta\omega))$$

Если $M > M_*$ система оказывается неустойчивой. Этот вывод совпадает с результатом анализа устойчивости в линейном приближении [4].

Решение задачи устойчивости при $M = M_*$, требует учета высших степеней по X_0, Y_0 (6.2); в результате потенциальная энергия отрицательна:

$$\Pi = \Delta\Pi = \frac{\rho_0\hat{M}^2\Omega_1^2(X_0^2 + Y_0^2)^2}{8\pi\xi_- \xi_+ (M\xi_- - \pi\rho_0 R_1^2 \xi_+)^2}$$

Таким образом, задача устойчивости полностью решена: при $M < M_*$ стационарная точка $X_0 = 0, Y_0 = 0$ устойчива; при $M \geq M_*$ – неустойчива.

Параметры Γ и ω в рамках модели идеальной жидкости остаются произвольными числами. Рассматриваемое среднее течение с постоянной завихренностью между двумя цилиндрами удовлетворяет как уравнениям Эйлера, так и уравнениям Навье–Стокса. Таким образом, параметры Γ и ω можно связать с угловыми скоростями вра-

нения цилиндров ω_1 и ω_2 , определяющими течения Куэтта в вязкой жидкости. Угловая компонента скорости течения Куэтта имеет вид

$$v_\varphi = \left(\frac{\omega_1 R_1^2 - \omega_2 R_2^2}{\xi_-} + \frac{(\omega_2 - \omega_1)\eta}{\xi_- r^2} \right) r$$

Для нее в принятых обозначениях имеем

$$\omega = \frac{\omega_1 R_1^2 - \omega_2 R_2^2}{\xi_-}, \quad \Gamma = 2\pi \frac{(\omega_2 - \omega_1)\eta}{\xi_-}$$

Таким образом, параметры ω и Γ выражены через угловые скорости цилиндров ω_1 и ω_2 .

Условие устойчивости, выраженное через угловые скорости вращения цилиндров ω_1 и ω_2 , примет вид

$$M < M_*, \quad M_* = \frac{\pi \rho_0 R_1^2 (2R_1^2 \omega_1 \omega_2 - R_2^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2))}{\xi_- \omega_1 \omega_2}$$

При $M \geq M_*$ равновесие неустойчиво.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (19-19-00373).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копьев В.Ф., Чернышев С.А. Неустойчивость колеблющегося цилиндра в циркуляционном потоке идеальной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 6. С. 78–92.
2. Miles J.W. On the generation of surface waves by shear flow. Part 2 // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. № 4. P. 568–582.
3. Копьев В.Ф., Чернышев С.А. Колебания вихревого кольца, возникновение в нем турбулентности и генерация звука // Успехи физ. наук. 2000. Т. 170. № 7. С. 713–742.
4. Копьев В.Ф., Чернышев С.А., Юдин М.А. Неустойчивость цилиндра в циркуляционном потоке несжимаемой идеальной жидкости // ПММ. 2017. Т. 81. № 2. С. 216–229.
5. Drazin P.G., Reid W.H. Hydrodynamic Stability. 2nd ed. Cambridge: Univ. Press, 2004. 605 p.
6. Чернявский В.М., Штемлер Ю.М. Об устойчивости течения Куэтта между незакрепленными цилиндрами с учетом самогравитации // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 5. С. 110–119.
7. Vladimirov V.A., Ilin K.I. On the Arnold stability of a solid in a plane steady flow of an ideal incompressible fluid // Theor. Comput. Fluid Dyn. 1998. V. 10. P. 425–437.
8. Vladimirov V.A., Ilin K.I. On the stability of the dynamical system 'rigid body + inviscid fluid' // J. Fluid Mech. 1999. V. 386. P. 43–75.
9. Thomson W., Tait P. Treatise on Natural Philosophy. V. 1. Oxford: Univ. Press, 1867. 727 p.
10. Kirchhoff G. Mechanik. Leipzig: B.G. Teubner. 1897. 462 p.
11. Thomson W. On the motion of rigid solids circulating irrotationally through perforations in them or a fixed solid // Philos. Mag. V. 45. Proc. R. Soc. Edinburgh. 1872. V. 7. P. 668–682.
12. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Избр. соч. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. С. 31–152.
13. Охоцимский Д.Е. К теории движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 3–20.
14. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. Москва: Наука, 1965. 339 с.
15. Lamb H. Hydrodynamics. Cambridge: Univ. Press, 1912. 728 p.
16. Петров А.Г. Принцип Гамильтона и некоторые задачи динамики идеальной жидкости // ПММ. Т. 47. Вып. 1. 1983. С. 48–55.
17. Гончаров В.П., Павлов В.И. Гамильтонова вихревая и волновая динамика. Москва: ГЕОС, 2008. 432 с.
18. Капица П.Л. Устойчивость и переход через критические обороты быстро вращающихся роторов при наличии трения // ЖТФ. 1939. Т. 9. № 2. С. 124–146.
19. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. Москва: Физматлит, 2001. 320 с.
20. Петров А.Г. Аналитическая гидродинамика. Москва: Физматлит, 2009. 520 с.
21. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. Москва: Наука, 1966. 300 с.

On the Cylinder Dynamics in Bounded Fluid Flow with Constant Vorticity

A. G. Petrov^{a,#} and M. A. Yudin^{b,c,##}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^b*Zhukovsky Central Aerohydrodynamic Institute, Moscow, Russia*

^c*Moscow institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*

[#]*e-mail: petrovipmech@gmail.ru*

^{##}*e-mail: mikleudin@yandex.com*

The stability of a moving cylinder in the circulation flow of an ideal incompressible fluid with constant vorticity, bounded by stationary outer cylinder, is investigated. The methods of Lagrangian mechanics are used. The Lagrange function is obtained in the form of expansion in a series with respect to a small displacement of the cylinder and the stability condition in the nonlinear approximation are gained.

Keywords: instability, bounded flow, Lagrange function

REFERENCES

1. *Kop'ev V.F., Chernyshev S.A.* Instability of an oscillating cylinder in a circulation flow of ideal fluid // *Fluid Dyn.*, 2000, vol. 35, no. 6, pp. 858–871.
2. *Miles J.W.* On the generation of surface waves by shear flow. Part 2 // *J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 6, no. 4, pp. 568–582.
3. *Kopiev V.F., Chernyshev S.A.* Vortex ring oscillations, the development of turbulence in vortex rings and generation of sound // *Physics-Uspekh*, 2000, vol. 170, no. 7, pp. 713–742.
4. *Kopiev V.F., Chernyshev S.A., Yudin M.A.* Instability of a cylinder in the circulation flow of incompressible ideal fluid // *JAMM*, 2017, vol. 81, no. 2, pp. 148–156.
5. *Drazin P.G., Reid W.H.* *Hydrodynamic Stability*. 2nd ed. Cambridge: Univ. Press, 2004. 605 p.
6. *Chernyavskij V.M., Shtemler Yu.M.* On the stability of Couette flow between unfixed cylinders in selfgravitational field // *Fluid Dyn.*, 1991, no. 5, pp. 729–737.
7. *Vladimirov V.A., Ilin K.I.* On the Arnold stability of a solid in a plane steady flow of an ideal incompressible fluid // *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 1998, vol. 10, pp. 425–437.
8. *Vladimirov V.A., Ilin K.I.* On the stability of the dynamical system 'rigid body + inviscid fluid' // *J. Fluid Mech.*, 1999, vol. 386, pp. 43–75.
9. *Thomson W., Tait P.* *Treatise on Natural Philosophy*. V. 1. Oxford: Univ. Press, 1867. 727 p.
10. *Kirchhoff G.* *Mechanik*. Leipzig: B.G. Teubner, 1897. 462 p.
11. *Thomson W.* On the motion of rigid solids circulating irrotationally through perforations in them or a fixed solid // *Philos. Mag.* V. 45. *Proc. R. Soc. Edinburgh*, 1872, vol. 7, pp. 668–682.
12. *Zhukovsky N.E.* On the motion of a solid body having cavities filled with a uniform dropping liquid // *Selected works*, 1948, vol. 1, pp. 31–152. (in Russian)
13. *Okhotsimskiy D.E.* On the theory of motion of a solid with cavities partially filled with liquid // *JAMM*, 1956, vol. 20, no. 1, pp. 3–20. (in Russian)
14. *Moiseev N.N., Rummyantsev V.V.* *Body dynamics with cavities containing fluid*. Moscow: Nauka, 1965. 339 p. (in Russian)
15. *Lamb H.* *Hydrodynamics*. Cambridge: Univ. Press, 1912. 728 p.
16. *Petrov A.G.* Hamilton's principle and certain problems of dynamics of perfect fluid // *JAMM*, 1983, vol. 47, no. 1, pp. 30–36.
17. *Goncharov V.P., Pavlov V.I.* Hamiltonian vortex and wave dynamics. 2008. 432 p. (in Russian)
18. *Kapica P.L.* Stability and transition through critical rotations of rapidly rotating rotors in the presence of friction // *JTF*, 1939, vol. 9, no. 2, pp. 124–146. (in Russian)
19. *Zhuravlev V.F.* *Fundamentals of Theoretical Mechanics*. Moscow: Fizmatlit, 2001. 320 p. (in Russian)
20. *Petrov A.G.* *Analytical hydrodynamics*. Moscow: Fizmatlit, 2009. 520 p. (in Russian)
21. *Gantmakher F.R.* *Lectures on analytical mechanics*. Moscow: Naukap, 1966. 300 p. (in Russian)