УЛК 531.36:521.1

## О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ БЛИЗКОЙ К АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЯХ ДВОЙНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

© 2019 г. О. В. Холостова\*

Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия \*e-mail: kholostova o@mail.ru

Поступила в редакцию 12.03.2018 г. После доработки 10.02.2019 г. Принята к публикации 19.03.2019 г.

Рассматриваются движения близкой к автономной,  $2\pi$ -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия. Предполагается, что гамильтониан системы зависит от трех параметров  $\epsilon$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ , и при  $\epsilon = 0$  система автономна. Пусть для некоторых значений  $\alpha$  и  $\beta$  в невозмущенной ( $\epsilon = 0$ ) системе реализуется двойной параметрический резонанс, когда одна из частот малых линейных колебаний системы в окрестности положения равновесия является целым, а другая полуцелым числом. Для достаточно малых, но отличных от нуля значений  $\epsilon$  в малой окрестности резонасной точки, рассматриваемой при фиксированном резонансном значении одного из параметров ( $\beta$ ), решен вопрос о существовании, бифуркациях и устойчивости в линейном приближении периодических движений системы. В случаях кратных резонансов исследуемого типа построены периодические движения динамически симметричного спутника в окрестности его стационарного вращения (цилиндрической прецессии) на слабоэллиптической орбите и проведен линейный и нелинейный анализ их устойчивости.

*Ключевые слова:* гамильтонова система, кратный параметрический резонанс, периодическое движение, устойчивость, симметричный спутник, цилиндрическая пренесссия

**DOI:** 10.1134/S0032823519020103

Была иссследована устойчивость положений равновесия гамильтоновых систем при наличии однократного параметрического резонанса [1]. Изучены периодические и условно-периодические движения близкой к автономной гамильтоновой системы с одной степенью свободы в случае параметрического резонанса [2—4]. Рассмотрены резонансные периодические движения в системе с двумя степеням свободы при однократном параметрическом резонансе основного типа [5]. Изучались случаи кратных параметрических резонансов в близких к автономным линейных гамильтоновых системах [6—8] (см. также монографию [9]), установлено существование нескольких областей параметрического резонанса, выходящих из порождающей точки. Эти области были построены при исследовании ряда задач динамики спутника (моделируемого твердым телом) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Были рассмотрены периодические движения близкой к автономной, периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, их бифуркации и устойчивость в случаях, когда одна из частот малых колебаний невозмущенной системы равна целому или полуцелому числу, а другая равна нулю [10].

В работе для аналогичных систем исследуется другой случай кратного параметрического резонанса, когда одна из частот малых линейных колебаний невозмущенной системы целое, а другая полуцелое число. Описаны периодичские движения системы, исследована их бифуркация и устойчивость в линейном приближении. Исследованы резонансные периодические движения динамически симметричного спутника в окрестности стационарного вращения на слабоэллиптической орбите.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движения близкой к автономной,  $2\pi$ -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Пусть гамильтониан системы зависит от малого параметра  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) и параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , меняющихся в некотором диапазоне, и аналитичен по ним. При достаточно малых значениях  $\varepsilon$  представим гамильтониан в виде ряда

$$H = H^{(0)}(q_j, p_j, \alpha, \beta) + \varepsilon H^{(1)}(q_j, p_j, t, \alpha, \beta) + \varepsilon^2 H^{(2)}(q_j, p_j, t, \alpha, \beta) + O(\varepsilon^3), \tag{1.1}$$

где  $q_j$  и  $p_j$  (j=1,2) — канонически сопряженные координаты и импульсы.

Будем считать, что начало координат  $q_j = p_j = 0$  (j = 1, 2) фазового пространства — положение равновесия системы, в его окрестности гамильтониан (1.1) аналитичен по  $q_j$ ,  $p_j$ , а функции  $H^{(k)}$  записываются в виде рядов, содержащих слагаемые четных степеней по координатам и импульсам:

$$H^{(k)} = H_{2k} + H_{4k} + \dots {1.2}$$

Здесь  $H_{lk}$  (l=2,4,...;k=0,1,2,...) — совокупности слагаемых степени l по  $q_j$  и  $p_j$  с постоянными (при k=0) или  $2\pi$ -периодическими по времени (при k=1,2,...) коэффициентами, а многоточие означает совокупность слагаемых не менее шестой степени по  $q_j$  и  $p_j$ .

Пусть при  $\varepsilon=0$  имеется область изменения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , в которой рассматриваемое положение равновесия устойчиво в линейном приближении, корни  $\pm i\omega_j(\alpha,\beta)$  (j=1,2) характеристического многочлена линеаризованных уравнений возмущенного движения чисто мнимые. Пусть, кроме того, для некоторых значений —  $\alpha=\alpha_*$  и  $\beta=\beta_*$  из этой области одна из частот  $\omega_j$  — целое (отличное от нуля), а другая — полуцелое число и, таким образом, в системе реализуется двойной параметрический резонанс. При достаточно малых, но отличных от нуля значениях  $\varepsilon$  в окрестности резонансной точки  $(0,\alpha_*,\beta_*)$  трехмерного пространства параметров появляются области неустойчивости (области параметрического резонанса).

Цель данной работы — решение задачи о существовании, бифуркациях и устойчивости (в линейном приближении) периодических движений системы с гамильтонианом (1.1), (1.2) в малой окрестности точки (0,  $\alpha_*$ ,  $\beta_*$ ) кратного параметрического резонанса рассматриваемого типа. Исследование будет проводиться в сечениях  $\beta = \beta_*$  трехмерного пространства параметров при достаточно малых, но отличных от нуля значениях  $\epsilon$  и близких к резонансным значениям  $\alpha$ .

В качестве приложения будут построены (в соответствующих сечениях трехмерного пространства параметров) резонансные периодические движения динамически симметричного спутника в окрестности его цилиндрической прецессии на слабоэллиптической орбите. Для одной из резонансных точек предложенный в теории алгоритм будет обобщен и применен при рассмотреннии трехмерной окрестности этой точки. Будет проведен полный, линейный и нелинейный, анализ устойчивости найденных периодических движений спутника.

**2.** Преобразование гамильтониана. Модельные гамильтонианы. Пусть при  $\varepsilon = 0$ ,  $\alpha = \alpha_*$  и  $\beta = \beta_*$  в системе с гамильтонианом (1.1), (1.2) выполнены соотношения  $\omega_1 = n$ ,  $2\omega_2 = m$ , где n — целое число и m — целое нечетное число.

Будем рассматривать движения системы в малой окрестности резонансной точки  $(0, \alpha_*, \beta_*)$  при  $\beta = \beta_*$ , полагая

$$\alpha = \alpha_* + \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + \varepsilon^3 \mu_3 + \dots \quad (\mu_k = \text{const})$$

Тогда гамильтониан (1.1), (1.2) может быть переписан в виде

$$H = H_2 + H_4 + ..., \quad H_4 = H_{40}(q_j, p_j, \alpha_*, \beta_*) + O(\varepsilon)$$
 (2.1)

$$H_2 = H_{20} + \varepsilon [\mu_1 H'_{20} + H_{21}] + \varepsilon^2 [\mu_2 H''_{20}/2 + \mu_1 H'_{21} + H_{22}] + O(\varepsilon^3), \tag{2.2}$$

где коэффициенты  $H_{20}$  и  $H_{40}$  — функции аргументов  $(q_j, p_j, \alpha_*, \beta_*)$ , а коэффициенты  $H_{21}$  и  $H_{22}$  — аргументов  $(q_j, p_j, t, \alpha_*, \beta_*)$ . Штрих означает дифференцирование по параметру  $\alpha$ . Будем полагать, что  $\overline{H_{21}(t, \alpha_*, \beta_*)} = 0$ ; здесь и далее черта означает среднее за период (по времени) значение стоящей под ней функции. Отметим, что указанное условие довольно часто выполняется в близких к автономным гамильтоновых системах, исследуемых в классической и небесной механике.

2.1. Преобразование гамильтониана. Осуществим ряд канонических преобразований, упрощающих структуру гамильтониана (2.1), (2.2) в слагаемых до четвертого порядка включительно по  $q_i$ ,  $p_i$  (i=1,2) с учетом имеющихся резонансов.

Сначала нормализуем автономную (при  $\varepsilon = 0$ ) часть гамильтониана (2.1), (2.2). Оставляя за переменными прежние обозначения, запишем результат в виде ( $c_{ii}$  = const)

$$H^{(0)} = H_{20} + H_{40} + \dots, \quad H_{20} = \frac{n}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{m}{4}(q_2^2 + p_2^2)$$
 (2.3)

$$H_{40} = \frac{c_{20}}{4} (q_1^2 + p_1^2)^2 + \frac{c_{11}}{4} (q_1^2 + p_1^2) (q_2^2 + p_2^2) + \frac{c_{02}}{4} (q_2^2 + p_2^2)^2$$
 (2.4)

Далее упростим структуру квадратичной части гамильтониана при  $\epsilon \neq 0$ . Результат будем представлять в виде

$$K_2 = K_{20} + \varepsilon K_{21} + \varepsilon^2 K_{22} + \varepsilon^3 K_{23} + \dots \quad (K_{20} = H_{20})$$

Рассмотрим слагаемые порядка  $\varepsilon$ . Пусть после нормализации автономной части гамильтониана функции  $H_{20}'$  и  $H_{21}$  из (2.2) преобразуются к виду

$$H'_{20} = a_1 q_1^2 + a_2 q_2^2 + a_3 p_1^2 + a_4 p_2^2 +$$

$$+ a_5 q_1 q_2 + a_6 q_1 p_1 + a_7 q_1 p_2 + a_8 q_2 p_1 + a_9 q_2 p_2 + a_{10} p_1 p_2$$

$$H_{21} = b_1 q_1^2 + b_2 q_2^2 + b_3 p_1^2 + b_4 p_2^2 +$$

$$+ b_5 q_1 q_2 + b_6 q_1 p_1 + b_7 q_1 p_2 + b_8 q_2 p_1 + b_9 q_2 p_2 + b_{10} p_1 p_2,$$

где  $a_k$  — некоторые постоянные коэффициенты, а  $b_k(t) - 2\pi$ -периодические функции времени ( $\overline{b_k(t)} = 0$ ).

Осуществим унивалентное,  $4\pi$ -периодическое по времени преобразование поворота по обеим парам переменных, определяемое формулами

$$q_1 = x_1 \cos nt + X_1 \sin nt,$$
  $p_1 = -x_1 \sin nt + X_1 \cos nt$   
 $q_2 = x_2 \cos \frac{mt}{2} + X_2 \sin \frac{mt}{2},$   $p_2 = -x_2 \sin \frac{mt}{2} + X_2 \cos \frac{mt}{2}$ 

При этом в гамильтониане (2.3) исчезнет квадратичная часть  $H_{20}$ , а форма  $H_{40}$  (2.4) с точностью до обозначений переменных не изменится.

Сделаем затем линейное, близкое к тождественному (и отличающееся от него слагаемыми порядка  $\varepsilon$ ),  $4\pi$ -периодическое по времени каноническое преобразование  $x_j$ ,  $X_j \to \tilde{x}_j$ ,  $\tilde{X}_j$ , уничтожающее время t в слагаемых порядка  $\varepsilon$  в квадратичной части гамильтониана. В результате в квадратичной части, вместо исходных десяти, останется шесть слагаемых, разбитых на две группы, зависящие от своей пары сопряженных переменных:

$$K_{21} = (\mu_1 \gamma_1 - \beta_1) \tilde{x}_1^2 + (\mu_1 \gamma_1 + \beta_1) \tilde{X}_1^2 + \beta_2 \tilde{x}_1 \tilde{X}_1 + (\mu_1 \gamma_2 - \beta_3) \tilde{x}_2^2 + (\mu_1 \gamma_2 + \beta_3) \tilde{X}_2^2 + \beta_4 \tilde{x}_2 \tilde{X}_2,$$
(2.5)

где, как показывают расчеты,

$$\gamma_{1} = \frac{1}{2}(a_{1} + a_{3}), \quad \gamma_{2} = \frac{1}{2}(a_{2} + a_{4})$$

$$\beta_{1} = -\frac{1}{2}\overline{[b_{1}(t) - b_{3}(t)]\cos 2nt} + \frac{1}{2}\overline{b_{6}(t)\sin 2nt}, \quad \beta_{2} = \overline{[b_{1}(t) - b_{3}(t)]\sin 2nt} + \overline{b_{6}(t)\cos 2nt}$$

$$\beta_{3} = -\frac{1}{2}\overline{[b_{2}(t) - b_{4}(t)]\cos mt} + \frac{1}{2}\overline{b_{5}(t)\sin mt}, \quad \beta_{4} = \overline{[b_{2}(t) - b_{4}(t)]\sin mt} + \overline{b_{5}(t)\cos mt}$$
(2.6)

Проведем дальнейшее упрощение квадратичной формы (2.5), осуществив еще одно преобразоование поворота по каждой паре переменных, описываемое соотношениями

$$\tilde{x}_{i} = y_{i} \cos \varphi_{0i} + Y_{i} \sin \varphi_{0i}, \quad \tilde{X}_{i} = -y_{i} \sin \varphi_{0i} + Y_{i} \cos \varphi_{0i} \quad (j = 1, 2)$$

Углы  $\phi_{0i}$  задаются равенствами

$$\begin{split} \cos 2\phi_{01} &= \frac{\beta_1}{\beta'}, \quad \sin 2\phi_{01} = \frac{\beta_2}{2\beta'}, \quad \beta' = \frac{1}{2} \sqrt{4\beta_1^2 + \beta_2^2} \\ \cos 2\phi_{02} &= \frac{\beta_3}{\beta''}, \quad \sin 2\phi_{02} = \frac{\beta_4}{2\beta''}, \quad \beta'' = \frac{1}{2} \sqrt{4\beta_3^2 + \beta_4^2} \end{split}$$

Предполагается, что  $\beta' \neq 0$  и  $\beta'' \neq 0$ .

В результате получаем

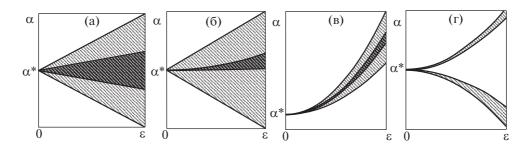
$$K_{21} = (\mu_1 \gamma_1 - \beta') y_1^2 + (\mu_1 \gamma_1 + \beta') Y_1^2 + (\mu_1 \gamma_2 - \beta'') y_2^2 + (\mu_1 \gamma_2 + \beta'') Y_2^2$$
(2.7)

Тривиальное положение равновесия линейной системы с гамильтонианом (2.7) устойчиво при выполнении условий

$$|\mu_1| > \mu_1', \quad |\mu_1| > \mu_1'', \quad \mu_1' = \beta'/|\gamma_1|, \quad \mu_1'', = \beta''/|\gamma_2|$$

и неустойчиво при изменении на противоположный знак хотя бы в одном из неравенств

Области устойчивости и неустойчивости в плоскости параметров є,  $\alpha$  показаны в этом случае на фиг. 1а. Здесь и далее области неустойчивости тривиального равновесия закрашены серым или, при наложении двух областей неустойчивости, темно-серым цветом, области устойчивости (в линейном приближении) не закрашены. Грани-



Фиг. 1

цы внешней и внутренней областей неустойчивости на фиг. 1а задаются соответственно уравнениями

$$\alpha = \alpha^* \pm \max(\mu_1', \mu_1'') \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad \text{if} \quad \alpha = \alpha^* \pm \min(\mu_1', \mu_1'') \varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

Если обе величины  $\mu'_1$  и  $\mu''_1$  отличны от нуля, то процесс нормализации квадратичной части гамильтониана заканчивается.

В случаях, когда квадратичная форма  $H_{21}$  имеет специальную структуру, величины  $\beta$ ' и  $\beta$ " могут обратиться в нуль. Пусть, например, в разложениях функций  $b_k(t)$  в ряды Фурье содержатся только гармоники  $\sin(2k+1)t$  и  $\cos(2k+1)t$ , где k- целые числа. Тогда, как следует из формул (2.6),  $\beta_1=\beta_2=0$ , и значит,  $\beta'=0$ . В этом случае нормализованная квадратичная часть  $K_{21}$  имееет вид

$$K_{21} = \mu_1 \gamma_1 (y_1^2 + Y_1^2) + (\mu_1 \gamma_2 - \beta'') y_2^2 + (\mu_1 \gamma_2 + \beta'') Y_2^2$$
 (2.8)

и внутренняя область неустойчивости на фиг. 1а при рассмотрении первого приближения исчезает.

Если, кроме того, в разложении функций  $b_2(t)$ ,  $b_4(t)$  и  $b_5(t)$  не содержатся гармоники  $\cos mt$  и  $\sin mt$ , то  $\beta''=0$ , и исчезает (в данном приближении) также и вторая область неустойчивости, а функция  $K_{21}$  принимает вид

$$K_{21} = \mu_1 \gamma_1 (y_1^2 + Y_1^2) + \mu_1 \gamma_2 (y_2^2 + Y_2^2)$$
 (2.9)

В этих случаях полагаем  $\mu_1 = 0$ ; для того чтобы выявить расщепление в уравнениях границ областей неустойчивости, рассматриваем следующие приближения по  $\epsilon$ .

На этапе второго приближения сначала, как и ранее, уничтожаем время в слагаемых  $O(\epsilon^2)$  квадратичной части гамильтониана, а затем, при необходимости, делаем преобразования поворота. В случае, отвечающем соотношению (2.8), получаем в итоге ( $\eta_j$  — постоянные, а за переменными оставляем прежние обозначения)

$$K_{21} = \beta''(Y_2^2 - y_2^2) \tag{2.10}$$

$$K_{22} = (\mu_2 \gamma_1 - \eta_1) y_1^2 + (\mu_2 \gamma_1 - \eta_2) Y_1^2 + (\mu_2 \gamma_2 - \eta_3) y_2^2 + (\mu_2 \gamma_2 - \eta_4) Y_2^2$$
(2.11)

Этому случаю соответствует фиг. 16, уравнения границ областей параметрического резонанса имеют вид ( $\mu_2'=\eta_1/\gamma_1,\,\mu_2''=\eta_2/\gamma_1$ )

$$\alpha = \alpha_* \pm \varepsilon \mu_1'' + O(\varepsilon^2), \quad \alpha = \alpha_* + \varepsilon^2 \mu_2' + O(\varepsilon^3), \quad \alpha = \alpha_* + \varepsilon^2 \mu_2'' + O(\varepsilon^3)$$
 (2.12)

Если в соотношении (2.11)  $\eta_1 = \eta_2$ , то  $\mu'_2 = \mu''_2$ , и вторая область неустойчивости на этом этапе еще не определяется. Полагая  $\mu_2 = \mu'_2$ , проводим нормализацию квадратичной части в слагаемых порядка  $\varepsilon^3$ . Получаем в этом случае ( $\xi_j$  — постоянные, за переменными оставлены прежние обозначения)

$$K_{21} = \beta''(Y_2^2 - y_2^2), \quad K_{22} = (\mu_2'\gamma_2 - \eta_3)y_2^2 + (\mu_2'\gamma_2 - \eta_4)Y_2^2$$
 (2.13)

$$K_{23} = (\mu_3 \gamma_1 - \xi_1) y_1^2 + (\mu_3 \gamma_1 - \xi_2) Y_1^2 + (\mu_3 \gamma_2 - \xi_3) y_2^2 + (\mu_3 \gamma_2 - \xi_4) Y_2^2$$
 (2.14)

Границы второй области неустойчивости задаются соотношениями

$$\alpha = \alpha_* + \epsilon^2 \mu_2' + \epsilon^3 \mu_3' + O(\epsilon^4), \quad \alpha = \alpha_* + \epsilon^2 \mu_2' + \epsilon^3 \mu_2'' + O(\epsilon^4)$$
$$\mu_3' = \xi_1 / \gamma_1, \quad \mu_{23}'' = \xi_2 / \gamma_1$$

Рассмотрим теперь случай  $\mu'_1 = \mu''_1 = 0$ , отвечающий квадратичной форме (2.9). При  $\mu_1 = 0$  имеем  $K_{21} = 0$ , а нормализованная квадратичная часть  $K_{22}$  определяется выражением (2.11). При  $\eta_1 \neq \eta_2$  и  $\eta_3 \neq \eta_4$  в этом приближении получаем две области неустойчивости, которые могут располагаться одна внутри другой (аналогично фиг. 1а), либо частично пересекаться, либо не иметь общих точек.

В случае выполнения одного из равенств  $\eta_1=\eta_2$  или  $\eta_3=\eta_4$  в данном приближении определяется только одна область параметричекого резонанса. При  $\eta_3=\eta_4$  ее границы задаются вторым и третьим соотношениями в (2.12). В этом случае для  $\mu_2=\hat{\mu}_2=\eta_3/\gamma_2$  проводится нормализация квадратичной части в слагаемых третьей степени по  $\epsilon$ . Получаем

$$K_{21} = 0, \quad K_{22} = (\hat{\mu}_2 \gamma_1 - \eta_1) y_1^2 + (\hat{\mu}_2 \gamma_1 - \eta_2) Y_1^2,$$
 (2.15)

а форма  $K_{23}$  выписана в (2.14). Отсюда находим уравнения границ второй области параметрического резонанса:

$$\alpha = \alpha_* + \epsilon^2 \hat{\mu}_2 + \epsilon^3 \hat{\mu}_3', \quad \alpha = \alpha_* + \epsilon^2 \hat{\mu}_2 + \epsilon^{'3} \hat{\mu}_3'', \quad \hat{\mu}_3' = \xi_3 / \gamma_3, \quad \hat{\mu}_3'' = \xi_4 / \gamma_3$$
 (2.16)

Если величина  $\hat{\mu}_2$  находится в интервале между  $\mu_2'$  и  $\mu_2''$ , то вторая область лежит внутри первой (фиг. 1в), а если вне этого интервала, то две области параметрического резонанса не пересекаются (фиг. 1а).

В случае, когда в соотношении (2.11) выполнены оба равенства  $\eta_1 = \eta_2$  и  $\eta_3 = \eta_4$ , области параметрического резонанса могут проявиться в слагаемых не менее третьего порядка по  $\epsilon$ . Границы одной из них (при  $\mu_2 = \hat{\mu}_2$ ) определяются соотноошениями (2.16), а границы другой (при  $\mu_2 = \tilde{\mu}_2 = \eta_1/\gamma_1$ ) — аналогичными соотношениями ( $\tilde{\mu}_3'$ ,  $\tilde{\mu}_3''$  — постоянные)

$$\alpha = \alpha_* + \varepsilon^2 \tilde{\mu}_2 + \varepsilon^3 \tilde{\mu}_3' + O(\varepsilon^4), \quad \alpha = \alpha_* + \varepsilon^2 \tilde{\mu}_2 + \varepsilon^3 \tilde{\mu}_3'' + O(\varepsilon^4)$$

Если  $\hat{\mu}_2 = \hat{\mu}_2$ , то для этого общего значения параметра  $\mu_2$  имеем  $K_{22} = 0$ , а нормализованная форма  $K_{23}$  определена равенством (2.14). Процесс нормализации заканчивается, если в этом случае выделяются обе области неустойчивости; если это не так, то рассматриваются следующие приближения по  $\varepsilon$ .

Замечание. Для всех рассмотренных случаев предполагалось, что величины  $\beta'$  и  $\beta''$  имеют порядок единицы (по сравнению с  $\epsilon$ ). Случаи, когда величины  $\beta'$  и/или  $\beta''$  малы (вместе с  $\epsilon$ ), требуют дополнительного исследования; в данной работе такое исследование не проводится.

2.2. Модельные гамильтонианы. Нормализованный гамильтониан возмущенного движения, полученный в результате преобразований, описанных в разд. 2.1, представляется в виде

$$K = K_2 + K_4 + \dots, \quad K_2 = K_2' + O(\varepsilon^{k+1}), \quad K_2' = \sum_{l=1}^k \varepsilon^l K_{2l}$$

$$K_4 = K_{40} + O(\varepsilon), \quad K_{40} = \frac{c_{20}}{4} (y_1^2 + Y_1^2)^2 + \frac{c_{11}}{4} (y_1^2 + Y_1^2) (y_2^2 + Y_2^2) + \frac{c_{02}}{4} (y_2^2 + Y_2^2)^2$$
(2.17)

Квадратичные формы  $K_{2l}$  вычисляются по формулам из разд. 2.1, а многоточие означает совокупность слагаемых не менее шестой степени по  $y_j$ ,  $Y_j$  с  $4\pi$ -периодическими по времени коэффициентами.

Наименьший порядок k нормализованных слагаемых квадратичной части (для которого в окрестности резонансной точки обнаруживаются обе области неустойчивости тривиального равновесия системы) определяется структурой периодических слагаемых исходного гамильтониана возмущенного движения и рассматриваемым резонансным соотношением. Далее считаем, что  $k \le 3$ . Сценарием k+l будем называть случай, когда области неустойчивости проявляются в слагаемых порядков  $\epsilon^k$  и  $\epsilon^l$  ( $l \le k$ ).

*Случай k = 1*. При k = 1 (сценарий 1 + 1) перейдем в малую, порядка  $\varepsilon^{1/2}$ , окрестность начала координат фазового пространства, полагая

$$y_j = \varepsilon^{1/2} Z_j, \quad Y_j = \varepsilon^{1/2} Z_j \quad (j = 1, 2)$$

и введем новую независимую переменную  $\tau_1 = \varepsilon t$ . Тогда гамильтониан (2.17) может быть переписан в виде

$$\tilde{\Gamma}^{(1)} = \Gamma^{(1)} + O(\varepsilon), \quad \Gamma^{(1)} = \Gamma_{21} + \Gamma_{40}$$
 (2.18)

Здесь и далее  $\Gamma_{2l}$  и  $\Gamma_{40}$  — это формы  $K_{2l}$  и  $K_{40}$  из соотношений (2.17), в которых сделана замена  $y_j=z_j, Y_j=Z_j$  (j=1,2). В равенствах (2.18) выражение для  $\Gamma_{21}$  определяется из соотношения (2.7). Приближенный гамильтониан  $\Gamma^{(1)}$  будем называть модельным для отвечающего ему резонансного случая. Слагаемое  $O(\varepsilon)$  в равенствах (2.18) периодично по  $\tau_1$  (с периодом  $T_1=4\pi\varepsilon$ ) и в достаточно малой окрестности начала координат фазового пространства аналитично по переменным  $z_j, Z_j$  (j=1,2).

*Случай k=2.* Если k=2, то при  $\mu_1\neq 0$  исследование также проводится  $\epsilon^{1/2}$ -окрестности начала координат и гамильтониан приводится к виду (2.18), в котором  $\Gamma_{21}$  вычисляется при помощи формул (2.8) для сценария 2+1 или (2.9) для сценария 2+2.

При  $\mu_1 = 0$  нормализованная квадратичная часть в слагаемых первого и второго порядков по  $\epsilon$  определяется формулами (2.10) и (2.11). Перейдем в  $\epsilon$ -окрестность начала координат, полагая

$$y_j = \varepsilon z_j, \quad Y_j = \varepsilon Z_j \quad (j = 1, 2)$$

Если в равенстве (2.10)  $K_{21} \neq 0$  (сценарий 2 + 1), то, вводя новую независимую переменную  $\tau_1$ , получим гамильтониан вида

$$\tilde{\Gamma}^{(2)} = \Gamma^{(21)} + O(\epsilon^2), \quad \Gamma^{(21)} = \Gamma_{21} + \epsilon(\Gamma_{22} + \Gamma_{40})$$
 (2.19)

Если же  $K_{21}=0$  (сценарий 2 + 2), то вводим  $au_2=\epsilon^2 t$  . Тогда имеем

$$\tilde{\Gamma}^{(2)} = \Gamma^{(22)} + O(\varepsilon), \quad \Gamma^{(22)} = \Gamma_{22} + \Gamma_{40}$$
 (2.20)

Модельными для данного случая будут гамильтонианы  $\Gamma^{(1)}$  (при  $\mu_1 \neq 0$ ) и  $\Gamma^{(21)}$  или  $\Gamma^{(22)}$  (при  $\mu_1 = 0$ ). Слагаемые  $O(\epsilon^2)$  и  $O(\epsilon)$  в равенствах (2.19) и (2.20) аналитичны по  $z_j$ ,  $Z_j$  и периодичны по  $\tau_1$  и  $\tau_2$  с периодами  $T_1$  и  $T_2 = 4\pi\epsilon^2$  соответственно.

*Случай k* = 3. При  $\mu_1 \neq 0$  исследуется  $\epsilon^{1/2}$ -окрестность начала координат и модельный гамильтониан  $\Gamma^{(1)}$ , в котором функция  $\Gamma_{21}$  вычисляется с учетом формулы (2.8) для сценария 3 + 1 и формулы (2.9) для сценариев 3 + 2 и 3 + 3.

Если  $\mu_1=0$ , то переходим в  $\epsilon$ -окрестность начала координат. Для сценария 3+1 модельным на этом этапе будет гамильтониан  $\Gamma^{(21)}$ , в котором функции  $\Gamma_{21}$  и  $\Gamma_{22}$  вычисляются с учетом формул (2.10) и (2.11) (при  $\eta_1=\eta_2$ ). Для сценариев 3+2 и 3+3 имеем  $K_{21}=0$ , модельным будет гамильтониан  $\Gamma^{(22)}$ , в котором функция  $\Gamma_{22}$  вычисляется с учетом формулы (2.11) при  $\eta_3=\eta_4$  и  $\eta_1=\eta_2$ ,  $\eta_3=\eta_4$  соответственно.

На этапе третьего приближения по  $\epsilon$  следует перейти в  $\epsilon^{3/2}$ -окрестность начала координат по формулам

$$y_j = \varepsilon^{3/2} z_j, \quad Y_j = \varepsilon^{3/2} Z_j \quad (j = 1, 2)$$

Проводя нормализацию для сценария 3+1 и вводя независимую переменную  $\tau_1$ , получим

$$\tilde{\Gamma}^{(3)} = \Gamma^{(31)} + O(\epsilon^3), \quad \Gamma^{(31)} = \Gamma_{21} + \epsilon \Gamma_{22} + \epsilon^2 (\Gamma_{23} + \Gamma_{40})$$
 (2.21)

Формы  $\Gamma_{21}$ ,  $\Gamma_{22}$ ,  $\Gamma_{23}$  вычисляются с учетом соотношений (2.13) и (2.14).

При выполнении сценария 3+2 после нормализации и введения в качестве независимой переменной  $\tau_2$  имеем

$$\tilde{\Gamma}^{(3)} = \Gamma^{(32)} + O(\epsilon^2), \quad \Gamma^{(32)} = \Gamma_{22} + \epsilon(\Gamma_{23} + \Gamma_{40})$$
 (2.22)

Учтено, что  $K_{21}=0$ , а формы  $\Gamma_{22}$  и  $\Gamma_{23}$  определяются из соотношений (2.15) и (2.14).

Наконец, при условии  $\eta_1 = \eta_2$ ,  $\eta_3 = \eta_4$  (сценарий 3+3) и  $\hat{\mu}_2 \neq \tilde{\mu}_2$  получаем тот же гамильтониан (2.22), в котором следует принять

$$\Gamma_{22} = (\hat{\mu}_2 \gamma_1 - \eta_1)(z_1^2 + Z_1^2)$$
 или  $\Gamma_{22} = (\hat{\mu}_2 \gamma_2 - \eta_3)(z_2^2 + Z_2^2),$  (2.23)

а форма  $\Gamma_{23}$  вычисляется при помощи равенства (2.14).

Если же  $\hat{\mu}_2 = \tilde{\mu}_2$ , то имеем  $\Gamma_{22} = 0$ , и тогда

$$\tilde{\Gamma}^{(3)} = \Gamma^{(33)} + O(\varepsilon), \quad \Gamma^{(33)} = \Gamma_{23} + \Gamma_{40}$$
 (2.24)

Независимой для этого гамильтониана является переменная  $\tau_3 = \epsilon^3 t$ 

Слагаемые  $O(\varepsilon^3)$ ,  $O(\varepsilon^2)$  и  $O(\varepsilon)$  в соотношениях (2.21), (2.22) и (2.24) аналитичны по  $z_i$ ,  $Z_i$  и периодичны по  $\tau$  с периодами  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3 = 4\pi\varepsilon^3$  соответственно.

При рассмотрении соответствующей окрестности резонансной точки модельными для случаев k=3 будут гамильтонианы  $\Gamma^{(1)}$ ,  $\Gamma^{(2i)}$  (i=1 или 2) и  $\Gamma^{(3j)}$  (j=1,2 или 3).

**3.** Резонансные периодические движения системы. Решим вопрос о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении) периодических движений систем с гамильтонианами  $\tilde{\Gamma}^{(k)}$  (k=1,2,3), определяемыми формулами (2.18)—(2.22), (2.24). На первом этапе найдем отличные от тривиального положения равновесия соответствующих им модельных систем.

3.1. Случай k=1. Рассмотрим сначала модельную систему с гамильтонианом  $\Gamma^{(1)}$  (2.18), в котором квадратичная часть вычисляется с помощью формулы (2.7) при  $\beta'\neq 0$ ,  $\beta''\neq 0$  (сценарий 1+1). Приравнивая нулю частные производные  $\Gamma^{(1)}$  по  $z_j$  и  $Z_j$  (j=1,2), получим систему уравнений для определения положений равновесия этой модельной системы

$$[2(\mu_{1}\gamma_{1} - \beta') + c_{20}(z_{1}^{2} + Z_{1}^{2}) + (c_{11}/2)(z_{2}^{2} + Z_{2}^{2})]z_{1} = 0$$

$$[2(\mu_{1}\gamma_{1} + \beta') + c_{20}(z_{1}^{2} + Z_{1}^{2}) + (c_{11}/2)(z_{2}^{2} + Z_{2}^{2})]Z_{1} = 0$$

$$[2(\mu_{1}\gamma_{2} - \beta'') + (c_{11}/2)(z_{1}^{2} + Z_{1}^{2}) + c_{02}(z_{2}^{2} + Z_{2}^{2})]z_{2} = 0$$

$$[2(\mu_{1}\gamma_{2} + \beta'') + (c_{11}/2)(z_{1}^{2} + Z_{1}^{2}) + c_{02}(z_{2}^{2} + Z_{2}^{2})]Z_{2} = 0$$

$$(3.1)$$

Исключим комбинации  $z_2^2 + Z_2^2$  и  $z_1^2 + Z_1^2$  соответственно из первых двух и последних двух уравнений (3.1), в результате получим два уравнения-следствия вида  $z_1Z_1=0$ ,  $z_2Z_2=0$ . Рассматривая их совместно с системой (3.1), определим две группы положений равновесия.

К первой группе относятся четыре пары равновесий, задаваемые сооотношениями

$$z_{2} = Z_{1} = Z_{2} = 0, \quad z_{1}^{2} = -2(\gamma_{1}\mu_{1} - \beta')c_{20}^{-1} \quad (c_{20}(\gamma_{1}\mu_{1} - \beta') < 0)$$

$$z_{1} = z_{2} = Z_{2} = 0, \quad Z_{1}^{2} = -2(\gamma_{1}\mu_{1} + \beta')c_{20}^{-1} \quad (c_{20}(\gamma_{1}\mu_{1} + \beta') < 0)$$

$$z_{1} = Z_{1} = Z_{2} = 0, \quad z_{2}^{2} = -2(\gamma_{2}\mu_{1} - \beta'')c_{02}^{-1} \quad (c_{02}(\gamma_{2}\mu_{1} - \beta'') < 0)$$

$$z_{1} = z_{2} = Z_{1} = 0, \quad Z_{2}^{2} = -2(\gamma_{2}\mu_{1} + \beta'')c_{02}^{-1} \quad (c_{02}(\gamma_{2}\mu_{1} + \beta'') < 0)$$
(3.2)

В скобках здесь и далее в аналогичных соотношениях указаны условия существования решений. Из этих условий следует, что данные положения равновесия появляются (или исчезают), в зависимости от знаков коэффициентов  $c_{20}$  и  $c_{02}$ , при переходе через бифуркационные точки  $\mu_1 = \pm \mu_1'$  и  $\mu_1 = \pm \mu_1''$ .

Вторую группу положений равновесия составляют четверки решений, описываемые соотношениями

$$z_{1} = z_{2} = 0, \quad Z_{1}^{2} = 4(\kappa_{1}\mu_{1} + 2\beta'c_{02} - c_{11}\beta'')\Delta^{-1}, \quad Z_{2}^{2} = -4(\kappa_{2}\mu_{1} + c_{11}\beta' - 2c_{20}\beta'')\Delta^{-1}$$

$$z_{1} = Z_{2} = 0, \quad Z_{1}^{2} = 4(\kappa_{1}\mu_{1} + 2c_{02}\beta' + c_{11}\beta'')\Delta^{-1}, \quad z_{2}^{2} = -4(\kappa_{2}\mu_{1} + c_{11}\beta' + 2c_{20}\beta'')\Delta^{-1}$$

$$Z_{1} = z_{2} = 0, \quad z_{1}^{2} = 4(\kappa_{1}\mu_{1} - 2c_{02}\beta' - c_{11}\beta'')\Delta^{-1}, \quad Z_{2}^{2} = -4(\kappa_{2}\mu_{1} - c_{11}\beta' - 2c_{20}\beta'')\Delta^{-1}$$

$$Z_{1} = Z_{2} = 0, \quad z_{1}^{2} = 4(\kappa_{1}\mu_{1} - 2c_{02}\beta' + c_{11}\beta'')\Delta^{-1}, \quad z_{2}^{2} = -4(\kappa_{2}\mu_{1} - c_{11}\beta' + 2c_{20}\beta'')\Delta^{-1}$$

$$Z_{1} = Z_{2} = 0, \quad z_{1}^{2} = 4(\kappa_{1}\mu_{1} - 2c_{02}\beta' + c_{11}\beta'')\Delta^{-1}, \quad z_{2}^{2} = -4(\kappa_{2}\mu_{1} - c_{11}\beta' + 2c_{20}\beta'')\Delta^{-1}$$

Здесь введены обозначения

$$\kappa_1 = 2\gamma_1 c_{02} - c_{11}\gamma_2, \quad \kappa_2 = c_{11}\gamma_1 - 2c_{20}\gamma_2, \quad \Delta = c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02}$$

Решения (3.3) существуют, если правые части в выражениях с квадратами неотрицательны. Бифуркационными являются восемь точек

$$\mu_1 = (\pm 2c_{02}\beta' \pm c_{11}\beta'')\kappa_1^{-1}, \quad \mu_1 = (\pm c_{11}\beta' \pm 2c_{20}\beta'')\kappa_2^{-1}$$
 (3.4)

Здесь верхние и нижние знаки берутся в любом сочетании.

Рассмотрим вопрос об устойчивости в линейном приближениии найденных решений. Зададим возмущения  $\tilde{z}_j$ ,  $\tilde{Z}_j$  (j=1,2) переменных  $z_j$ ,  $Z_j$  системы относительно их равновесных значений. Для обоих решений из первой пары в равенствах (3.2) квадратичная часть гамильтониана возмущенного движения имеет вид

$$2\beta'\tilde{Z}_{1}^{2}-2(\gamma_{1}\mu_{1}-\beta')\tilde{z}_{1}^{2}-[(\kappa_{2}\mu_{1}-c_{11}\beta'+2c_{20}\beta'')\tilde{z}_{2}^{2}+(\kappa_{2}\mu_{1}-c_{11}\beta'-2c_{20}\beta'')\tilde{Z}_{2}^{2}](2c_{20})^{-1}$$

Отсюда следует, что в области существования данного решения условия устойчивости сводятся к неравенствам

$$c_{20} > 0$$
,  $(\kappa_2 \mu_1 - c_{11} \beta')^2 > 4(c_{20} \beta'')^2$ 

Для решений из второй, третьей и четвертой пар аналогичные условия имеют соответственно вид  $c_{20} < 0$ ,  $(\kappa_2 \mu_1 + c_{11} \beta')^2 > 4(c_{20} \beta'')^2$ ;  $c_{02} > 0$ ,  $(\kappa_1 \mu_1 + c_{11} \beta'')^2 > 4(c_{02} \beta')^2$  и  $c_{02} < 0$ ,  $(\kappa_1 \mu_1 - c_{11} \beta'')^2 > 4(c_{02} \beta')^2$ . Таким образом, характер устойчивости исследуемых равновесных точек определяется расположением величины  $\mu_1$  относительно бифуркационных значений (3.4).

Для решений (3.3) составляем характеристические уравнения соответствующих линеаризованных уравнений возмущенного движения

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0 \tag{3.5}$$

Если выполнены соотношения

$$a > 0, \quad b > 0, \quad d = a^2 - 4b > 0,$$
 (3.6)

то корни уравнения (3.5) чисто мнимые, и исследуемое решение устойчиво в линейном приближении. При изменении знака хотя бы одного неравенства на противоположный уравнение (3.5) имеет корни с положительными вещественными частями, и имеет место неустойчивость.

Рассмотрим первую четверку решений (3.3), существующих при выполнении неравенств

$$\kappa_{1}\Delta(\mu_{1} - \mu_{11}) > 0, \quad \kappa_{2}\Delta(\mu_{1} - \mu_{12}) < 0$$

$$\mu_{11} = \kappa_{1}^{-1}(c_{11}\beta'' - 2c_{02}\beta'), \quad \mu_{12} = \kappa_{2}^{-1}(2c_{20}\beta'' - c_{11}\beta')$$
(3.7)

Коэффициенты уравнения (3.5) для каждого из этих решений таковы:

$$a = -32\delta\Delta^{-1}(\mu_1 - \mu_{10}), \quad b = 256\beta'\beta''\kappa_1\kappa_2\Delta^{-1}(\mu_1 - \mu_{11})(\mu_1 - \mu_{12})$$

$$\mu_{10} = \delta^{-1} [c_{11}(c_{02} + c_{20})\beta'\beta'' - 2c_{02}c_{20}(\beta'^2 + \beta''^2)], \quad \delta = c_{20}\beta'\kappa_1 - c_{02}\beta''\kappa_2$$

Отсюда находим, что в области существования первые два неравенства (3.6) сводятся к системе

$$\delta(\mu_1 - \mu_{10}) > 0, \quad \Delta < 0$$
 (3.8)

Таким образом, при  $\Delta > 0$  данные равновесия всегда неустойчивы.

Пусть  $\Delta < 0$ . Величина d из третьего условия (3.6) представляет собой квадратный относительно  $\mu_1$  трехчлен с положительным старшим коэффициентом

$$d_2 = 1024\Delta^{-2} \left[c_{20}^2 \beta^2 \kappa_1^2 + (2c_{20}c_{02} - c_{11}^2)\beta^2 \kappa_1 \kappa_2 + c_{02}^2 \beta^2 \kappa_2^2\right]$$
(3.9)

и отрицательным дискриминантом, равным  $s\Delta^{-1}\beta'^2\beta''^2c_{11}^2f^2$ , где s>0 и  $f=\gamma_1\beta''-\gamma_2\beta'$ . Следовательно, для рассматриваемых решений неравенство d>0 всегда удовлетворяется.

Рассматривая систему неравенств (3.7), (3.8), находим, что если  $\kappa_1\kappa_2>0$  и  $c_{20}f<0$ , то ее решение задается интервалом  $\min(\mu_{11},\mu_{12})<\mu_1<\max(\mu_{11},\mu_{12})$ . Если  $\kappa_1\kappa_2<0$  и  $c_{20}<0$ , то при  $\delta<0$  имеем  $\mu_1<\min(\mu_{11},\mu_{12})$ , а при  $\delta>0$  получаем  $\mu_1>\max(\mu_{11},\mu_{12})$ . Для невыписанных значений параметров из области существования имеем неустойчивость.

Вторая четверка равновесий (3.3) существует при выполнении условий (3.7), в которых величину  $\beta$ " следует взять с противоположным знаком. Аналогично предыдущему заключаем, что в области существования неравенство b>0 удовлетворяется при условии  $\Delta>0$ ; при  $\Delta<0$  имеем неустойчивость.

В случае  $\Delta > 0$  дискриминант квадратного относительно  $\mu_l$  трехчлена d из третьего условия (3.6), равный  $s\Delta^{-1}\beta'^2\beta''^2c_{11}^2f_l^2$  ( $f_1 = \gamma_l\beta'' + \gamma_2\beta'$ ), положителен, и d имеет два вещественных корня, обозначим их через  $\mu_{l*}$  и  $\mu_{l**}$  ( $\mu_{l*} < \mu_{l**}$ ). При этом старший коэффициент трехчлена d, вычисляемый по формуле (3.9) при замене  $\beta''$  на  $-\beta''$ , может быть как положительным, так и отрицательным.

Если  $\kappa_1 \kappa_2 > 0$ , то всегда  $d_2 > 0$ , и в случае  $c_{20}c_{02} < 0$  условия устойчивости удовлетворяются для значений  $\mu_1$  из двух интервалов

$$\min(\mu_{11}, \mu_{12}) < \mu_1 < \mu_{1*}, \quad \mu_{1**} < \mu_1 < \max(\mu_{11}, \mu_{12})$$
 (3.10)

В случае же  $c_{20}c_{02} > 0$  условия устойчивости при  $\delta_1 > 0$  и  $\delta_1 < 0$  задаются первым и вторым неравенством (3.10) соответственно.

Исследование устойчивости при  $\kappa_1\kappa_2<0$  несколько сложнее. Приведем его результаты для случая  $\kappa_1>0$ ,  $\kappa_2<0$  (случай  $\kappa_1<0$ ,  $\kappa_2>0$  рассматривается аналогично). Выражение в квадратных скобках в равенстве (3.9) при замене  $\beta$ " на  $-\beta$ " можно переписать, выделив в нем квадратный трехчлен относительно величины  $x=\beta'\kappa_1/(\beta''\kappa_2)$ , где x<0. Его дискриминант, равный  $c_{11}^2\Delta$ , положителен, поэтому квадратный трехчлен имеет два вещественных (отрицательных) корня, обозначим из через  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_1< x_2$ ). При  $x< x_1$  и  $x> x_2$  справедливо неравенство  $d_2>0$ , а при  $x_1< x< x_2$  имеем  $d_2<0$ .

Пусть сначала  $d_2 > 0$ . Если  $c_{20} > 0$ ,  $c_{02} > 0$ , то в случаях  $\delta_1 > 0$  и  $\delta_1 < 0$  условия устойчивости приводятся к неравенствам

$$\max(\mu_{11}, \mu_{12}) < \mu_1 < \mu_{1*} \quad \text{if} \quad \mu_1 > \max(\mu_{11}, \mu_{12})$$
 (3.11)

соответственно. Если  $c_{20} < 0$ ,  $c_{02} < 0$ , то получаем

$$\mu_1 > \mu_{1**}$$
 (3.12)

Если же  $c_{20} < 0$ ,  $c_{02} > 0$ , то в случае  $f_1 > 0$  на левой ( $x < x_1$ ) ветви положительных значений  $d_2$  условие устойчивости определяется объединением первого неравенства из (3.11) и неравенства (3.12), а на правой ( $x > x_2$ ) ветви — вторым неравенством (3.11). При  $f_1 < 0$  условия устойчивости на левой и правой ветвях меняются местами.

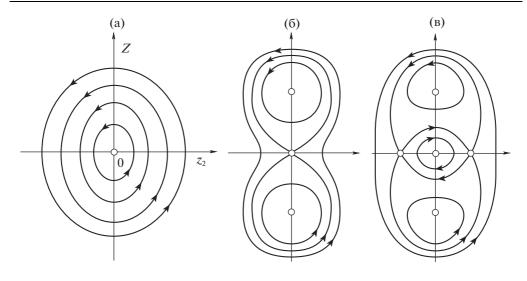
В случае  $d_2 < 0$  исследуемые решения устойчивы, если  $c_{02} > 0$  и выполнено неравенство

$$\max(\mu_{11}, \mu_{12}) < \mu_1 < \mu_{1**}$$

Для третьей четверки решений (3.3) из условия b>0 имеем в области существования  $\Delta>0$ , а для четвертой  $\Delta<0$ ; проверка других условий устойчивости проводится так же, как для второй и первой четверок решений соответственно.

- 3.2. Случай k=2. Рассмотрим два сценария, возможных в случае k=2.
- 3.2.1. Сценарий 2+1. В случае  $\beta'=0$ ,  $\beta''\neq 0$  реализуется сценарий 2+1; картина устойчивости имеет вид, представленный на фиг. 1б.

*Первое приближение*. В модельной системе с гамильтонианом  $\Gamma^{(1)}$ , в котором квадратичная часть определяется формулой (2.8) при  $\mu_1 \neq 0$ , в  $\epsilon^{1/2}$ -окрестности резонанс-



Фиг. 2

ной точки происходит перестройка фазового пространства (по сравнению со случаем, рассмотренным в разд. 3.1). В системе появляется первый интеграл  $z_1^2 + Z_1^2 = 2c =$  = const. Приведенной системе с одной степенью свободы отвечает гамильтониан вида

$$h = \left(\mu_1 \gamma_2 - \beta'' + \frac{1}{2} c_{11} c\right) z_2^2 + \left(\mu_1 \gamma_2 + \beta'' + \frac{1}{2} c_{11} c\right) Z_2^2 + \frac{1}{4} c_{02} (z_2^2 + Z_2^2)^2$$
(3.13)

Тривиальное положение равновесия этой системы устойчиво при выполнении условия

$$(2\mu_1\gamma_2 + c_{11}c)^2 > 4\beta''^2$$

и неустойчиво в противном случае. Точки бифуркации задаются соотношениями

$$\mu_1 = \mu_1^{\pm} = (\pm 2\beta'' - c_{11}c)(2\gamma_2)^{-1}$$

Другие положения равновесия системы с гамильтонианом (3.13) определяются формулами

$$z_2 = 0, \quad Z_2^2 = -2\gamma_2(\mu_1 - \mu_1^-)c_{02}^{-1} \quad (c_{02}\gamma_2(\mu_1 - \mu_1^-) < 0)$$
 (3.14)

$$Z_2 = 0, \quad z_2^2 = -2\gamma_2(\mu_1 - \mu_1^+)c_{02}^{-1} \quad (c_{02}\gamma_2(\mu_1 - \mu_1^+) < 0)$$
 (3.15)

В области существования равновесия (3.14) устойчивы в линейном приближении, если  $\beta$ " $c_{02} < 0$ , и неустойчивы, если  $\beta$ " $c_{02} > 0$ . Для равновесий (3.15) эти условия устойчивости и неустойчивости меняются местами.

Фазовые портреты системы с гамильтонианом (3.13) показаны на фиг. 2a—2в для случаев

$$\mu_1 < \mu_1^-, \quad \mu_1^- < \mu_1 < \mu_1^+, \quad \mu_1 > \mu_1^+$$

соответственно и в предположении, что  $\gamma_2>0,\ c_{02}>0$ . Для других вариантов знаков величин  $\gamma_1$  и  $c_{02}$  картина качественно та же (в некоторых случаях направления движения по траекториям меняются на противоположные или оси координат меняются ме-

стами). Приведенные фазовые портреты характерны для модельных систем с одной степенью свободы в случае параметрического резонанса [3].

Вернемся к модельной системе с двумя степенямии свободы с гамильтонианом  $\Gamma^{(1)}$ . Ее положениями равновесия будут точки

$$z_1 = z_2 = Z_1 = 0, \quad Z_2^2 = -2(\mu_1 \gamma_2 + \beta'')c_{02}^{-1} \quad (c_{02}(\mu_1 \gamma_2 + \beta'') < 0)$$
 (3.16)

$$z_1 = Z_1 = Z_2 = 0, \quad z_2^2 = -2(\mu_1 \gamma_2 - \beta'')c_{02}^{-1} \quad (c_{02}(\mu_1 \gamma_2 - \beta'') < 0),$$
 (3.17)

соответствующие решениям (3.14) и (3.15) при c=0.

Квадратичная часть гамильтониана возмущенного движения для решений (3.16) имеет вид

$$(\kappa_1 \mu_1 - c_{11} \beta'') (2c_{02})^{-1} (\tilde{z}_1^2 + \tilde{Z}_1^2) - 2\beta'' \tilde{z}_2^2 - 2(\mu_1 \gamma_2 + \beta'') \tilde{Z}_2^2,$$

откуда следует, что при  $\mu_1 \neq c_{11}\beta''\kappa_1^{-1}$  условия устойчивости (в линейном приближении) и неустойчивости совпадают с теми же условиями для решения (3.14). Аналогично, при  $\mu_1 \neq -c_{11}\beta''\kappa_1^{-1}$  совпадают условия устойчивости (в линейном приближении) и неустойчивости решений (3.17) и (3.15).

Для значений  $\mu_1 = c_{11}\beta''\kappa_1^{-1}$  и  $\mu_1 = -c_{11}\beta''\kappa_1^{-1}$  (если они находятся в области существования) равновесия (3.16) и (3.17) соответственно являются сложными особыми точками

Кроме изолированных положений равновесия, в модельной системе с гамильтонианом  $\Gamma^{(1)}$  могут существовать семейства положений равновесия. Так, при выполнении условия  $\mu_1 \gamma_1 c_{20} < 0$  в системе имеется семейство неустойчивых положений равновесия (сложных особых точек), образующих в плоскости переменных  $z_1$ ,  $Z_1$  окружность вида

$$z_1^2 + Z_1^2 = -2\mu_1 \gamma_1 c_{20}^{-1}, \quad z_2 = Z_2 = 0$$

Еще две пары симметричных семейств (окружностей) из неустойчивых сложных особых точек, задаваемых соотношениями

$$z_1^2 + Z_1^2 = 4(\kappa_1 \mu_1 - c_{11} \beta'') \Delta^{-1}, \quad z_2 = 0$$
  

$$Z_2^2 = -4(\kappa_2 \mu_1 - 2c_{20} \beta'') \Delta^{-1} \quad (\beta'' \leftrightarrow -\beta'', z_2 \leftrightarrow Z_2)$$

существуют, если дроби, стоящие в правых частях этих соотношений, неотрицательны. При  $\mu_1 = c_{11}\beta$ " $\kappa_1^{-1}$  семейства первой пары, а при  $\mu_1 = -c_{11}\beta$ " $\kappa_1^{-1}$  семейства второй пары (при условии их существования) стягиваются в точки (3.16) и (3.17) соответственно.

Второе приближение. При  $\mu_1 = 0$  переходим в  $\epsilon$ -окрестность тривиального равновесия и рассматриваем модельную систему с гамильтонианом  $\Gamma^{(21)}$ , квадратичная часть которой вычисляется при помощи выражений (2.10) и (2.11). Положения равновесия модельной системы таковы:

$$z_1 = z_2 = Z_2 = 0, Z_1^2 = -2(\mu_2 \gamma_1 - \eta_2) c_{20}^{-1}$$

$$(c_{20}(\mu_2 \gamma_1 - \eta_2) < 0) (z_1 \leftrightarrow Z_1, \eta_1 \leftrightarrow \eta_2)$$
(3.18)

Квадратичная часть гамильтониана возмущенного движения имеет вид

$$-\varepsilon(\eta_1 - \eta_2)\tilde{z}_1^2 - 2\varepsilon(\mu_2\gamma_1 - \eta_2)\tilde{Z}_1^2 - (\beta'' + O(\varepsilon))\tilde{z}_2^2 + (\beta'' + O(\varepsilon))\tilde{Z}_2^2$$

$$(\tilde{z}_1 \leftrightarrow \tilde{Z}_1, \, \eta_1 \leftrightarrow \eta_2)$$
(3.19)

Таким образом, при достаточно малых значениях є данные равновесия неустойчивы в области существования.

Объединяя результаты исследования модельных систем первого и второго приближений и исключая отмеченные случаи сложных особых точек, приходим к следующему выводу. Внутри большей области неустойчивости (см. фиг. 16) существует, в зависимости от знаков величин  $\gamma_2$  и  $c_{02}$ , одна из пар устойчивых в линейном приближении положений равновесия (3.16) или (3.17). Вне этой зоны неустойчивости по одну сторону существует та же пара равновесий, оставаясь устойчивой, и другая, неустойчивая, пара равновесий; по другую сторону в модельной системе отсутствуют положения равновесия, отличные от тривиального. Исключение составляет внутренняя зона неустойчивости и ее малая, ширины  $O(\varepsilon^2)$ , окрестность. В этой окрестности, аналогично, существуют, по одну сторону от зоны неустойчивости, две пары равновесий (3.18), по другую сторону — ни одной, а внутри самой зоны — одна из этих пар, и все эти равновесия неустойчивы.

3.2.2. Сценарий 2+2. В этом случае  $\beta' = \beta'' = 0$ . При  $\mu_1 \neq 0$  модельная система с гамильтонианом  $\Gamma^{(1)}$ , вычисляемым с учетом выражения (2.9) для квадратичной части, не имеет положений равновесия, отличных от тривиального. Переходя при  $\mu_1 = 0$  в вокрестность тривиального равновесия, получим систему с модельным гамильтонианом  $\Gamma^{(22)}$  (второе равенство (2.20)), квадратичная часть которого определена равенством (2.11). По своей структуре гамильтониан  $\Gamma^{(22)}$  аналогичен модельному гамильтониану  $\Gamma^{(1)}$  (с квадратичной частью (2.7)), исследование которого проведено в разд. 3.1.

3.3. Случай k = 3. 3.3.1. Сценарий 3+1. При реализации сценария 3+1 взаимное расположение областей неустойчивости аналогично показанному на фиг. 16, только внутренняя область неустойчивости имеет ширину  $O(\varepsilon^3)$ .

При  $\mu_1 \neq 0$  для квадратичной части модельного гамильтониана  $\Gamma^{(1)}$  первого приближения используется выражение (2.8), и имеем случай, рассмотренный в разд. 3.2.1.

На этапе *второго приближения* (случай  $\mu_1=0$ ) исследуется модельный гамильтониан  $\Gamma^{(21)}$  из (2.19), в котором формы  $\Gamma_{21}$  и  $\Gamma_{22}$  вычисляются с помощью соотношений (2.10) и (2.11) при  $\eta_1=\eta_2$ . В модельной системе имеется первый интеграл  $z_1^2+Z_1^2=2c=$  const. Кроме тривиального равновесия, в области  $c_{20}(\mu_2\gamma_1-\eta_1)<0$  существуют два семейства неустойчивых сложных особых точек, для которых

$$z_1^2 + Z_1^2 = -2(\mu_2 \gamma_1 - \eta_1)c_{20}^{-1}, \quad z_2 = Z_2 = 0$$

Других положений равновесия нет.

Модельный гамильтониан  $\Gamma^{(31)}$  *третьего приближения* определен вторым равенством (2.21), а положения равновесия отвечающей ему модельной системы таковы:

$$z_2 = Z_2 = Z_1 = 0$$
,  $z_1^2 = -2(\mu_3 \gamma_1 - \xi_1)c_{20}^{-1}$   $(c_{20}(\mu_3 \gamma_1 - \xi_1) < 0)$   $(z_1 \leftrightarrow Z_1, \xi_1 \leftrightarrow \xi_2)$ 

Как и в описанных выше аналогичных случаях, во внутренней зоне неустойчивости тривиального равновесия существует одна пара положений равновесия, вне ее по одну сторону имеются две пары равновесий, а по другую сторону ни одной. Найденные положения равновесия, находясь в зоне неустойчивости тривиального равновесия системы, неустойчивы в области своего существования. Квадратичная часть гамильтониана возмущенного движения имеет вид

$$\epsilon^2[(\xi_1-\xi_2)\tilde{Z}_1^2-2(\mu_3\gamma_1-\xi_1)\tilde{z}_1^2]-(\beta''+{\it O}(\epsilon))\tilde{z}_2^2+(\beta''+{\it O}(\epsilon))\tilde{Z}_2^2 \quad (\tilde{z}_1\leftrightarrow\tilde{Z}_1,\,\xi_1\leftrightarrow\xi_2)$$

3.3.2. Сценарий 3+2. При  $\mu_1 \neq 0$  квадратичная часть *первого приближения* имеет вид (2.9); в модельной системе с гамильтонаном  $\Gamma^{(1)}$  нет положений равновесия, отличных от тривиального.

В модельном гамильтониане второго приближения (случай  $\mu_1=0$ ) имеем  $\Gamma_{21}=0$ . Форма  $\Gamma_{22}$  определяется соотношением (2.11), в котором  $\eta_1=\eta_2$  или  $\eta_3=\eta_4$ , и с точностью до обозначений совпадает с формой (2.8); соответствующее ей исследование проведено в разд. 3.2.1. Изолированными положениями равновесия в случае, например,  $\eta_3=\eta_4$  будут точки

$$z_1 = 0, \quad Z_1^2 = -(2\mu_2\gamma_1 - 2\eta_2)c_{20}^{-1} \quad (c_{20}(\mu_2\gamma_1 - \eta_2) < 0),$$
 (3.20)

устойчивые в линейном приближении в области существования при условии  $c_{20}(\eta_2 - \eta_1) > 0$  (за исключением случая сложной особой точки при  $\mu_2 = (\eta_2 c_{11} - 2\eta_4 c_{20}) \kappa_2^{-1}$ , если это значение  $\mu_2$  попадает в область существования равновесий) и неустойчивые при  $c_{20}(\eta_2 - \eta_1) < 0$ .

Кроме того, существуют еще два положения равновесия, соответствующие точкам (3.20) при замене  $\tilde{z}_1 \leftrightarrow Z_1$ ,  $\eta_1 \leftrightarrow \eta_2$ , устойчивые в линейном приближении в области существования, если  $c_{20}(\eta_2 - \eta_1) < 0$  (кроме, может быть, точки  $\mu_2 = (\eta_1 c_{11} - 2\eta_4 c_{20})\kappa_2^{-1}$ ), и неустойчивые, при  $c_{20}(\eta_2 - \eta_1) > 0$ .

При  $\mu_2 = \hat{\mu}_2$  рассматриваем модельный гамильтониан  $\Gamma^{(32)}$  третьего приближения (второе равенство (2.22)) с квадратичными формами согласно равенствам (2.15) и (2.14). В модельной системе имеются положения равновесия вида

$$z_1 = Z_1 = Z_2 = 0,$$
  $z_2^2 = -2\gamma_2(\mu_3 - \mu_3)c_{02}^{-1}$   
 $(c_{02}(\mu_3 - \mu_3) < 0)$   $(z_2 \leftrightarrow Z_2, \mu_3' \leftrightarrow \mu_3')$ 

Квадратичная часть гамильтонианов возмущенного движения задается выражением

$$\begin{split} (\hat{\mu}_2\gamma_1 - \eta_1 + O(\epsilon))\tilde{z}_1^2 + (\hat{\mu}_2\gamma_1 - \eta_2 + O(\epsilon))\tilde{Z}_1^2 + \epsilon(\xi_3 - \xi_4)\tilde{z}_2^2 - 2\epsilon\tilde{Z}_2^2(\mu_3\gamma_2 - \xi_3) \\ (\tilde{z}_2 \leftrightarrow \tilde{Z}_2, \, \xi_3 \leftrightarrow \xi_4) \end{split}$$

Отсюда следует, что если значение  $\mu_2 = \hat{\mu}_2$  находится в зоне неустойчивости тривиального равновесия (см. фиг. 1в), то в области существования эти положения равновесия неустойчивы. В случае двух непересекающихся областей параметрического резонанса (как на фиг. 1г) первая пара равновесных точек устойчива в области существования при  $c_{02}(\xi_3 - \xi_4) > 0$ , а вторая — при  $c_{02}(\xi_3 - \xi_4) < 0$ .

Таким образом, в рассматриваемом случае отличные от тривиального равновесия системы могут существовать в  $\varepsilon^2$ -окрестности резонансной точки при  $\mu_1 = 0$ . В случае, относящемся к фиг. 1в, описание положений равновесия и характера их устойчивостии аналогично сделанному в разд. 3.2.1 описанию, относящемуся к фиг. 1б. Для случая (фиг. 1г) двух непересекающихся областей параметрического резонанса (ширины порядка  $O(\varepsilon^2)$  и  $O(\varepsilon^3)$ ) вблизи каждой из них существуют либо две пары равновесных точек (одна устойчивая в линейном приближении и одна неустойчивая), либо ни одной, а в самой области — одна (устойчивая) пара.

3.3.3. Сценарий 3+3. На этапах первого и второго приближений в соответствующих модельных системах нет положений равновесия, отличных от тривиального. При рассмотрении третьего приближения в случае  $\hat{\mu}_2 \neq \hat{\mu}_2$  имеем модельный гамильтониан  $\Gamma^{(32)}$  (второе равенство (2.22)), вычисляемый с учетом соотношений (2.23) и (2.14), и

| <b>Таблица 1</b> k | Сценарий | Приближения |    |       |
|--------------------|----------|-------------|----|-------|
|                    |          | 1           | 2  | 3     |
| 1                  | 1 + 1    | 24          | _  | _     |
| 2                  | 2 + 1    | 4           | 4  | _     |
|                    | 2 + 2    | 0           | 24 | _     |
| 3                  | 3 + 1    | 4           | 0  | 4     |
|                    | 3 + 2    | 0           | 4  | 4     |
|                    | 3 + 3    | 0           | 0  | 4 + 4 |
|                    |          | 0           | 0  | 24    |

два значения  $\mu_2=\hat{\mu}_2$  и  $\mu_2=\tilde{\mu}_2$ , для которых в третьем приближении строятся две непересекающиеся области параметрического резонанса. Описание результатов аналогично предыдущему описанию, относящемуся к фиг. 1г.

Если  $\hat{\mu}_2 = \tilde{\mu}_2$ , то для обеих областей параметрического резонанса имеем  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ , значения  $\mu_3$  на граничных кривых определяются при помощи соотношения (2.14) для формы  $K_{23}$ . Модельным будет гамильтониан  $\Gamma^{(33)}$  (второе равенство (2.24)), аналогичный по структуре гамильтониану  $\Gamma^{(1)}$ , равновесные точки которого описаны в разд. 3.1.

В таблице 1 представлена сводка результатов исследования отличных от тривиального изолированных положений равновесия рассмотренных модельных систем. Указано максимальное число равновесных точек для каждого сценария и соответствующих ему приближений.

Для сценариев k+k в случаях, когда различия в уравнениях всех четырех границ областей неустойчивости выявляются в слагаемых порядка k, в модельной системе имеется до 24 положений равновесия, при этом существует большое число вариантов их взаимного расположения и характера их устойчивости (см. разд. 3.1). Для сценариев k+l (l < k), а также первого варианта сценария 3+3 внутри каждой области неустойчивости и вблизи нее существуют от нуля до двух пар положений равновесия. Если при этом одна из областей лежит внутри другой, то все положения равновесия, относящиеся к внутренней области, неустойчивы. Для внешней области имеем внутри одну устойчивую равновесную пару, а вне ее по одну из сторон от нее устойчивую и неустойчивую пары; этот же вывод относится к каждой из двух непересекающихся областей для первого варианта сценария 3+3.

3.4. Периодические движения системы и их устойчивость. Вернемся к исследованию полных систем с гамильтонианами (2.18)—(2.22). В окрестности каждого положения равновесия  $z_j = z_{j^*}, Z_j = Z_{j^*}$  (j=1,2) (исключим из рассмотрения равновесия, являющиеся сложными особыми точками) соответствующих модельных систем полные системы являются квазилинейными с возмущениями  $O(\varepsilon)$  (для случаев (2.18), (2.20) и (2.24)),  $O(\varepsilon^2)$  (для случаев (2.19) и (2.22)) или  $O(\varepsilon^2)$  (для случая (2.21)). Корни характеристических уравнений линеаризованных, в окрестности рассматриваемых положений равновесия, уравнений возмущенного движения либо O(1) (для  $\Gamma^{(1)}$ ,  $\Gamma^{(22)}$  и  $\Gamma^{(33)}$ ), либо O(1) и  $O(\varepsilon)$  (для  $\Gamma^{(21)}$  и  $\Gamma^{(32)}$ ), либо O(1) и  $O(\varepsilon)$  (для  $\Gamma^{(31)}$ ). Возмущения же имеют по соответствующим независимым переменным периоды  $T_1$  (для случаев (2.18), (2.19) и (2.21)),  $T_2$  (для случаев (2.20) и (2.22)) или  $T_3$  (для случая (2.24)), где  $T_k = 4\pi\varepsilon^k$ , k=1,2,3.

Во всех случаях имеет место нерезонансный случай теории периодических движений Пуанкаре [13], и из каждого положения равновесия модельной системы рождается единственное,  $T_k$ -периодическое по  $\tau_k$ , периодическое решение полной системы, представляемое сходящимся рядом по целым степеням  $\varepsilon$  и имеющее вид

$$z_i(t) = z_{i^*} + O(\varepsilon^{\ell}), \quad Z_i(t) = Z_{i^*} + O(\varepsilon^{\ell}) \quad (j = 1, 2),$$

где  $\ell$  — порядок возмущений в полном гамильтониане.

Производя в обратной последовательности замены переменных, описанные в разд. 2, получим единственное резонансное периодическое (с периодом  $4\pi$ ) движение исходной системы. При этом, если порождающими для данного движения являются положения равновесия системы с гамильтонианом  $\Gamma^{(1)}$  или с гамильтонианами  $\Gamma^{(21)}$ ,  $\Gamma^{(22)}$ , то получаемое движение аналитично по  $\epsilon^{1/2}$  или  $\epsilon$  соответственно. Если порождающим является положение равновесия системы, определяемой одним из гамильтонианов  $\Gamma^{(31)}$ ,  $\Gamma^{(32)}$ ,  $\Gamma^{(33)}$ , то в исходных переменных резонансное периодическое движение представляется в виде

$$q_i(t) = \varepsilon^{3/2} \tilde{q}_i(t, \varepsilon), \quad p_i(t) = \varepsilon^{3/2} \tilde{p}_i(t, \varepsilon) \quad (j = 1, 2),$$

в котором функции  $\tilde{q}_i(t,\varepsilon)$  и  $\tilde{p}_i(t,\varepsilon)$  аналитичны по  $\varepsilon$ .

Периодические движения, рождающиеся из устойчивых в линейном приближении или неустойчивых положений равновесия модельных систем, также устойчивы в линейном приближении или неустойчивы. Это следует из непрерывности по малому параметру соответствующих характеристических показателей линеаризованных уравнений возмущенного движения.

**4.** Резонансные периодические движения спутника на слабоэллиптической орбите в окрестности цилиндрической прецессии. Рассмотрим движение динамически симметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Орбиту центра масс спутника предполагаем слабоэллиптической с эксцентриситетом e (0 < e < 1). Пусть  $\omega_0$  — среднее движение центра масс спутника по орбите, r — проекция вектора угловой скорости тела в орбитальной системе координат на ось динамической симметрии ( $r = r_0 = \text{const}$ ), A и C — его экваториальный и осевой моменты инерции. Ориентацию системы главных центральных осей инерции спутника в орбитальной системе координат определим при помощи углов Эйлера  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ .

Движение динамически симметричного спутника относительно центра масс на эллиптической орбите произвольного эксцентриситета описывается каноническими дифференциальными уравнениями с функцией Гамильтона [11]

$$H = \frac{p_{\psi}^{2}}{2(1 + e\cos v)^{2}\sin^{2}\theta} + \frac{p_{\theta}^{2}}{2(1 + e\cos v)^{2}} - \frac{\cos\psi\cos\theta}{\sin\theta}p_{\psi} - \frac{\alpha\beta(1 - e^{2})^{3/2}p_{\psi}\cos\theta}{(1 + e\cos v)^{2}\sin^{2}\theta} - p_{\theta}\sin\psi + \frac{\alpha\beta(1 - e^{2})^{3/2}\cos\psi}{\sin\theta} + \frac{\alpha^{2}\beta^{2}(1 - e^{2})^{3}\cos^{2}\theta}{2(1 + e\cos v)^{2}\sin^{2}\theta} + \frac{3}{2}(\alpha - 1)(1 + e\cos v)\cos^{2}\theta$$

$$(4.1)$$

Здесь v — истинная аномалия, принимаемая за независимую переменную, а безразмерные параметры  $\alpha$  и  $\beta$  вычисляются по формулам  $\alpha = C/A$  ( $0 \le \alpha \le 2$ ) и  $\beta = r_0/\omega_0$ .

Система уравнений движения спутника допускает частное решение

$$\psi = \pi$$
,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $p_{\psi} = 0$ ,  $p_{\theta} = 0$ ,

соответствующее стационарному вращению — цилиндрической прецессии, для которой спутник равномерно вращается вокруг оси динамической симметрии, расположенной перпендикулярно плоскости орбиты. Вводя в функцию (4.1) возмущения по формулам

$$\psi = \pi + q_2, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + q_1, \quad p_{\psi} = p_2, \quad p_{\theta} = p_1$$

и рассматривая эксцентриситет e как малый параметр, можно получить гамильтониан возмущенного движения, представляемый в виде (2.1), где  $\varepsilon$  надо заменить на e, а

$$\begin{split} H_{20} &= \frac{1}{2} p_1^2 + \frac{1}{2} p_2^2 + \left(\frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 - \frac{1}{2} \alpha \beta + \frac{3}{2} \alpha - \frac{3}{2}\right) q_1^2 + (\alpha \beta - 1) q_1 p_2 + q_2 p_1 + \frac{1}{2} \alpha \beta q_2^2 \\ &\quad H_{21} = \left[\left(\frac{3}{2} (\alpha - 1) - \alpha^2 \beta^2\right) q_1^2 - (p_1^2 + p_2^2) - 2 \alpha \beta q_1 p_2\right] \cos \nu \\ &\quad H_{22} &= \frac{3}{2} (p_1^2 + p_2^2) \cos^2 \nu - \frac{3}{4} \alpha \beta q_2^2 + \frac{3}{2} \alpha \beta p_2 q_1 \cos 2\nu + \frac{3}{4} \alpha \beta (1 - 2 \alpha \beta \sin^2 \nu) q_1^2 \\ &\quad H_{23} &= \alpha^2 \beta^2 \cos \nu (3 - 2 \cos^2 \nu) q_1^2 - 2 \cos^3 \nu (p_1^2 + p_2^2) + \alpha \beta \cos \nu (3 - 4 \cos^2 \nu) q_1 p_2 \\ &\quad H_{40} &= \left(-\frac{5}{24} \alpha \beta + \frac{1}{3} \alpha^2 \beta^2 - \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2}\right) q_1^4 + \left(\frac{5}{6} \alpha \beta - \frac{1}{3}\right) p_2 q_1^3 + \\ &\quad + \frac{1}{2} p_2^2 q_1^2 + \frac{1}{4} \alpha \beta q_1^2 q_2^2 + \frac{1}{2} p_2 q_1 q_2^2 - \frac{1}{24} \alpha \beta q_2^4 - \frac{1}{6} p_1 q_2^3 \end{split}$$

В невозмущенной (e=0) задаче, отвечающей круговой орбите центра масс спутника, в плоскости параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  имеются три точки

точка 
$$P_1$$
:  $\alpha = \frac{3}{4}$ ,  $\beta = \frac{8}{3}$   $\left(\omega_1 = 1, \omega_2 = \frac{1}{2}\right)$   
точка  $P_2$ :  $\alpha = \frac{17}{12}$ ,  $\beta = \frac{24}{17}$   $\left(\omega_1 = \frac{3}{2}, \omega_2 = 1\right)$  (4.2)  
точка  $P_3$ :  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \frac{3}{2}$   $\left(\omega_1 = 1, \omega_2 = \frac{1}{2}\right)$ ,

в которых реализуются рассматриваемые здесь резонансные случаи.

Ранее [8] в окрестности этих точек при малых значениях e построены области параметрического резонанса. Опираясь на теоретические результаты, полученные в предыдущих разделах данной работы, опишем резонансные периодические движения оси симметрии спутника для значений параметров, лежащих в малых окрестностях точек (4.2).

4.1. Точка  $P_1$ . Рассмотрим окрестность точки  $P_1$ , полагая

$$\alpha = \frac{3}{4}$$
,  $\beta = \frac{8}{3} + e\mu_1 + e^2\mu_2 + ...$ 

Первое приближение. Проведем нормализацию гамильтониана возмущенного движения в слагаемых второй и четвертой степеней относительно возмущений. Нормализованные при e=0 слагаемые четвертой степени представляются в виде

$$H_{40} = \frac{1}{32}(y_1^2 + Y_1^2)^2 + \frac{1}{4}(y_1^2 + Y_1^2)(y_2^2 + Y_2^2) + \frac{5}{16}(y_2^2 + Y_2^2)^2, \tag{4.3}$$

а квадратичная часть гамильтониана в слагаемых первого порядка по e определяется выражением

$$K_{21} = \frac{3}{16}\mu_1(y_1^2 + Y_1^2) + \left(\frac{3}{8}\mu_1 - \frac{9}{16}\right)y_2^2 + \left(\frac{3}{8}\mu_1 + \frac{9}{16}\right)Y_2^2$$
(4.4)

Отсюда находим точки бифуркации  $\mu_1 = \pm 3/2$ , задающие границы внешней области параметрического резонанса, и точку  $\mu_1 = 0$ , вблизи которой далее определится внутренняя область неустойчивости (фиг. 1б).

При помощи формул (4.3) и (4.4) приведем гамильтониан к виду (2.18). В соответствующей модельной системе с гамильтонианом  $\Gamma^{(1)}$  (см. разд. 3.2.1) при  $\mu_1 < 0$  имеется семейство неустойчивых сложных особых точек вида  $z_2 = Z_2 = 0$ ,  $z_1^2 + Z_1^2 = -3\mu_1$ , а на интервале  $-6 < \mu_1 < -3/2$  еще два семейства вида

$$z_2^2 = -(2\mu_1 + 3)/2$$
,  $Z_2 = 0$ ,  $z_1^2 + Z_1^2 = \mu_1 + 6$ 

Изолированными положениями равновесия системы являются точки

$$Z_1 = Z_2 = z_1 = 0, \quad z_2^2 = -\frac{3}{5}\mu_1 + \frac{9}{10} \quad \left(\mu_1 < \frac{3}{2}\right),$$
 (4.5)

устойчивые в линейном приближении в области существования (при  $\mu_1 \neq 0$ ,  $\mu_1 \neq -6$ ), и неустойчивые точки

$$Z_1 = z_1 = z_2 = 0, \quad Z_2^2 = -\frac{3}{5}\mu_1 - \frac{9}{10} \quad \left(\mu_1 < -\frac{3}{2}\right)$$
 (4.6)

Исключим из дальнейшего рассмотрения значения  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_1 = -6$ , относящиеся к решению (4.5). Используя результаты разд. 3.4 заключаем, что из каждого положения равновесия (4.5) и (4.6) модельной системы в  $e^{1/2}$ -окрестности начала координат фазового пространства рождается единственное  $4\pi$ -периодическое решение исходной полной системы, отвечающее периодическому движению оси симметрии спутника. В переменных  $q_1$ ,  $q_2$  эти движения определяются соотношениями

$$q_1 = \sqrt{2e}z_{20}\cos\frac{v}{2} + O(e^{3/2})$$

$$q_2 = -\frac{\sqrt{2}}{50}e^{3/2}\left[15(\mu_1 + 1)\sin\frac{v}{2} + (71 + 6\mu_1)\sin\frac{3}{2}v\right]z_{20} + O(e^{5/2})$$
(4.7)

$$q_1 = \sqrt{2e}Z_{20}\sin\frac{v}{2} + O(e^{3/2})$$

$$q_2 = \frac{\sqrt{2}}{50}e^{3/2} \left[ 15(\mu_1 - 1)\cos\frac{v}{2} + (71 - 6\mu_1)\cos\frac{3}{2}v \right] Z_{20} + O(e^{5/2})$$
(4.8)

Равновесные значения  $z_{20}$  и  $Z_{20}$  заданы последними равенствами (4.5) и (4.6) соответственно.

Замена  $\nu$  на  $\nu$  +  $2\pi$  меняет знаки решений (4.7) и (4.8) на противоположные. Поэтому каждой паре положений равновесия (4.5) и (4.6) отвечает одно и то же периодическое движение спутника.

Если в соотношениях (4.7) и (4.8) отбросить слагаемые  $O(e^{3/2})$  и выше, то получаем гармонические колебания вдоль оси  $Oq_1$  с амплитудами  $O(e^{1/2})$ . В случае существования обоих движений ( $\mu_1 < -3/2$ ) они имеют друг относительно друга сдвиг по фазе, равный  $\pi$ ; при этом движение с меньшей ( $\sim Z_{20}$ ) и большей ( $\sim Z_{20}$ ) по модулю амплитуде соответственно неустойчиво и устойчиво в линейном приближении.

Для строгого решения вопроса об устойчивости периодического движения (4.7) следует провести нормализацию гамильтониана в окрестности этого движения в слагаемых до четвертой степени включительно относительно возмущений. Частоты малых колебаний линеаризованных уравнений возмущенного движения вычисляются по формулам

$$\Omega_1 = \frac{3}{40}(6 + \mu_1) + O(e), \quad \Omega_2 = \frac{3}{4}\sqrt{9 - 6\mu_1} + O(e)$$

Если величины  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  не связаны резонансным соотношением четвертого порядка, то в симплектических полярных координатах  $\varphi_j$ ,  $r_j$  (j=1,2), задаваемых формулами  $z_j=\sqrt{2r_j}\sin\varphi_j$ ,  $Z_j=\sqrt{2r_j}\cos\varphi_j$ , нормализованный гамильтониан имеет вид

$$H = \Omega_1 r_1 + \Omega_2 r_2 + C_{20} r_1^2 + C_{11} r_1 r_2 + C_{02} r_2^2 + O(e)$$

$$C_{20} = -\frac{3}{40} + O(e), \quad C_{11} = -\frac{3}{\sqrt{9 - 6\mu_1}} + O(e), \quad C_{02} = -\frac{5(\mu_1 - 6)}{4(2\mu_1 - 3)} + O(e)$$

$$(4.9)$$

"Поправки" O(e) в выражениях для  $C_{ij}$  постоянны, а слагаемое O(e) в гамильтониане (4.9) имеет по  $r_j$  порядок, не меньший трех, и периодично по независимой переменной  $\tau_1 = ev$  с периодом  $T_1 = 4\pi e$ .

Для выписанных значений коэффициентов  $C_{ii}$  имеем

$$\tilde{\Delta} = C_{11}^2 - 4C_{20}C_{02} = -\frac{3(2+\mu_1)}{8(2\mu_1 - 3)} + O(e),$$

откуда следует, что при достаточно малых значениях e и при  $\mu_1 \neq -2$  величина  $\tilde{\Delta}$  отлична от нуля. Поэтому исследуемое периодическое движение устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий [12]. Кроме того, квадратичная форма  $C_{20}r_1^2 + C_{11}r_1r_2 + C_{02}r_2^2$  отрицательно определена в области существования движения (4.7), и имеет место его формальная устойчивость [12, 14].

В области существования данных движений для значений

$$\mu_1 = (10\sqrt{145} - 118)/3 \approx 0.8053, \quad \mu_1 = 30\sqrt{105} - 306 \approx 1.4085$$

$$\mu_1 = 90\sqrt{905} - 2706 \approx 1.4896$$

реализуются резонансы четвертого порядка

$$3\Omega_1 = \Omega_2$$
,  $2\Omega_1 = 2\Omega_2$ ,  $\Omega_1 = 3\Omega_2$ 

соответственно.

Расчеты показывают, что соответствующие им резонансные слагаемые имеют порядок не меньший, чем e. В этих резонансных случаях можно продолжить нормализацию в членах шестой, восьмой и т.д. степеней относительно возмущений, учитывая наличие резонансов восьмого, двенадцатого и т.д. порядков при  $3\Omega_1 = \Omega_2$  и  $\Omega_1 = 3\Omega_2$ , или резонансов четных порядков, начиная с шестого, при  $\Omega_1 = \Omega_2$ .

Так как частоты  $\Omega_j$  несоизмеримы с частотой внешнего возмущения ( $\sim e^{-1}$ ), то независимая переменная  $\tau_1$  на каждом этапе будет уничтожаться. В результате получаем автономный гамильтониан, являющийся формальным первым интегралом, главная (линейная по  $r_j$ ) часть которого положительно определена. В достаточно малой окрестности начала координат этот формальный интеграл также положительно определен, поэтому для рассматриваемых резонансных случаев периодическое движение (4.7) формально устойчиво.

*Второе приближение*. При  $\mu_1 = 0$  имеем

$$K_{21} = \frac{9}{16}(Y_2^2 - y_2^2),\tag{4.10}$$

а нормализованная квадратичная часть  $K_{22}$  такова:

$$K_{22} = \left(\frac{3}{16}\mu_2 - \frac{33}{20}\right)y_1^2 + \left(\frac{3}{16}\mu_2 - \frac{3}{20}\right)Y_1^2 + \left(\frac{3}{8}\mu_2 - \frac{357}{1280}\right)(y_2^2 + Y_2^2) \tag{4.11}$$

Точками бифуркации, задающими внутреннюю область неустойчивости (фиг. 16), будут  $\mu_2 = 4/5$ ,  $\mu_2 = 44/5$ .

Используя соотношения (4.10) и (4.11), составим гамильтониан (2.19) с модельной частью  $\Gamma^{(21)}$ . В соответствующей модельной системе имеются положения равновесия

$$Z_1 = Z_2 = z_2 = 0$$
,  $z_1^2 = 132/5 - 3\mu_2$  ( $\mu_2 < 44/5$ )  
 $z_1 = z_2 = Z_2 = 0$ ,  $Z_1^2 = 12/5 - 3\mu_2$  ( $\mu_2 < 4/5$ )

неустойчивые в областях существования.

В исходной полной системе этим решениям отвечают два неустойчивых, аналитических по e периодических движения оси симметрии спутника, определяемые формулами

$$q_1 = 0.8e^2 z_{10}(-5 + \cos 2v) + O(e^3), \quad q_2 = -ez_{10}\sin v + e^2 z_{10}\sin 2v + O(e^3)$$
  

$$q_1 = 0.8e^2 Z_{10}\sin 2v + O(e^3), \quad q_2 = eZ_{10}\cos v + e^2 Z_{10}(1 - \cos 2v) + O(e^3)$$

Если пренебречь слагаемыми  $O(e^2)$  и выше, то эти соотношения описывают гармонические колебания вдоль оси  $Oq_2$ , происходящие с амплитудами порядка e и имеющие друг относительно друга (в случае существования обоих движений) сдвиг по фазе, равный  $\pi$ .

4.2. Точка  $P_2$ . Рассмотрим теперь окрестность точки  $P_2$ , полагая

$$\alpha = \frac{17}{12}$$
,  $\beta = \frac{24}{17} + e\mu_1 + e^2\mu_2 + e^3\mu_3 + ...$ 

Нормализованная форма четвертой степени  $H_{40}$  имеет вид

$$H_{40} = -\frac{1}{48}(y_1^2 + Y_1^2)^2 + \frac{1}{12}(y_2^2 + Y_2^2)(y_1^2 + Y_1^2) + \frac{1}{32}(y_2^2 + Y_2^2)^2, \tag{4.12}$$

а нормализованная квадратичная часть  $K_{21}$  на этапе *первого приближения* такова:

$$K_{21} = \frac{17}{72}\mu_1(y_1^2 + Y_1^2) + \frac{17}{48}\mu_1(y_2^2 + Y_2^2)$$

При  $\mu_1 \neq 0$  тривиальное положение равновесия устойчиво в линейном приближении. Других положений равновесия модельная система первого приближения не имеет (см. разд. 3.3.2).

Второе приближение. При  $\mu_1 = 0$  имеем  $K_{21} = 0$ , а

$$K_{22} = \left(\frac{17}{72}\mu_2 - \frac{1965}{3584}\right)(y_1^2 + Y_1^2) + \left(\frac{17}{48}\mu_2 + \frac{15}{28}\right)Y_2^2 + \left(\frac{17}{48}\mu_2 + \frac{205}{252}\right)y_2^2$$
(4.13)

Точки бифуркации  $\mu_2 = -820/357$  и  $\mu_2 = -180/119$  задают границы первой области неустойчивости, а для значения  $\mu_2 = 17685/7616$  на этапе следующего приближения будет определена вторая область неустойчивости. Две области неустойчивости не имеют общих точек, их взаимное расположение соответствует фиг. 1г.

При помощи соотношений (4.12) и (4.13) получаем гамильтониан (2.20) с модельной частью  $\Gamma^{(22)}$ . Положениями равновесия соответствующей модельной системы являются семейства неустойчивых сложных особых точек

$$z_2 = Z_2 = 0, \quad z_1^2 + Z_1^2 = \frac{7616\mu_2 - 17685}{1344} \quad \left(\mu_2 > \frac{17685}{7616}\right)$$

$$z_2 = 0, \quad Z_2^2 = -\frac{119}{33}\mu_2 + \frac{3015}{1232}, \quad z_1^2 + Z_1^2 = -\frac{17}{11}\mu_2 - \frac{40725}{4928} \quad \left(\mu_2 < -\frac{40725}{7616}\right)$$

$$Z_2 = 0, \quad z_2^2 = -\frac{119}{33}\mu_2 + \frac{415}{336}, \quad z_1^2 + Z_1^2 = -\frac{17}{11}\mu_2 - \frac{14365}{1344} \quad \left(\mu_2 < -\frac{9295}{1344}\right),$$

а также изолированные равновесия

$$Z_1 = Z_2 = z_1 = 0, \quad z_2^2 = -\frac{17}{3}\mu_2 - \frac{820}{63} \quad \left(\mu_2 < -\frac{820}{357}\right)$$
 (4.14)

неустойчивые в области существования (при  $\mu_2 = -9295/1344$  — сложные особые точ-ки), и

$$Z_1 = z_1 = z_2 = 0, \quad Z_2^2 = -\frac{17}{3}\mu_2 - \frac{60}{7} \quad \left(\mu_2 < -\frac{180}{119}\right)$$
 (4.15)

устойчивые в линейном приближении в области существования (при  $\mu_2 = -40725/7616$  — сложные особые точки).

Для каждого из случаев (4.14) и (4.15), исключив сложные особые точки, найдем аналитические по e резонансные периодические движения исходной полной системы. Получаем неустойчивое движение вида

$$q_1 = z_{20}e^2\left(\frac{4}{9} - \frac{12}{7}\cos 2\nu\right) + O(e^3), \quad q_2 = ez_{20}\sin \nu + O(e^2)$$
 (4.16)

и устойчивое в линейном приближении движение вида

$$q_1 = -\frac{12}{7}e^2Z_{20}\sin 2\nu + O(e^3), \quad q_2 = -eZ_{20}\cos \nu + O(e^2)$$
 (4.17)

При учете в этих выражениях слагаемых не выше первого порядка по e, имеем гармонические колебания вдоль оси  $Oq_2$  с амплитудой порядка O(e).

Проведем нелинейный анализ устойчивости движения (4.17). Частоты малых линейных колебаний линеаризованных уравнений возмущенного движения определяются выражениями

$$\Omega_1 = -\frac{17}{36}\mu_2 - \frac{4525}{896} + O(e), \quad \Omega_2 = \frac{\sqrt{-105(119\mu_2 + 180)}}{126} + O(e)$$

Нормализованный гамильтониан возмущенного движения при отсутствии резонансов четвертого порядка приводится к виду (4.9), причем

$$C_{20} = -\frac{11}{36} + O(e), \quad C_{11} = -\frac{2\sqrt{105}}{9\sqrt{-119\mu_2 - 180}} + O(e)$$

$$C_{02} = -\frac{119\mu_2 + 40}{16(119\mu_2 + 180)} + O(e), \quad \tilde{\Delta} = -\frac{3927\mu_2 + 3560}{432(119\mu_2 + 180)} + O(e)$$

Точка  $\mu_2 = -3560/3927$ , для которой главная часть величины  $\tilde{\Delta}$  обращается в нуль, не входит в область существования движения (4.17). Кроме того, в области существования коэффициенты  $C_{ij}$  отрицательны при достаточно малых значениях e. Поэтому в нерезонансном случае рассматриваемое движение устойчиво для большинства начальных условий и формально устойчиво (кроме исключенной точки  $\mu_2 = -40725/7616$ ).

Резонанс  $2\Omega_1=2\Omega_2$  четвертого порядка реализуется для  $\mu_2\approx-11.1922$ , причем резонансные слагаемые в членах четвертой степени нормализованного гамильтониана имеют порядок не меньший, чем e. Повторяя рассуждения, проведенные для резонансных случаев решения (4.7), заключаем, что в данном резонансном случае движение (4.17) формально устойчиво.

*Третье приближение*. Для значений  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 17685/7616$  проводим нормализацию в слагаемых  $O(e^3)$  в квадратичной части гамильтониана. Имеем в результате

$$K_{22} + eK_{23} = \left(\frac{17}{48}e\mu_3 + \frac{105535}{64512}\right)y_2^2 + \left(\frac{17}{48}e\mu_3 + \frac{9735}{7168}\right)Y_2^2 + \frac{17}{72}e[(\mu_3 + \mu_3^+)y_1^2 + (\mu_3 + \mu_3^-)Y_1^2]$$

$$\mu_3^{\pm} = \pm \frac{40285}{8704}$$
(4.18)

Отсюда находим, что точками бифуркации, определяющими границы второй области неустойчивости, будут  $\mu_3 = \mu_3^{\pm}$ .

При помощи соотношений (4.12) и (4.18) получим гамильтониан (2.22). Положения равновесия модельной системы с гамильтонианом  $\Gamma^{(32)}$  описываются соотношениями

$$z_2 = Z_2 = Z_1 = 0,$$
  $z_1^2 = \frac{17}{3}(\mu_3 - \mu_3^-)$   $(\mu_3 > \mu_3^-)$   
 $z_2 = Z_2 = z_1 = 0,$   $Z_1^2 = \frac{17}{3}(\mu_3 - \mu_3^+)$   $(\mu_3 > \mu_3^+)$ 

В области существования равновесия из первой пары устойчивы в линейном приближении, а из второй неустойчивы.

В исходных переменных первой паре соответствует устойчивое (в линейном приближении)  $4\pi$ -периодическое движение оси спутника вида

$$q_{1} = -\frac{\sqrt{6}}{3}e^{3/2}z_{10}\cos\frac{3}{2}v + \frac{\sqrt{6}}{32}e^{5/2}z_{10}\left(-6\cos\frac{v}{2} + 11\cos\frac{5}{2}v\right) + O(e^{7/2})$$

$$q_{2} = \frac{8\sqrt{6}}{63}e^{5/2}z_{10}\left(-7\sin\frac{v}{2} + 2\sin\frac{5}{2}v\right) + O(e^{7/2}),$$
(4.19)

а второй паре – неустойчивое периодическое движение вида

$$q_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3}e^{3/2}Z_{10}\sin\frac{3}{2}v + \frac{\sqrt{6}}{32}e^{5/2}Z_{10}\left(-6\sin\frac{v}{2} + 11\sin\frac{5}{2}v\right) + O(e^{7/2})$$

$$q_2 = -\frac{8\sqrt{6}}{63}e^{5/2}Z_{10}\left(-7\cos\frac{v}{2} + 2\cos\frac{5}{2}v\right) + O(e^{7/2})$$

Если пренебречь слагаемыми  $O(e^{5/2})$  и выше, то данные движения — гармонические колебания вдоль оси  $Oq_1$  с амплитудой  $O(e^{3/2})$ .

Продолжая нормализацию, приведем гамильтониан возмущенного движения для решения (4.19) к виду (4.9), где с точностью до слагаемых O(e) включительно

$$\Omega_{1} = -\frac{\sqrt{40285 \times 8704(\mu_{3} + \mu_{3}^{+})}}{9216}e$$

$$\Omega_{2} = \frac{\sqrt{1947 \times 21107}}{10752} \left[ 5 + \frac{946435(2176\mu_{3} + 5755)}{739715922} e \right]$$

$$C_{20} = \frac{(2176\mu_{3} + 40285)}{6 \times 8704(\mu_{3} + \mu_{3}^{+})}e, \quad C_{02} = \frac{4108578371}{8876591064}e$$

$$C_{11} = -\frac{19315}{369857961} \frac{\sqrt{3 \times 649 \times 21107\mu_{3}^{+}}}{\sqrt{\mu_{3} + \mu_{3}^{+}}}e$$

Отсюда находим

$$\tilde{\Delta} = -\frac{8940266535296\mu_3 + 105397704759235}{13314886596 \times 8704(\mu_3 + \mu_3^+)}e^2 + O(e^3)$$

При достаточно малых значениях e частоты  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  несоизмеримы и, кроме того, в области существования рассматриваемого решения справедливы соотношения  $C_{20}>0$  и  $\tilde{\Delta}<0$ . Таким образом, для всех значений  $\mu_3$  из области существования периодическое движение (4.19) устойчиво для большинства начальных условий и формально устойчиво.

Замечание. Исследование резонансных точек  $P_1$  и  $P_2$  и их окрестностей, проведенное при фиксированном значении одного из параметров ( $\alpha$ ), опирается на теоретические результаты, полученные в разд. 1—3. Разработанные подходы могут быть применены и при рассмотрении полной (трехмерной) окрестности резонансной точки. При этом общая теория была бы слишком громоздкой из-за большого числа вариантов взаимного расположения областей параметрического резонанса и бифуркационных поверхностей в пространстве параметров. Поэтому такие рассмотрения лучше проводить для конкретной задачи, что в качестве примера будет выполнено для третьей резонансной точки  $P_3$ .

4.3. Точка  $P_3$ . Рассмотрим окрестность точки  $P_3$ , полагая

$$\alpha = 1 + ev_1, \quad \beta = \frac{3}{2} + e\mu_1 + e^2\mu_2 \quad (v_1 \neq 0)$$
 (4.20)

Нормализация гамильтониана возмущенного движения в слагаемых четвертой степени при e=0 и квадратичной части в слагаемых порядка O(e) дает

$$K_{40} = \frac{1}{8}(y_2^2 + Y_2^2)^2, \quad K_{21} = \frac{V_1}{2}(y_1^2 + Y_1^2) + \frac{1}{4}(2\mu_1 + 5\nu_1)(y_2^2 + Y_2^2)$$
 (4.21)

При  $v_1 \neq -(2/5)\mu_1$  тривиальное положение равновесия системы устойчиво в линейном приближении. В модельной системе первого приближения других положений равновесия нет.

В случае  $v_1 = -(2/5)\mu_1$  проведем нормализацию квадратичной части гамильтониана в слагаемых порядка до  $O(e^2)$  включительно, получая в итоге

$$K_{21} + eK_{22} = \left(-\frac{\mu_1}{5} + e^{\frac{3\mu_1^2}{25}}\right)(y_1^2 + Y_1^2) + e^{\frac{\mu_2 - \mu_2^+}{2}}y_2^2 + e^{\frac{\mu_2 - \mu_2^-}{2}}Y_2^2$$

$$\mu_2^{\pm} = \pm \frac{7}{5}\mu_1 + \frac{22}{25}\mu_1^2$$
(4.22)

Отсюда следует, что на границах области параметрического резонанса

$$\mu_2 = \mu_2^{\pm} \tag{4.23}$$

При помощи соотношений (4.21) и (4.22) составим гамильтониан (2.19) с модельной частью  $\Gamma^{(21)}$ . При выполнении условий  $\mu_2 < \mu_2^+$  и  $\mu_2 < \mu_2^-$  в отвечающей ему модельной системе имеются положения равновесия, для которых  $z_1 = Z_1 = 0$ , а

$$Z_2 = 0, \quad z_2^2 = 2(\mu_2^+ - \mu_2) \quad \text{if} \quad z_2 = 0, \quad Z_2^2 = 2(\mu_2^- - \mu_2)$$
 (4.24)

соответственно. В области существования первая пара равновесных точек устойчива в линейном приближении при  $\mu_1 > 0$  и неустойчива при  $\mu_1 < 0$ , а вторая пара, наоборот, устойчива в линейном приближении при  $\mu_1 < 0$  и неустойчива при  $\mu_1 > 0$ .

В исходных переменных каждой паре точек (4.24) отвечает аналитическое по e,  $4\pi$ -периодическое по v движение, описываемое с точностью до слагаемых  $O(e^2)$  включительно соотношениями

$$q_{1} = -\frac{\sqrt{6}ez_{20}}{3}\cos\frac{v}{2} - \frac{\sqrt{6}e^{2}z_{20}}{18} \left[ (8\mu_{1} + 9)\cos\frac{v}{2} - 9\cos\frac{3}{2}v \right]$$

$$q_{2} = -\frac{\sqrt{6}ez_{20}}{3}\sin\frac{v}{2} + \frac{\sqrt{6}e^{2}z_{20}}{90} \left[ (32\mu_{1} + 45)\sin\frac{v}{2} + 45\sin\frac{3}{2}v \right]$$

$$(4.25)$$

И

$$q_{1} = -\frac{\sqrt{6}eZ_{20}}{3}\sin\frac{v}{2} - \frac{\sqrt{6}e^{2}Z_{20}}{18} \left[ (8\mu_{1} - 9)\sin\frac{v}{2} - 9\sin\frac{3}{2}v \right]$$

$$q_{2} = \frac{\sqrt{6}eZ_{20}}{3}\cos\frac{v}{2} - \frac{\sqrt{6}e^{2}Z_{20}}{90} \left[ (32\mu_{1} - 45)\cos\frac{v}{2} + 45\cos\frac{3}{2}v \right]$$
(4.26)

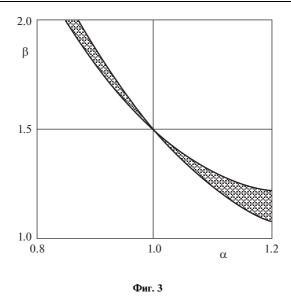
Если в этих соотношениях пренебречь слагаемыми  $O(e^2)$  и выше, то в плоскости величин  $q_1, q_2$  имеем движения по окружностям с радиусами O(e), происходящие в направлении против часовой стрелки. В областях существования обоих движений их фазы различаются на  $\pi$ .

Выводы об устойчивости (в линейном приближении) и неустойчивости найденных периодических движений совпадают, в соответствующих областях, с аналогичными выводами для порождающих их положений равновесия модельной системы.

Для геометрической интерпретации полученных результатов перепишем уравнения границ области параметрического резонанса (в данном приближении) в эквивалентном виде, с учетом соотношений (4.20) и (4.23):

$$\beta = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}(\alpha - 1) \mp \frac{7}{2}(\alpha - 1)e + \frac{11}{2}(\alpha - 1)^2$$

Верхний и нижний знаки отвечают аналогичным знакам в условии (4.23).



На фиг. З область параметрического резонанса в окрестности точки  $P_3$  построена в плоскости параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  для значения e=0.15. В части плоскости, расположенной выше и правее этой области, в окрестности невозмущенного движения (цилиндрической прецессии) нет периодических движений спутника. Внутри части области параметрического резонанса, задаваемой условием  $\alpha < 1$ , существует и устойчиво в линейном приближении периодическое движение (4.25). В малой ( $O(e^2)$ ) окрестности, расположенной ниже и левее этой части области неустойчивости, существуют оба периодических движения (4.25) и (4.26), первое из которых остается устойчивым в линейном приближении, а второе неустойчиво. В случае  $\alpha > 1$  при описании области существования и результатов устойчивости движения (4.25) и (4.26) следует поменять местами.

Работа выполнена в рамках государственного задания (3.3858.2017/4.6).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
- 2. *Маркеев А.П.* О поведении нелинейной гамильтоновой системы с одной степенью свободы на границе области параметрического резонанса // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 569–580.
- 3. *Маркеев А.П.* Параметрический резонанс и нелинейные колебания тяжелого твердого тела в окрестности его плоских вращений // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 34—44.
- 4. *Холостова О.В.* Параметрический резонанс в задаче о нелинейных колебаниях спутника на эллиптической орбите // Космич. исслед. 1996. Т. 3. Вып. 3. С. 312—316.
- 5. *Холостова О.В.* О периодических движениях неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при параметрическом резонансе основного типа // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 4. С. 540–551.
- 6. *Маркеев А.П.* О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона // ДАН. 2005. Т. 402. № 3. С. 539—343.
- 7. *Маркеев А.П.* Об одном особом случае параметрического резонанса в задачах небесной механики // Письма в Астрон. ж. 2005. Т. 31. Вып. 5. С. 388—394.

- 8. *Маркеев А.П.* О кратном параметрическом резонансе в системах Гамильтона // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 200–220.
- 9. *Маркеев А.П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.; Ижевск: НИЦ "Регул. и хаотич. динамика", Ин-т компьют. исследований, 2009. 396 с.
- 10. *Холостова О.В.* О периодических движениях неавтономной гамильтоновой системы в одном случае кратного параметрического резонанса // Нелин. дин. 2017. Т. 13. № 4. С. 477—504.
- 11. Маркеев А.П. О вращательном движении динамически симметричного спутника на эллиптической орбите // Космич. исслед. 1967. Т. 5. Вып. 4. С. 530—539.
- 12. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
- 13. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 492 с.
- 14. *Glimm J*. Formal stability of Hamiltonian systems // Comm. Pure Appl. Math. 1964. № 4. P. 509–526.