
УДК 531.38; 531.39

О ТРЕХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ

© 2019 г. Г. В. Горр*

Институт прикладной математики и механики, Донецк, Украина

** e-mail: gvgorr@gmail.com*

Поступила в редакцию 09.11.2018 г.

После доработки 28.02.2019 г.

Принята к публикации 19.03.2019 г.

Рассмотрена задача о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, в потенциальном поле сил. Исследованы условия существования трех инвариантных соотношений специального типа, выбор которых обусловлен интегрированием уравнений Пуассона в квадратурах. Построено новое решение уравнений движения динамически симметричного тела, которое характеризуется одной произвольной функцией от компоненты вектора вертикали. Изучен случай постоянства модуля момента количества движения.

Ключевые слова: инвариантные соотношения, потенциальное силовое поле, динамически симметричное тело

DOI: 10.1134/S0032823519020061

Введение. Задача о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку, является обобщением классической задачи о движении твердого тела под действием силы тяжести. Первые результаты в этой задаче принадлежат Д.Н. Горячеву [1]. Решая обратные задачи механики, он построил потенциальные функции, для которых имеют место первые интегралы уравнений движения (линейные и нелинейные). В частности, Д.Н. Горячев предполагал, что наряду с полиномиальными слагаемыми потенциальная функция содержит и сингулярные слагаемые по компоненте единичного вектора оси симметрии силового поля. Полученные им результаты были посвящены и случаям, в которых распределение масс тела удовлетворяло условиям Ковалевской и Горячева—Чаплыгина [1, 2]. Потенциал Д.Н. Горячева был обобщен Х.М. Яхьей [3, 4] в задаче о движении твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил. Обзор исследований по данному направлению в динамике твердого тела выполнен в полной мере в обзорной монографии А.В. Борисова, И.С. Мамаева [5], где представлен и обширный список публикаций по данной теме. Следует отметить и статью Х.М. Яхьи [6], которая, по-видимому, является одной из последних по данной проблеме. Таким образом, изучение задачи о движении твердого тела происходило, главным образом, в направлении, посвященном построению первых интегралов уравнений движения. Как отмечал П.В. Харламов [7], при построении частных решений уравнений динамики твердого тела особое значение имеет метод инвариантных соотношений (ИС) [8, 9], на основе которого можно построить и полную картину движения тела [10].

Применение метода построения частных решений уравнений движения твердого тела объясняется неинтегрируемостью их в квадратурах (была доказана неинтегрируе-

мость уравнений Эйлера [11] и уравнений Кирхгофа [12]). Результаты, полученные по этой теме, изложены в книгах [13–15]. Известно, что кинематические уравнения Пуассона используются в многочисленных задачах динамики твердого тела [13], и поэтому их интегрирование при заданных функциях – компонентах угловой скорости – представляет самостоятельную задачу. Было уделено основное внимание этой проблеме, и указаны многие типы ИС, на основании которых решение уравнений Пуассона получено в квадратурах [14, 15].

При построении частных решений уравнений динамики твердого тела следует учитывать отмеченные [16] особенности применения методов ИС, и результаты [17, 18], посвященные изучению особых решений уравнений Эйлера–Пуассона. Были рассмотрены [19] особые решения для обобщенной задачи.

Ниже исследуются три нелинейных ИС уравнений движения тела в потенциальном поле сил. Предполагается, что эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения. Получено дифференциальное уравнение относительно двух характерных функций, из которых одну можно считать произвольной функцией от третьей компоненты единичного вектора вертикали. Показано, что это дифференциальное уравнение имеет решение полиномиального типа, если главные моменты инерции тела удовлетворяют условию $A_1 = A_3(n + 2)$, где $n \in \mathbb{N}$, является новым и описывает целый класс твердых тел.

1. Постановка задачи. Запишем уравнения движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, в потенциальном поле сил [1]

$$A\dot{\omega} = (A\omega \times \omega) + \frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} \quad (1.1)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \omega, \quad (1.2)$$

где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – единичный вектор вертикали, $U(v_1, v_2, v_3)$ – силовая функция; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции тела, точка над переменными ω , $\mathbf{v}$ обозначает производную по времени t .

Уравнения (1.1), (1.2) имеют первые интегралы

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1, \quad A\omega \cdot \mathbf{v} = k, \quad A\omega \cdot \omega - 2U(v_1, v_2, v_3) = 2E, \quad (1.3)$$

где k и E – произвольные постоянные.

Пусть A_i ($i = \overline{1, 3}$) – главные моменты инерции, тогда в скалярной форме из равенств (1.1)–(1.3) имеем

$$A_1 \dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + v_3 \frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_2} - v_2 \frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_3} \quad (1.4)$$

$$A_2 \dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 + v_1 \frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_3} - v_3 \frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_1} \quad (1.5)$$

$$A_3 \dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + v_2 \frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_2} \quad (1.6)$$

$$\dot{v}_1 = \omega_3 v_2 - \omega_2 v_3, \quad \dot{v}_2 = \omega_1 v_3 - \omega_3 v_1, \quad \dot{v}_3 = \omega_2 v_1 - \omega_1 v_2 \quad (1.7)$$

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \quad A_1 \omega_1 v_1 + A_2 \omega_2 v_2 + A_3 \omega_3 v_3 = k \quad (1.8)$$

$$A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 + A_3 \omega_3^2 - 2U(v_1, v_2, v_3) = 2E \quad (1.9)$$

Зададим для системы (1.4)–(1.7) три ИС [20, 21]:

$$\omega_i = v_i \varepsilon(v_3) + \beta_i g(v_3), \quad i = 1, 2, \quad \omega_3 = h(v_3) \quad (1.10)$$

В системе (1.10) β_1 и β_2 – постоянные параметры, $\epsilon(v_3)$, $g(v_3)$ и $h(v_3)$ – дифференцируемые функции переменной v_3 . Исследование ИС (1.10) будем вести в рамках решения обратной задачи, т. е. силовую функцию $U(v_1, v_2, v_3)$ будем находить с помощью соотношения (1.9):

$$U(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2} [A_1(v_1\epsilon(v_3) + \beta_1 g(v_3))^2 + A_2(v_2\epsilon(v_3) + \beta_2 g(v_3))^2 + A_3 h^2(v_3)] - E \quad (1.11)$$

Подставим величины (1.10) в уравнения (1.7):

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_2(h(v_3) - v_3\epsilon(v_3)) - \beta_2 v_3 g(v_3) \\ \dot{v}_2 &= v_1(v_3\epsilon(v_3) - h(v_3)) + \beta_1 v_3 g(v_3) \\ \dot{v}_3 &= g(v_3)(\beta_2 v_1 - \beta_1 v_2) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Сформулируем постановку задачи: найти условия существования ИС (1.10) для системы (1.4)–(1.6), (1.12).

2. Интегрирование уравнений (1.12), (1.4)–(1.6). Рассмотрим вначале интегрирование уравнений (1.12). Они допускают геометрический интеграл $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$ и интегральное соотношение [21]

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 = c_0 + F(v_3), \quad (2.1)$$

где

$$F(v_3) = \int \frac{v_3\epsilon(v_3) - h(v_3)}{g(v_3)} dv_3, \quad (2.2)$$

c_0 – произвольная постоянная.

В дальнейшем полагаем, что функция (2.2) вычисляется в конечной форме в классе известных функций. Выбор ИС (1.10) объясняется тем, что интегрирование уравнений (1.12) на ИС (1.10) можно выполнить в квадратурах. Действительно, полагая

$$v_1 = \sqrt{1 - v_3^2} \sin \varphi, \quad v_2 = \sqrt{1 - v_3^2} \cos \varphi, \quad (2.3)$$

где φ – вспомогательная переменная, из геометрического интеграла $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$ получим тождество. Если в равенстве (2.3) $v_3 = \cos \theta$, то

$$v_1 = \sin \theta \sin \varphi, \quad v_2 = \sin \theta \cos \varphi, \quad (2.4)$$

где θ , φ – углы Эйлера. Пусть

$$\beta_1 = \kappa_0 \cos \varphi_0, \quad \beta_2 = \kappa_0 \sin \varphi_0 \quad (\kappa_0 = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}), \quad (2.5)$$

т.е. постоянная φ_0 имеет значение $\operatorname{arctg} \frac{\beta_2}{\beta_1}$. В силу равенств (2.4) и (2.5) соотношение (2.1) и третье уравнение системы (1.12) запишем в виде

$$\sin(\varphi + \varphi_0) = \frac{c_0 + F(v_3)}{\kappa_0 \sqrt{1 - v_3^2}}, \quad \dot{v}_3 = -\kappa_0 g(v_3) \sqrt{1 - v_3^2} \cos(\varphi + \varphi_0) \quad (2.6)$$

Откуда следует, что функция $v_3(t)$ определяется путем обращения интеграла

$$\int_{v_3^{(0)}}^{v_3} \frac{dv_3}{g(v_3) \sqrt{\kappa_0^2 (1 - v_3^2) - (c_0 + F(v_3))^2}} = -(t - t_0) \quad (2.7)$$

Зависимость $\varphi(t)$ при $v_3(t)$ из (2.7) найдем по первой формуле системы (2.6):

$$\varphi(t) = -\varphi_0 + \arcsin \frac{c_0 + F(v_3(t))}{\kappa_0 \sqrt{1 - v_3^2(t)}} \quad (2.8)$$

Таким образом, при известной функции $F(v_3)$ решение уравнений (1.12) характеризуется соотношениями (2.3), (2.7) и (2.8).

Рассмотрим интегрирование уравнений (1.4)–(1.6). Вид силовой функции (1.11) и структура ИС (2.1) показывают, что дальнейшее изучение условий существования ИС (1.10) целесообразно вести в предположении, что моменты инерции тела удовлетворяют условию

$$A_2 = A_1, \quad (2.9)$$

которое принято ранее [21]. В этом случае силовая функция (1.11) примет вид

$$U(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2} \{A_1 [\varepsilon^2(v_3)(1 - v_3^2) + \kappa_0^2 g^2(v_3) + 2\varepsilon(v_3)g(v_3)(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2)] + A_3 h^2(v_3)\} - E \quad (2.10)$$

Здесь вместо суммы $v_1^2 + v_2^2$ использована разность $1 - v_3^2$, что возможно в силу полученного ранее результата [16]. Имеем равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial v_i} &= A_i \beta_i \varepsilon(v_3) g(v_3), \quad i = 1, 2 \\ \frac{\partial U}{\partial v_3} &= A_1 [(1 - v_3^2) \varepsilon(v_3) \varepsilon'(v_3) - v_3 \varepsilon^2(v_3) + \kappa_0^2 g(v_3) g'(v_3) + \\ &\quad + (\varepsilon(v_3) g(v_3))' (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2)] + A_3 h(v_3) h'(v_3), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где штрихом обозначена производная по переменной v_3 .

Подставим в уравнение (1.6) компоненту ω_3 из (1.10) и учтем равенства (2.9) и (2.11). Тогда функцию $\varepsilon(v_3)$ можно выразить через $h'(v_3)$:

$$\varepsilon(v_3) = -\frac{A_3}{A_1} h'(v_3) \quad (2.12)$$

В дальнейшем будем полагать, что $h(v_3) \neq \text{const}$, так как в противном случае из ИС (1.10) получим тривиальный случай маятникового движения тела. ИС (1.10) на основании равенства (2.12) примут вид

$$\omega_i = -\frac{A_3}{A_1} v_i h'(v_3) + \beta_i g(v_3), \quad i = 1, 2, \quad \omega_3 = h(v_3) \quad (2.13)$$

Частные производные (2.11) в силу равенства (2.12) запишутся так

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial v_i} &= -A_3 \beta_i g(v_3) h'(v_3), \quad i = 1, 2 \\ \frac{\partial U}{\partial v_3} &= \frac{1}{A_1} \{A_3^2 [(1 - v_3^2) h''(v_3) - v_3 h'(v_3)] h'(v_3) + A_1 A_3 h(v_3) h'(v_3) - \\ &\quad - A_1 A_3 (h''(v_3) g(v_3) + h'(v_3) g'(v_3)) (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2)\} + A_1^2 \kappa_0^2 g(v_3) g'(v_3) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Преобразуем интеграл моментов из (1.8) и соотношение (2.1) с помощью формул (1.10), (2.9) и (2.12). Введя обозначения

$$\Phi_1(v_3) = k - A_3 v_3 h(v_3) + A_3 (1 - v_3^2) h'(v_3), \quad \Phi_2(v_3) = A_1 h(v_3) + A_3 v_3 h'(v_3)$$

получим

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 = \frac{\Phi_1(v_3)}{A_1 g(v_3)} \quad (2.15)$$

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 = c_0 - \frac{1}{A_1} \int \frac{\Phi_2(v_3)}{g(v_3)} dv_3 \quad (2.16)$$

Внося выражение (2.15) в уравнение (2.16) и дифференцируя полученное уравнение по v_3 , получим дифференциальное уравнение

$$g(v_3)[A_3(1 - v_3^2)h''(v_3) - 2A_3v_3h'(v_3) + (A_1 - A_3)h(v_3)] = g'(v_3)\Phi_1(v_3) \quad (2.17)$$

относительно двух функций $h(v_3)$ и $g(v_3)$.

Запишем уравнения (1.12) при условии (2.12):

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= \frac{\Phi_2(v_3)}{A_1} v_1 - \beta_2 v_3 g(v_3), & \dot{v}_2 &= -\frac{\Phi_2(v_3)}{A_1} v_2 + \beta_1 v_3 g(v_3) \\ \dot{v}_3 &= g(v_3)(\beta_2 v_1 - \beta_1 v_2) \end{aligned} \quad (2.18)$$

С помощью формулы (2.15), третьего уравнения (2.18) зависимость $v_3(t)$ можно определять из интегрального соотношения

$$\int_{v_3^{(0)}}^{v_3} \frac{dv_3}{\sqrt{F_*(v_3)}} = -\frac{1}{A_1}(t - t_0), \quad (2.19)$$

где

$$F_*(v_3) = \kappa_0^2 A_1^2 (1 - v_3^2) g^2(v_3) - \Phi_1^2(v_3) \quad (2.20)$$

Рассмотрим уравнения (1.4) и (1.5) при условии $A_2 = A_1$. Их целесообразно изучать в следующей независимой линейной комбинации:

$$A_1(v_1\dot{\omega}_1 + v_2\dot{\omega}_2) = (A_1 - A_3)\omega_3(\omega_2 v_1 - \omega_1 v_2) + v_3 \left(v_1 \frac{\partial U}{\partial v_2} - v_2 \frac{\partial U}{\partial v_1} \right) \quad (2.21)$$

$$A_1(v_2\dot{\omega}_1 - v_1\dot{\omega}_2) = (A_1 - A_3)\omega_3(\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2) + v_3 \left(v_1 \frac{\partial U}{\partial v_1} + v_2 \frac{\partial U}{\partial v_2} \right) - (1 - v_3^2) \frac{\partial U}{\partial v_3} \quad (2.22)$$

При использовании уравнения (2.21) выражение $v_1 \frac{\partial U}{\partial v_2} - v_2 \frac{\partial U}{\partial v_1}$ будем заменять левой частью уравнения (1.6), а выражение $\omega_2 v_1 - \omega_1 v_2$ — правой частью третьего уравнения системы (2.18). В результате такого подхода из равенства (2.21) получим уравнение (2.17).

Если в уравнение (2.22) подставим $\dot{\omega}_1$ и $\dot{\omega}_2$ из уравнений (1.4) и (1.5), ω_j ($j = \overline{1,3}$) из (1.10), $\frac{\partial U}{\partial v_j}$ ($j = \overline{1,3}$) из (2.14) и учтем (2.17), то получим тождество.

Доказано утверждение: Условиями существования ИС (1.10) служат условия действительных решений уравнений (2.12) и (2.17). Из уравнения (2.12) находим функцию $\epsilon(v_3)$, уравнение (2.17) служит дифференциальным уравнением относительно функций $h(v_3)$ и $g(v_3)$. Если функция $h(v_3)$ задана, то функция $g(v_3)$ определяется по формуле

$$g(v_3) = \sigma_0 \Phi_1(v_3) e^{\Phi(v_3)}, \quad \Phi(v_3) = \int \frac{\Phi_2(v_3)}{\Phi_1(v_3)} dv_3, \quad (2.23)$$

где σ_0 — произвольная постоянная.

Отметим, что $\Phi_1(v_3) \neq 0$, так как в противном случае из формул (2.15) и (2.16) следуют условия, которые противоречат друг другу.

3. Прецессионные движения тела. Рассмотрим соотношение (2.16); положим

$$\Phi_2(v_3) = 0 \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) имеет общее решение

$$h(v_3) = \mu_0 v_3^{-\alpha_0} \left(\alpha_0 = \frac{A_1}{A_3} > \frac{1}{2} \right), \quad (3.2)$$

где μ_0 — произвольная постоянная. В силу равенства (3.1) соотношение (2.16) упрощается:

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 = c_0 \quad (3.3)$$

Обозначим через $\beta = (\beta_1, \beta_2, 0)$, тогда в векторном виде из соотношения (3.3) следует

$$\beta \cdot \mathbf{v} = c_0 \quad (3.4)$$

Условие (3.4) описывает прецессионное движение тела [14] (угол между векторами β и $\mathbf{v}$ постоянен в течение всего времени). Для определения типа прецессии из уравнения (2.15), используя решение (3.2), получим

$$g(v_3) = \frac{1}{A_1 c_0} [k - \mu_0 A_1 v_3^{-\alpha_0-1} + (A_1 - A_3) \mu_0 v_3^{1-\alpha_0}] \quad (3.5)$$

Зависимость $v_3(t)$ получим из равенства (2.7), используя равенство $F(v_3) = 0$ и функцию (3.5). Тогда

$$\int_{v_3^{(0)}}^{v_3} \frac{dv_3}{g(v_3) \sqrt{\kappa_0^2 (1 - v_3^2) - c_0^2}} = -(t - t_0), \quad (3.6)$$

где полагаем $\kappa_0^2 > c_0^2$ (это неравенство ограничивает величину постоянной c_0). Тип прецессии (3.4) можно определить, представив соотношения (2.13) в векторном виде

$$\omega = f_1(t) \mathbf{v} + f_2(t) \beta, \quad f_1(t) = \mu_0 (v_3(t))^{-(\alpha_0+1)}, \quad f_2(t) = g(v_3(t)), \quad (3.7)$$

т.е. прецессионное движение тела является прецессией общего вида [14].

В частном случае $\alpha_0 = 1$ (эллипсоид инерции тела — сфера) функции $h(v_3)$ и $g(v_3)$ из формул (3.2) и (3.5) упрощаются:

$$h(v_3) = \frac{\mu_0}{v_3}, \quad g(v_3) = \frac{1}{A_1 c_0} \left(k - \frac{\mu_0 A_1}{v_3^2} \right) \quad (3.8)$$

Из равенств (3.6) и (3.8) следует, что $v_3(t)$ — элементарная функция времени.

В силу формул (2.12), (3.2) и (3.5) силовая функция (2.10) содержит сингулярные слагаемые по переменной v_3 (были рассмотрены в [2, 4, 5] аналоги таких функций). Поэтому полученный в этом разделе результат для классических задач динамики твердого тела представляет лишь теоретический интерес. Однако для обобщенных задач механики они имеют определенное значение. Например, при рассмотрении гироскопов Горячева—Чаплыгина и Ковалевской в квантовой механике И.В. Комаров и В.Б. Кузнецов [22, 23] указали некоторую квантово-механическую интерпретацию сингулярного слагаемого в силовой функции.

4. Случай $g(v_3) = g_0 = \text{const}$. Положим в уравнении (2.17) $g(v_3) = g_0$. Тогда получим

$$A_3 (1 - v_3^2) h''(v_3) - 2A_3 v_3 h'(v_3) + (A_1 - A_3) h(v_3) = 0 \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) допускает решения полиномиального типа:

$$1) h(v_3) = h_1 v_3, \quad \text{если} \quad A_1 = 3A_3 \quad (\alpha_0 = 3) \quad (4.2)$$

$$2) h(v_3) = h_1 \left(v_3^2 - \frac{1}{3} \right), \quad \text{если} \quad A_1 = 7A_3 \quad (\alpha_0 = 7) \quad (4.3)$$

В примере (4.2) ИС (1.10) таковы:

$$\omega_i = -\frac{1}{3} h_1 v_i + \beta_i g_0, \quad i = 1, 2, \quad \omega_3 = h_1 v_3, \quad (4.4)$$

т.е. уравнения (1.4)–(1.7) допускают три линейных ИС, где h_1 и g_0 – постоянные. В случае (4.2), (4.4) формула (2.7) примет вид

$$\int_{v_3^{(0)}}^{v_3} \frac{dv_3}{\sqrt{9\kappa_0^2 g_0^2 (1 - v_3^2) - h_1^2 (1 - 2v_3^2)^2}} = -\frac{t - t_0}{3}$$

При этом принято условие $k = 0$. Действительности функции $v_3(t)$ можно добиться, положив, например, $9\kappa_0^2 g_0^2 - h_1^2 > 0$. Тем самым показано, что решение (4.4), $v_1 = \sqrt{1 - v_3^2} \sin \phi$, $v_2 = \sqrt{1 - v_3^2} \cos \phi$ действительно.

Отметим, что в случае (4.4) силовая функция имеет второй порядок, т.е. уравнения (1.1) и (1.2) описывают движение твердого тела в центральном ньютоновском поле сил. В динамике твердого тела задачу об исследовании трех инвариантных соотношений рассматривали С.А. Чаплыгин, П.В. Харламов, Х.М. Яхья, Г.В. Горр, Е.К. Узбек (см. обзоры [13–15]). Однако изучаемый здесь случай $A_1 = A_2 = 3A_3$ в этих исследованиях не отмечается.

Формулы (4.2) и (4.3) показывают, какой в общем случае характер решения уравнения (4.1) в классе полиномиальных функций

$$h(v_3) = h_n v_3^n + h_{n-1} v_3^{n-1} + \dots + h_0 \quad (4.5)$$

Здесь $n \neq 0$ в силу предположения, принятого ранее.

Подставив значение $h(v_3)$ (4.5) в уравнение (4.1), получим следующие свойства чисел h_i ($i = \overline{0, n}$). Главные моменты инерции A_1 и A_3 должны удовлетворять условию

$$A_1 = A_3(n^2 + n + 1) \quad (n \geq 1) \quad (4.6)$$

Если $n = 2m$ ($m \in N$), то h_n – произвольное число, все члены разложения с нечетной степенью равны нулю. Если $n = 2m - 1$, $m \in N$, то h_n – произвольное число, все члены разложения (4.5) с четной степенью равны нулю. Для последних членов имеют место равенства

$$\begin{aligned} 2h_2 + n(n+1)h_0 &= 0 \quad \text{при} \quad n = 2m \\ 6h_3 + (n^2 + n - 2)h_1 &= 0 \quad \text{при} \quad n = 2m - 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Остальные коэффициенты многочлена (4.5) должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} n(n-1)h_n + [n(n+1) - (n-1)(n-2)]h_{n-2} &= 0, \\ (n-2)(n-3)h_{n-2} + [n(n+1) - (n-3)(n-4)]h_{n-4} &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

Разрешимость условий (4.7) и (4.8), налагаемых на коэффициенты функций $h_n(v_3)$ ($n \in N$), следует из последовательного использования уравнений (4.7) и (4.8). При

этом в силу равенства (4.6) условия треугольника, налагаемые на главные моменты инерции выполняются. Действительности функции $v_3(t)$ в соотношении (2.19) можно добиться выбором постоянной k : если $n = 2m$ то полагаем $k^2 < A_1^2 g_0^2 \kappa_0^2$; если $n = 2m - 1$, то полагаем $(k + A_3 h_1)^2 < A_1^2 g_0^2 \kappa_0^2$.

Наряду с линейными ИС (4.4) имеют место и нелинейные ИС, и первые интегралы. Например, в примере (4.3) ИС (1.10) таковы

$$\omega_i = -\frac{2}{7} h_2 v_i v_3 + \beta_i g_0, \quad i = 1, 2, \quad \omega_3 = h_2 \left(v_3^2 - \frac{1}{3} \right) \quad (4.9)$$

В случае (4.9) уравнения (2.18) имеют первый интеграл

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 - \frac{h^2}{7g_0} \left(3v_3^2 - \frac{7}{3} \right) v_3 = \frac{k}{7g_0 A_3},$$

который имеет третий порядок относительно v_3 .

5. Случай $g(v_3) \neq \text{const}$. Рассмотрим уравнение (2.17). Это — дифференциальное уравнение относительно двух функций: $h(v_3)$ и $g(v_3)$. Если функция $h(v_3)$ задана, то функцию $g(v_3)$ можно определить по формулам (2.23) и (2.24). Результаты разд. 4 дают основание для изучения полиномиальных по v_3 решений уравнения (2.17). Пусть в этом уравнении выполняется условие $k = 0$, а функции $h(v_3)$ и $g(v_3)$ — одночлены:

$$h(v_3) = h_n v_3^n, \quad g(v_3) = g_{n-1} v_3^{n-1}, \quad n \in N, \quad (5.1)$$

где h_n, g_{n-1} — постоянные параметры. Если главные моменты тела A_1 и A_3 удовлетворяют равенству

$$A_1 = A_3(n+2) \quad (n > 1), \quad (5.2)$$

то уравнение (2.17) при наличии равенств (5.1) становится тождеством (случай $n = 1$ рассмотрен в разд. 4). В силу соотношений (5.1) и (5.2) ИС (2.13) примут вид

$$\omega_i = v_3^{n-1} \left(-\frac{n}{n+2} h_n v_i + \beta_i g_{n-1} \right), \quad i = 1, 2, \quad \omega_3 = h_n v_3^n \quad (5.3)$$

На этом решении уравнения Пуассона (2.18) запишем так:

$$\dot{v}_u = (-1)^{3-i} v_3^n \left(\frac{2(n+1)}{n+2} h_n v_{3-i} - \beta_{3-i} g_{n-1} \right), \quad i = 1, 2, \quad \dot{v}_3 = g_{n-1} v_3^{n-1} (\beta_2 v_1 - \beta_1 v_2) \quad (5.4)$$

Уравнения (5.4) имеют ИС

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \frac{h_n(n+1)}{g_{n-1}(n+2)} v_3^2 = c_*; \quad c_* = \frac{nh_n}{(n+2)g_{n-1}} \quad (5.5)$$

(c_* — фиксированная постоянная)

Обратимся к формуле (2.19). В силу равенств (5.1) функция $F_*(v_3)$ (2.20) принимает значение

$$F_*(v_3) = v_3^{2(n-1)} A_3^2 [\kappa_0^2 (n+2)^2 g_{n-1}^2 (1 - v_3^2) - h_n^2 (n - (n+1)v_3^2)^2], \quad (5.6)$$

откуда следует, что для действительности решения (5.3), $v_j = v_j(t)$ ($j = 1, 2$), $v_3(t)$, достаточно потребовать выполнения неравенства

$$\kappa_0^2 > \frac{h_n^2 n^2}{g_{n-1}^2 (n+2)^2}, \quad (5.7)$$

которое показывает выбор параметров h_n, g_{n-1} , если заданы κ_0 и n .

Условие (5.2), налагаемое на моменты инерции, с учетом равенства $A_2 = A_1$ запишем в форме

$$A_2 = A_1 = A_3(n+2), \quad n \in N \quad (5.8)$$

Если $n = 2$, то из условия (5.8) получим условие Горячева–Чаплыгина классической задачи. Однако решение (5.1) для уравнений Эйлера–Пуассона не имеет смысла в силу структуры силовой функции. В разд. 4 при рассмотрении в случае $g(v_3) = \text{const}$ решений (4.5) получено условие (4.6). Полагая в условиях (4.6) и (5.8) $n = 1, 2, \dots$, получим для величины $n^2 + n + 1$ значения: 3, 7, 13, 21, ..., а для выражения $n + 2$ — значения 3, 4, 5, 6, ..., т.е. последнее из указанных множеств натуральных чисел содержит первое множество. Однако структура ИС (1.10) в случаях (4.6) и (5.8) различна. При этом следует иметь в виду, что $n \neq 0$ в силу предположения $h(v_3) \neq \text{const}$.

Решение (5.1) уравнения (2.17) может быть обобщено на основании соотношений (2.23) и (2.24). Приведем следующий пример:

$$h(v_3) = h_n v_3^n \quad (5.9)$$

Полагая $k = 0$, из соотношений (2.23) и (2.24) получим

$$g(v_3) = \mu_0 v_3^{n-1} [n - (n+1)v_3^2]^{\frac{A_3(n+2)-A_1}{2A_3(n+1)}}, \quad (5.10)$$

где μ_0 — постоянная. Из выражения (5.10) при наличии условия (5.2) следует рассмотренный случай (5.1). Показатель, зависящий от A_1 и A_3 , положителен при $\alpha_0 = \frac{A_1}{A_3} < n + 2$. Для выполнения неравенств треугольника связывающих A_j ($j = \overline{1,3}$) необходимо полагать $\alpha_0 > \frac{1}{2}$.

6. Случай постоянства модуля момента количества движения. Этот случай рассмотрен ранее [21]. Однако тщательный анализ показывает, что результаты статьи [21] требуют существенной доработки. Для этой цели рассмотрим уравнение (1.1). Зададим ИС

$$A_1 \omega_1^2 + A_2 \omega_2^2 + A_3 \omega_3^2 = c^2, \quad (6.1)$$

где c — постоянная. В случае (6.1) модуль момента количества движения тела постоянен: $|A\omega| = c$. Умножим скалярно обе части уравнения (1.1) на вектор $A\omega$:

$$\frac{1}{2} [(A\omega)^2]' = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v} \times A\omega) \quad (6.2)$$

Если имеет место ИС (6.1), то должно выполняться равенство

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v} \times A\omega) = 0, \quad (6.3)$$

и наоборот: если силовая функция $U = U(v_1, v_2, v_3)$ удовлетворяет равенству (6.3), то выполняется ИС (6.1). Неточность выводов [21] состоит в том, что не сделана проверка равенства (6.3). Особенно важно данное обстоятельство при исследовании решений уравнений (1.1) и (1.2) в рамках обратной задачи механики, так как в этом случае силовая функция U из (6.2) находится с помощью заданных ИС.

Следуя принятому ранее подходу [21], рассмотрим ИС в виде (1.10) и положим $A_2 = A_1$. Подставим в равенство (6.3) значения (2.13) и величины (2.14). Тогда получим уравнение относительно $g^2(v_3)$

$$A_1^2 \kappa_0^2 g(v_3) g'(v_3) + 2A_3^2 h(v_3) h'(v_3) + A_3 h''(v_3) [A_3 v_3 h(v_3) - A_3 (1 - v_3^2) h''(v_3) - k] + 2A_3^2 v_3 (h'(v_3))^2 = 0 \quad (6.4)$$

Непосредственной подстановкой можно показать, что оно имеет решение

$$g^2(v_3) = \frac{1}{A_1^2 \kappa_0^2} [A_3^2 (1 - v_3^2) (h'(v_3))^2 + 2A_3 h'(v_3) (k - A_3 v_3 h(v_3)) - A_3^2 h^2(v_3) + c_*] \quad (6.5)$$

Если в этом решении произвольную постоянную c_* выбрать так, что $c_* = c^2$, где c — постоянная из (6.1), то из равенства (6.5) следует ИС (6.1), т.е. не в общем случае решение уравнения (6.5) приводится к ИС (6.1), что ранее [21] не отмечено.

Подставим выражение (6.5) в уравнение (2.17):

$$\begin{aligned} h''(v_3) [2kA_3 v_3 h(v_3) - A_3^2 h^2(v_3) - k^2 + A_3^2 \beta_0^2 (1 - v_3^2)] + \\ + A_3 (h'(v_3))^2 [h(v_3) (A_1 + A_3 + (A_3 - A_1) v_3^2) - 2k v_3] + \\ + 2h'(v_3) \{h(v_3) [kA_1 + A_3 v_3 h(v_3) (A_3 - A_1)] - A_3^2 \beta_0^2 v_3\} + \\ + A_3 (A_3 - A_1) h(v_3) (h^2(v_3) - \beta_0^2) = 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где вместо c^2 введен параметр β_0 : $c^2 = A_3^2 \beta_0^2$. Уравнение (6.6) служит дифференциальным уравнением относительно функции $h(v_3)$, после нахождения которой функция $g(v_3)$ находится из равенства (6.5).

Сведение задачи интегрирования уравнений (1.1) и (1.2) на ИС (2.13), (6.1) будем проводить с использованием соотношений (2.15), (2.19) и (2.20).

В дополнение к равенствам (2.3), запишем основные формулы

$$\varphi = \varphi_0 + \arcsin \frac{\Phi_1(v_3)}{A_1 \kappa_0 g(v_3) \sqrt{1 - v_3^2}}, \quad \int_{v_3^{(0)}}^{v_3} \frac{dv_3}{\sqrt{H(v_3)}} = -\frac{1}{A_1} (t - t_0), \quad (6.7)$$

где

$$H(v_3) = (A_3^2 \beta_0^2 - k^2) (1 - v_3^2) - (A_3 h(v_3) - k v_3)^2 \quad (6.8)$$

По второй формуле (6.7) путем обращения интеграла определяется функция $v_3(t)$, по первой формуле (6.7) — $\varphi = \varphi(t)$, а из равенств (2.3) — функции $v_1 = v_1(t)$ и $v_2 = v_2(t)$. При этом должно выполняться условие неотрицательности функции (6.8)

$$H(v_3) > 0 \quad (6.9)$$

Например, следует исключить случай $\beta_0 = 0$, $k = 0$.

7. Интегрирование уравнения (6.6). Интегрирование уравнения (6.6) будем проводить при условии (6.9). Также необходимо учитывать вид функции $g^2(v_3)$ (6.5) при $c_* = A_3^2 \beta_0^2$. Для этого представим равенство (6.5) иначе:

$$g^2(v_3) = \frac{1}{A_1 \kappa_0^2 (1 - v_3^2)} \left[A_3^2 (1 - v_3^2) \left(h'(v_3) + \frac{k - A_3 v_3 h(v_3)}{1 - v_3^2} \right)^2 + H(v_3) \right] \quad (7.1)$$

На основании неравенства $1 - v_3^2 > 0$ получим, что при условии (6.9) правая часть равенства (7.1) положительна, и поэтому функция $g(v_3)$ в этом случае действительна.

Введение новых переменных

$$v_3 = y_1(v_3), \quad h(v_3) = y_2(v_3), \quad h'(v_3) = y_3(v_3)$$

приводит уравнение (6.6) к следующей динамической системе:

$$\begin{aligned} y_2'(v_3) &= 1, \quad y_3'(v_3) = y_3(v_3) \\ y_3'(v_3) &= \frac{1}{H(v_3)} \{-A_3 y_3^2(v_3)[y_2(v_3)(A_1 + A_3 + (A_3 - A_1)y_1^2(v_3)) - 2ky_1(v_3)] + \\ &+ 2y_3(v_3)[A_3\beta_0^2 y_1(v_3) - y_2(v_3)(kA_1 + A_3 y_1(v_3)y_2(v_3))(A_3 - A_1)] + \\ &+ A_3(A_3 - A_1)y_2(v_3)(\beta_0^2 - y_2^2(v_3))\} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Докажем существование решения этой системы. Выберем начальные данные (при $v_3 = v_3^{(0)}$): $y_1(v_3^{(0)})$ и $y_2(v_3^{(0)})$ так, чтобы выполнялись условия

$$y_1(v_3^{(0)}) \in (-1, 1), \quad H(v_3^{(0)}) > 0 \quad (7.3)$$

При условиях (7.3) сохранен геометрический смысл переменной v_3 , а также выполнены требования действительности функции $g(v_3)$ из равенства (7.1) и второй функции $v_3(t)$ из формулы (6.7). Кроме этого, существуют непрерывные частные производные правых частей системы (7.2) по переменным y_j ($j = \overline{1, 3}$). Таким образом, система (7.2) допускает единственное решение $y_j(v_3)$ ($j = \overline{1, 3}$) в области $v_3 \in [v_3^{(0)}, v_3^{(0)} + \alpha_0]$, где α_0 — постоянная [24]. Следовательно, система дифференциальных уравнений (1.1), (1.2) допускает ИС (1.10), (6.1). Зависимость $v_3(t)$ устанавливается путем обращения интеграла из второй формулы (6.7).

8. Интерпретация полученных результатов. В результате решения обратной задачи получены условия существования трех нелинейных ИС уравнений движения динамически симметричного тела в потенциальном силовом поле; установлены два дифференциальных уравнения относительно заданных функций, характеризующих исходные ИС. Приведены примеры полиномиальных по вспомогательной переменной решений редуцированных уравнений. Особое значение имеют условия, налагаемые на моменты инерции

$$A_2 = A_1 = A_3(n+2), \quad A_2 = A_1 = A_3(n^2 + n + 1), \quad (8.1)$$

которые в данной статье позволяют построить новые решения уравнений (1.4)–(1.7) при $n \in N$. Если в первом условии положить $n = 2$, то получим условие Горячева–Чаплыгина, рассмотренное в классической задаче о движении тяжелого твердого тела [14]. Но построенное здесь решение не является аналогом решения Горячева–Чаплыгина, так как для них силовая функция $U(v_1, v_2, v_3)$ не совпадает с силовой функцией для уравнений Эйлера–Пуассона. При $n > 2$ первое условие (8.1) и при $n \in N$ второе условие — новые условия в динамике твердого тела. Формально первое условие можно рассматривать и при $n = 0$, т.е. можно получить и условие Ковалевской. Но при этом построенные здесь решения теряют смысл.

Рассмотрена задача об исследовании ИС уравнений движения тела, которые характеризуют постоянство модуля момента количества движения тела. Найдено дифференциальное уравнение относительно третьей компоненты вектора угловой скорости. Показано, что результат, полученный ранее [21], требует некоторого уточнения на значение параметра, который характеризует указанное выше ИС. Кроме этого, установлено, что задача [21] имеет решение только в случае, когда силовая функция, ха-

рактеризующаяся заданными ИС, будет формировать первый интеграл исходных уравнений (это свойство ранее [21] не проверялось).

Полученный результат не может быть установлен с помощью метода, предложенного ранее [16], так как, согласно этому методу, должно выполняться условие

$$A_1 \left(\frac{\partial \omega_1(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_1} + \frac{\partial \omega_2(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_2} \right) + A_3 \frac{\partial \omega_3(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_3} = 0, \quad (8.2)$$

которое в силу соотношений (1.10) противоречит равенству (2.12), в связи с тем, что интеграл моментов (второе соотношение (1.8)) не обращается в тождество на ИС (1.10), (2.12). Лишь при выполнении этого свойства имеет место равенство (8.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горячев Д.Н. Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава, 1910. 62 с.
2. Горячев Д.Н. Новые случаи движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Варшав. унив. изв. 1915, кн. 3. С. 1–11.
3. Yehia H.M. Transformatins of mechanical systems with cyclic coordinates and new integrable problems // J. Phys. A: Math.-Con. 2001. V. 34. P. 11167–11183.
4. Yehia H.M. Kovalevskaya's integrable case: generalizations and related new results // Regular Chaotic Dyn. 2003. V. 8. № 3. P. 337–348.
5. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 384 с.
6. Yehia H.M. New solvable problems in the dynamics of a rigid body about a fixed point in a potential field // J. Mech. Res. Commun. 2014. V. 57. P. 44–48.
7. Харламов П.В. Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела // Механика твердого тела: Межвед. сб. науч. тр. 2000. Вып. 30. С. 1–12.
8. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. В 2-х т. Т. 2. Ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с. = *Levi-Civita T., Amaldi U. Lezioni di Meccanica Razionale. V. 2. Bologna: Zanichelli, 1927.*
9. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. 1974. Вып. 6. С. 15–24.
10. Kharlamov P.V. New methods in the dynamics of system of rigid bodies // Dynamics of Multibody System: Proc. IUTAM Symp. Berlin: Springer, 1978. P. 133–143.
11. Зиглин С.Л. Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Тр. Моск. матем. об-ва. 1980. Т. 41. С. 287–303.
12. Козлов В.В., О니щенко Д.А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // ДАН СССР. 1982. Т. 266. № 6. С. 1298–1300.
13. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 1978. 294 с.
14. Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 2012. 401 с.
15. Горр Г.В., Ковалев А.М. Движение гиростата. Киев: Наук. думка, 2013. 408 с.
16. Горр Г.В. Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии). М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. 424 с.
17. Горр Г.В., Илюхин А.А., Харламова Е.И. Об особых решениях одной формы уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. 1974. Вып. 6. С. 3–9.
18. Горр Г.В., Илюхин А.А. Случаи постоянства модуля момента количества движения гиростата // Механика твердого тела. 1974. Вып. 6. С. 9–15.

19. Горр Г.В., Мазнев А.В. О понижении порядка системы дифференциальных уравнений движения твердого тела в линейном поле и в поле сил Лоренца // Механика твердого тела. 1987. Вып. 19. С. 33–42.
20. Горр Г.В., Мазнев А.В. Об интегрировании уравнений динамики твердого тела на инвариантных многообразиях // Механика твердого тела. 2016. Вып. 46. С. 25–36.
21. Горр Г.В., Мазнев А.В. О решениях уравнений движения твердого тела в потенциальном силовом поле в случае постоянного модуля кинетического момента // Механика твердого тела. 2017. Вып. 47. С. 21–32.
22. Комаров И.В., Кузнецов В.Б. Обобщенный гироскоп Горячева–Чаплыгина в квантовой механике // Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. Зап. научных сем. ЛОМИ АН СССР. 1987. Т. 9. С. 134–141.
23. Комаров И.В., Кузнецов В.Б. Квазиклассическое квантование волчка Ковалевской // Теор. и мат. физика. 1987. Т. 73. № 3. С. 335–347.
24. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965. 331 с.