ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2019, том 83, № 1, с. 158–172

*УДК 539.3*

# МОДЕЛЬ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МУРНАГАНА

© 2019 г. О. Л. Швед*

*Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*

** e-mail: swed@newman.bas-net.by*

Поступила в редакцию 14.08.2018 г.

Модель упругого материала Мурнагана обобщается на упругопластический материал. Предполагается, что активный процесс происходит попеременным чередованием пластических и упругих состояний. Деформационный градиент заменяется неособенным тензором, и записываются определяющие уравнения в конечном виде. В дополнение к постулату Грина о существовании потенциала напряжений предполагается существование потенциала скорости напряжений, для которой однозначно находится объективная производная. Она получается модификацией производной Грина–Нахди, где спин тензора поворота, сопровождающего общую деформацию, заменяется спином тензора поворота, сопровождающего упругую деформацию. Определяется девиаторное сечение поверхности текучести в пространстве напряжений, и формулируются дифференциальные определяющие уравнения. Описывается рост упругой деформационной анизотропии при течении, приводящей к возможному возникновению макротрещины.

*Ключевые слова:* упругий материал Мурнагана, двойная потенциальность, упругопластический материал Мурнагана

**DOI:** 10.1134/S0032823519010144

Проблема конструирования общей теории “независимой от скоростей” упругопластичности при конечных деформациях и поворотах до сих пор остается актуальной. Имеются обзоры работ в этом направлении, отражающие разные точки зрения, идеи и подходы (см., например, [1, 2]).

Возможный подход к разработке нелинейной теории упругопластичности состоит в обобщении нелинейной модели упругости при максимальном учете информации об упругом поведении материалов. Подходящей исходной моделью материала является модель упругости Мурнагана [3, 4]. Пять ее упругих постоянных при изотропии определяются экспериментально [4]. В представлении удельной потенциальной энергии упругой деформации в форме Мурнагана заложена возможность описания возникновения и развития упругой деформационной анизотропии материала [3]. Это явление не описывается существующими теориями упругопластичности.

Поскольку девиатор упругих напряжений не игнорируется, появляется возможность использовать требование двойной потенциальности: в напряжениях и их скоростях [5]. Применяется понятие поверхности нагружения, которую будем называть поверхностью текучести в пространстве напряжений. При течении девиатор скорости напряжений, вычисляемый по соотношениям нелинейной упругости при условии несжимаемости, проектируется на девиаторное сечение поверхности текучести. Для задания скорости напряжений необходимо найти упругий спин, чтобы ввести ассоциированную с ним объективную производную тензора напряжений. Требуется определить девиаторное сечение поверхности текучести и сформулировать определяющие уравнения. Используем обозначения, принятые в монографии А.И. Лурье [4].

**1. Упругий спин в упругом состоянии.** Элемент материала может быть либо в пассивном процессе (тогда находится в упругом состоянии), либо в активном. Деформационный градиент $\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$ заменяется неособенным тензором $\mathbf{F}_e$, и в условиях изотропии они совпадают. В упругом состоянии дифференциальное уравнение для обоих тензоров будет одинаковым:

$$\dot{\mathbf{F}}_e = \nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}_e, \tag{1.1}$$

где $\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ — транспонированный градиент скорости перемещений. Согласно полярному разложению,

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}},$$

где $\mathbf{O}$ — собственно ортогональный тензор упругого поворота, сопровождающего упругую деформацию.

*Предположение* 1. Активный процесс для неидеального материала представляет собой попеременное чередование пластических и упругих состояний. В пластическом состоянии (при течении) материал несжимаемый.

В предположениях 1 и 2 используются идеи В.Д. Клюшникова [6].

Возникает вопрос об определении тензора $\mathbf{F}_e$ при течении.

Найдем соотношение для тензора упругого спина в упругом состоянии $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} = -\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{O}}$. Из равенства (1.1) имеем

$$\begin{gathered}
\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}_e = \dot{\mathbf{F}}_e = (\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U})^{\bullet} = \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{U}} \\
\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = (\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{F}_e^{-1} = (\dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{O} = \mathbf{\Omega} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{O} \\
\nabla\mathbf{v} = -\mathbf{\Omega} + \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{O} \\
\mathbf{W} = 2^{-1}(\nabla\mathbf{v}^{\mathrm{T}} - \nabla\mathbf{v}), \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{W} - 2^{-1}\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{O},
\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{W}$ — тензор вихря.

Преобразуем последнее соотношение (1.2) для тензора упругого спина $\mathbf{\Omega}$ к более удобному виду. Получаем $\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}_e = \mathbf{G}$ — меру упругих деформаций Коши–Грина. По Л.М. Зубову [7] решение уравнения $\dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{G}}$ относительно $\dot{\mathbf{U}}$ имеет вид

$$\dot{\mathbf{U}} = 2^{-1}(L_1L_2 - L_3)^{-1}((L_1^2\mathbf{E} - \mathbf{G}) \cdot \dot{\mathbf{G}} + (\mathbf{U} - L_1\mathbf{E}) \cdot \dot{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{U} + L_3(L_1\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{E}) \cdot \dot{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{U}^{-1})$$

($L_k$ — k-й главный инвариант тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$). Учитывая, что

$$\dot{\mathbf{G}} = 2\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} = 2\mathbf{U} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{U}$$

($\mathbf{D}$ — тензор скорости деформаций, $\mathbf{d} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}$) и теорему Гамильтона–Кэли $\mathbf{U}^3 = L_1\mathbf{G} - L_2\mathbf{U} + L_3\mathbf{E}$, находим

$$\begin{gathered}
\dot{\mathbf{U}} = (L_1L_2 - L_3)^{-1}((L_1^2 + L_2)\mathbf{U} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{G} - L_1(\mathbf{G} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{G}) + \\
+ L_1L_3\mathbf{d} - L_3(\mathbf{U} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{U}))
\end{gathered}$$

Используя связи тензоров

$$\mathbf{G} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}$$

получаем

$$\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{O}=\left(L_1L_2-L_3\right)^{-1}((L_1^2+L_2)\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}-$$
$$-L_1(\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}+\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F})+L_1L_3\mathbf{D}-L_3(\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{D}\cdot\mathbf{V})),$$

где $\mathbf{F}=\mathbf{F}_e\cdot\mathbf{F}_e^{\mathrm{T}}=\mathbf{V}^2$ — мера упругой деформации Фингера.

Вычисляем

$$2^{-1}\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{-1}-\mathbf{U}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{U}})\cdot\mathbf{O}=2^{-1}\left(L_1L_2-L_3\right)^{-1}((L_1^2+L_2)\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}+$$
$$+L_1L_3\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}^{-1}-L_1(\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V})-L_3(\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}^{-1}+\mathbf{D})-(L_1^2+L_2)\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}-$$
$$-\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}-L_1L_3\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{D}+L_1(\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}+\mathbf{D}\cdot\mathbf{F})+L_3(\mathbf{D}+\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}))$$

Учитывая дальше, что $L_3\mathbf{V}^{-1}=\mathbf{F}-L_1\mathbf{V}+L_2\mathbf{E}$, имеем

$$2^{-1}\mathbf{O}^{\mathrm{T}}\cdot(\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}^{-1}-\mathbf{U}^{-1}\cdot\dot{\mathbf{U}})\cdot\mathbf{O}=\left(L_1L_2-L_3\right)^{-1}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}-\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}+$$
$$+L_1(\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}-\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}-L_1(\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}-\mathbf{V}\cdot\mathbf{D})))=$$
$$=(L_1L_2-L_3)^{-1}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}-\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}+L_1L_3(\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}^{-1}-\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{D}))$$

Окончательно получаем

$$\mathbf{\Omega}=\mathbf{W}-(L_1L_2-L_3)^{-1}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}-\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}+L_1L_3(\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}^{-1}-\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{D}))\tag{1.3}$$

**2. Определяющие уравнения в конечном виде.** Подход Мурнагана заключается в представлении удельной потенциальной энергии упругой деформации (потенциала напряжений) полиномом по степеням компонент тензора Коши–Грина $\mathbf{C}=2^{-1}(\mathbf{G}-\mathbf{E})$:

$$э=э_0+э_2+э_3+C,\tag{2.1}$$

где $э_0(I_i)$ — изотропный потенциал ($i=\overline{1,3}$), $I_i$ — главные инварианты мер $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$; $э_2(\delta_p,\mathbf{G})$ ($p=\overline{1,21}$) и $э_3(\delta_p,\mathbf{G})$ ($p=\overline{22,77}$) — анизотропные структуры второй и третьей степени, $\delta_p$ — параметры анизотропии; $C$ — минимальная скалярная величина, обеспечивающая условие $э\geq 0$, ее наличие в равенстве (2.1) для теории упругости несущественно, а в теории упругопластичности она изменяется при течении и должна учитываться. Первоначально материал предполагается изотропным, значения параметров анизотропии $\delta_p=0$, и тогда э с точностью до слагаемого $C$ переходит в потенциал $э_0$ [4]:

$$э_0=4^{-1}(4^{-1}(-12\lambda-8\mu+9\nu_1+18\nu_2+8\nu_3)I_1+4^{-1}(2\lambda+4\mu-3\nu_1-10\nu_2-8\nu_3)I_1^2+$$
$$+(-2\mu+3\nu_2+4\nu_3)I_2-(\nu_2+2\nu_3)I_1I_2+12^{-1}(\nu_1+6\nu_2+8\nu_3)I_1^3+2\nu_3I_3),\tag{2.2}$$

где $\lambda$ и $\mu$ — постоянные Ламе второго и $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$ — третьего порядков.

Обозначим ортонормированные триэдры: $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ — неподвижный и $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — образованный собственными векторами тензора напряжений Коши. Пусть индексы $i,j,k,l,n,m\in\{1,2,3\}$ и зависят от $p\in\left\{\overline{1,77}\right\}$.

Введем обозначения

$$\hat{G}_{ij}=\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{c}_j-\delta_i^j,\quad \tilde{\mathbf{c}}_{ij}=\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j+\mathbf{c}_j\mathbf{c}_i,\quad \tilde{\mathbf{C}}_{ij}=\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j+\mathbf{C}_j\mathbf{C}_i$$

Величины $э_{2p}$ и $э_{3p}$ в выражениях $э_2 = \sum \delta_p э_{2p}$ и $э_3 = \sum \delta_p э_{3p}$ имеют вид

$$
\begin{gathered}
э_{2p} = 4^{-1}(\hat{G}_{ij}\hat{G}_{kl} - \delta_i^j \delta_k^l) \quad \left(p \in \left\{\overline{1,21}\right\}\right) \\
э_{3p} = 8^{-1}(\hat{G}_{ij}\hat{G}_{kl}\hat{G}_{nm} + \delta_i^j \delta_k^l \delta_n^m) \quad \left(p \in \left\{\overline{22,77}\right\}\right)
\end{gathered} \tag{2.3}
$$

Учитывая равенства

$$
\frac{\partial}{\partial \mathbf{G}}(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{c}_k) = 2^{-1}\tilde{\mathbf{c}}_{ik}, \quad \mathbf{F}_e \cdot \tilde{\mathbf{c}}_{ij} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} = \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathrm{C}}_{ik} \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{C}_i = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{O}
$$

из соотношений (2.1)–(2.3) находим определяющее уравнение для тензора напряжений Коши

$$
\mathbf{T} = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial э}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}} = \mathbf{T}_0 + \sum \delta_p \mathbf{T}_p \tag{2.4}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathbf{T}_0 = 2L_3^{-1}(\varphi_0 \mathbf{E} + \varphi_1 \mathbf{F} + \varphi_2 \mathbf{F}^2) \\
\varphi_0 = a_0 I_3, \quad \varphi_1 = b_0 + b_1 I_1 + b_2 I_1^2 + b_3 I_2, \quad \varphi_2 = c_0 + c_1 I_1 \\
a_0 = 2^{-1}\nu_3, \quad b_0 = 16^{-1}(-12\lambda - 8\mu + 9\nu_1 + 18\nu_2 + 8\nu_3) \\
b_1 = 8^{-1}(2\lambda - 3\nu_1 - 4\nu_2), \quad b_2 = 16^{-1}(\nu_1 + 2\nu_2), \quad b_3 = -4^{-1}(\nu_2 + 2\nu_3) \\
c_0 = 4^{-1}(2\mu - 3\nu_2 - 4\nu_3), \quad c_1 = -b_3
\end{gathered} \tag{2.5}
$$

$$
\mathbf{T}_p = 4^{-1}L_3^{-1}(\hat{G}_{kl}\mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{C}}_{ij} \cdot \mathbf{V} + \hat{G}_{ij}\mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{C}}_{kl} \cdot \mathbf{V}) \quad \left(p \in \left\{\overline{1,21}\right\}\right) \tag{2.6}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathbf{T}_p = 8^{-1}L_3^{-1}(\hat{G}_{kl}\hat{G}_{nm}\mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{C}}_{ij} \cdot \mathbf{V} + \hat{G}_{ij}\hat{G}_{nm}\mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{C}}_{kl} \cdot \mathbf{V} + \hat{G}_{ij}\hat{G}_{kl}\mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{C}}_{nm} \cdot \mathbf{V}) \\
\left(p \in \left\{\overline{22,77}\right\}\right)
\end{gathered} \tag{2.7}
$$

Уравнения (2.1)–(2.7) повторяют известные соотношения [3, 4] с учетом выполненной замены деформационного градиента. Напряжения в условиях упругопластичности для анизотропного материала не связаны с мерой деформации, порождаемой чисто геометрическими построениями, как это получается в условиях упругости [5].

**3. Упругий спин в пластическом состоянии.**

*Предположение* 2. Существует скаляр $\phi(\mathbf{D})$ – потенциал скорости напряжений

$$
\frac{\partial \phi(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} = \overset{\Omega}{\mathbf{T}}; \quad \overset{\Omega}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega}, \tag{3.1}
$$

где $\overset{\Omega}{\mathbf{T}}$ – объективная О-производная тензора $\mathbf{T}$. Выбор скорости напряжений обосновывается определением тензора $\mathbf{F}_e$ при течении.

Оператор $\mathbf{Q}(\mathbf{D})$ вводится как указанная О-производная тензора $\operatorname{dev}\mathbf{T}$, вычисленная по соотношению (1.1) при условии несжимаемости.

Имеют место следующие три факта.

1. *Девиатор* $\mathbf{Q}(\mathbf{D})$ *линеен по компонентам тензора* $\mathbf{D}$ *и имеет потенциал.*

Производная Яуманна тензора напряжений Коши $\mathbf{T}$ имеет вид

$$
\overset{\mathrm{W}}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}
$$

Учитывая, что производная Яуманна обладает свойствами обычной производной, соотношение $(\hat{G}_{ij})^{\bullet} = 2\mathbf{C}_i \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{C}_j$ и условие несжимаемости $\mathbf{D} \cdot\cdot \mathbf{E} = 0$, при вычислении по соотношению (1.1) получаем

$$
\begin{gathered}
\operatorname{dev}\overset{\mathrm{W}}{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 \\
\mathbf{Q}_0 = \operatorname{dev}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{T} + 4L_3^{-1}(d\mathbf{F}\cdot\cdot\,\mathbf{D} + c_1\mathbf{F}^2\cdot\cdot\,\mathbf{D})\mathbf{F} + c_1\mathbf{F}\cdot\cdot\,\mathbf{D}\mathbf{F}^2 - \\
- \varphi_0\mathbf{D} + \varphi_2\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F})) \quad (d = b_1 + (2b_2 + b_3)I_1)
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

Девиатор $\mathbf{Q}_0$ имеет потенциал:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{Q}_0 = \frac{\partial}{\partial\mathbf{D}}(2^{-1}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{T})\cdot\cdot\,\mathbf{D} + 4L_3^{-1}(-\varphi_0 2^{-1}(\mathbf{E}\cdot\cdot\,\mathbf{D}^2) + \varphi_2 2^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}\cdot\cdot\,\mathbf{D} + \\
+ d2^{-1}(\mathbf{F}\cdot\cdot\,\mathbf{D})^2 + c_1\mathbf{F}\cdot\cdot\,\mathbf{D}\mathbf{F}^2\cdot\cdot\,\mathbf{D}))
\end{gathered}
$$

Справедливо соотношение

$$
\frac{\partial}{\partial\mathbf{D}}(\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_j) = \operatorname{dev}2^{-1}\mathbf{V}\cdot\tilde{\mathbf{C}}_{ij}\cdot\mathbf{V},
$$

которое используется дальше. Пусть $\delta\mathbf{D}$ – вариация тензора $\mathbf{D}$. Получаем

$$
\begin{gathered}
\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot(\mathbf{D} + \delta\mathbf{D})\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_j - \mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_j = \mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\delta\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_j = \\
= \mathbf{V}\cdot\delta\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\cdot\,2^{-1}\tilde{\mathbf{C}}_{ij} = \mathbf{V}\cdot 2^{-1}\tilde{\mathbf{C}}_{ij}\cdot\mathbf{V}\cdot\cdot\,\delta\mathbf{D} = \operatorname{dev}(2^{-1}\mathbf{V}\cdot\tilde{\mathbf{C}}_{ij}\cdot\mathbf{V})\cdot\cdot\,\delta\mathbf{D}^{\mathrm{T}} \\
(\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\mathrm{T}})
\end{gathered}
$$

По определению производной скаляра по тензору указанное соотношение выполняется.

Произвольные величины $\mathbf{Q}_{2p}\left(p \in \left\{\overline{1,21}\right\}\right)$ и $\mathbf{Q}_{3p}\left(p \in \left\{\overline{22,77}\right\}\right)$ в аддитивных разложениях $\mathbf{Q}_2 = \sum\mathbf{Q}_{2p}$ и $\mathbf{Q}_3 = \sum\mathbf{Q}_{3p}$ соответственно имеют вид

$$
\mathbf{Q}_{2p} = \delta_p\operatorname{dev}2^{-1}L_3^{-1}\mathbf{V}\cdot(\mathbf{C}_k\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_l\tilde{\mathbf{C}}_{ij} + \mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_j\mathbf{V}\cdot\tilde{\mathbf{C}}_{kl})\cdot\mathbf{V}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathbf{Q}_{3p} = \delta_p\operatorname{dev}4^{-1}L_3^{-1}\mathbf{V}\cdot((\mathbf{C}_n\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_m\hat{G}_{kl} + \mathbf{C}_k\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_l\hat{G}_{nm})\tilde{\mathbf{C}}_{ij} + \\
+ (\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_j\hat{G}_{nm} + \mathbf{C}_n\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_m\hat{G}_{ij})\tilde{\mathbf{C}}_{kl} + \\
+ (\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_j\hat{G}_{kl} + \mathbf{C}_k\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_l\hat{G}_{ij})\tilde{\mathbf{C}}_{nm})\cdot\mathbf{V}
\end{gathered}
$$

Все величины $\mathbf{Q}_{2p}$ и $\mathbf{Q}_{3p}$ потенциальны:

$$
\mathbf{Q}_{2p} = \frac{\partial}{\partial\mathrm{D}}\delta_p L_3^{-1}\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_j\mathbf{C}_k\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_l
$$

$$
\begin{gathered}
\mathbf{Q}_{3p} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{D}}\delta_p L_3^{-1}(\hat{G}_{nm}\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_j\mathbf{C}_k\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_l + \\
+ \hat{G}_{ij}\mathbf{C}_k\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_l\mathbf{C}_n\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_m + \hat{G}_{kl}\mathbf{C}_n\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_m\mathbf{C}_i\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{C}_j)
\end{gathered}
$$

Следовательно, оба девиатора $\mathbf{Q}_2$ и $\mathbf{Q}_3$ имеют потенциалы.

Согласно равенству (3.2), и тензор $\operatorname{dev}\overset{\mathrm{W}}{\mathbf{T}}$ имеет потенциал. О-производную тензора $\mathbf{T}$ (см. вторую формулу (3.1)) можно записать в виде

$$
\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = \overset{\mathrm{W}}{\mathbf{T}} + (\mathbf{W} - \mathbf{\Omega})\cdot\mathbf{T} - \mathbf{T}\cdot(\mathbf{W} - \mathbf{\Omega})
$$

Используя равенство (1.3), вычисляем симметричный девиатор

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{W}-\mathbf{\Omega})\cdot\mathbf{T}-\mathbf{T}\cdot(\mathbf{W}-\mathbf{\Omega}) = (\mathbf{W}-\mathbf{\Omega})\cdot\operatorname{dev}\mathbf{T}-\operatorname{dev}\mathbf{T}\cdot(\mathbf{W}-\mathbf{\Omega}) = \\
= (L_1L_2-L_3)^{-1}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}\cdot\operatorname{dev}\mathbf{T}+\operatorname{dev}\mathbf{T}\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}-\operatorname{dev}\mathbf{T}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}- \\
-\mathbf{V}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}\cdot\operatorname{dev}\mathbf{T}+L_1L_3(\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}^{-1}\cdot\operatorname{dev}\mathbf{T}+\operatorname{dev}\mathbf{T}\cdot\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{D}- \\
-\operatorname{dev}\mathbf{T}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}^{-1}-\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{D}\cdot\operatorname{dev}\mathbf{T})) = \mathbf{Q}_4
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

Приняв обозначения

$$\mathbf{f}_{ij}^{\pm} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \pm \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i$$

введем покомпонентные представления тензоров в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$

$$
\begin{gathered}
\operatorname{dev}\mathbf{T} = t_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+t_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2-(t_1+t_2)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{W} = w_1\mathbf{f}_{12}^{-}+w_2\mathbf{f}_{13}^{-}+w_3\mathbf{f}_{23}^{-} \\
\mathbf{\Omega} = \omega_1\mathbf{f}_{12}^{-}+\omega_2\mathbf{f}_{13}^{-}+\omega_3\mathbf{f}_{23}^{-}
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

$$\mathbf{Q}_4 = q_4\mathbf{f}_{12}^{+}+q_5\mathbf{f}_{13}^{+}+q_6\mathbf{f}_{23}^{+} \tag{3.5}$$

$$
\begin{gathered}
\mathbf{D} = d_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+d_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2-(d_1+d_2)\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3+d_4\mathbf{f}_{12}^{+}+d_5\mathbf{f}_{13}^{+}+d_6\mathbf{f}_{23}^{+} \\
\mathbf{V} = V_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+V_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+V_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3+V_4\mathbf{f}_{12}^{+}+V_5d_5\mathbf{f}_{13}^{+}+V_6\mathbf{f}_{23}^{+}
\end{gathered}
\tag{3.6}
$$

Из равенств (3.4) получаем

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{W}-\mathbf{\Omega})\cdot\mathbf{T}-\mathbf{T}\cdot(\mathbf{W}-\mathbf{\Omega}) = -s_1(t_1-t_2)\mathbf{f}_{12}^{+}-s_2(2t_1+t_2)\mathbf{f}_{13}^{+}-s_3(t_1+2t_2)\mathbf{f}_{23}^{+} \\
s_i = w_i-\omega_i
\end{gathered}
\tag{3.7}
$$

Компоненты девиатора $\mathrm{Q}_4$, согласно формулам (3.3), (3.5)–(3.7), имеют вид

$$
\begin{aligned}
q_4 &= A_1d_1+A_2d_2+A_4(t_1-t_2)d_4+A_5d_5+A_6d_6 \\
q_5 &= B_1d_1+B_2d_2+B_4d_4+B_5(2t_1+t_2)d_5+B_6d_6 \\
q_6 &= C_1d_1+C_2d_2+C_4d_4+C_5d_5+C_6(t_1+2t_2)d_6
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Величины $A_i$, $B_i$ и $C_i$ зависят только от $V_j$ $(i, j = \overline{1,6})$.

Величины $d_1$ и $d_2$ не могут входить в выражения для $q_4$, $q_5$, $q_6$, так как иначе в выражении для $\mathbf{Q}_4$ по условию потенциальности должны присутствовать базисные диады $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$, которых там нет (см. равенство (3.5)). Поэтому соотношения (3.8) преобразуются:

$$
\begin{aligned}
q_4 &= A_4(t_1-t_2)d_4+A_5d_5+A_6d_6 \\
q_5 &= B_4d_4+B_5d_5+B_6(2t_1+t_2)d_6 \\
q_6 &= C_4d_4+C_5d_5+C_6(t_1+2t_2)d_6
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Возможно обеспечение существования потенциала $\mathbf{Q}_4$ только при изменении соотношений (3.9):

$$
\begin{aligned}
q_4 &= A_4(t_1-t_2)d_4+2^{-1}(A_5+B_4)d_5+2^{-1}(A_6+C_4)d_6 \\
q_5 &= 2^{-1}(A_5+B_4)d_4+B_5(2t_1+t_2)d_5+2^{-1}(B_6+C_5)d_6 \\
q_6 &= 2^{-1}(A_6+C_4)d_4+2^{-1}(B_6+C_5)d_5+C_6(t_1+2t_2)d_6
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Введем обозначения

$$\hat{D}_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_j, \quad \hat{V}_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_j$$

Имеет место потенциальность:

$$\begin{gathered}
\mathbf{Q}_4 = (A_4(t_1 - t_2)\hat{D}_{12} + 2^{-1}(A_5 + B_4)\hat{D}_{23} + 2^{-1}(A_6 + C_4)\hat{D}_{23})\mathbf{f}_{12}^{+} + \\
+ (2^{-1}(A_5 + B_4)\hat{D}_{12} + B_5(2t_1 + t_2)\hat{D}_{23} + 2^{-1}(B_6 + C_5)\hat{D}_{23})\mathbf{f}_{13}^{+} + \\
+ (2^{-1}(A_6 + C_4)\hat{D}_{12} + 2^{-1}(B_6 + C_5)\hat{D}_{13} + C_6(t_1 + 2t_2)\hat{D}_{23})\mathbf{f}_{23}^{+} = \\
= \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}}(A_4(t_1 - t_2)(\hat{D}_{12})^2 + B_5(2t_1 + t_2)(\hat{D}_{13})^2 + C_6(t_1 + 2t_2)(\hat{D}_{23})^2 + \\
+ (A_5 + B_4)\hat{D}_{12}\hat{D}_{13} + (A_6 + C_4)\hat{D}_{23}\hat{D}_{12} + (B_6 + C_5)\hat{D}_{13}\hat{D}_{23})
\end{gathered}$$

Отыскиваем спин из соотношений (3.3), (3.7) и (3.10):

$$\begin{gathered}
-(w_1 - \omega_1)(t_1 - t_2) = A_4(t_1 - t_2)d_4 + 2^{-1}(A_5 + B_4)d_5 + 2^{-1}(A_6 + C_4)d_6 \\
-(w_2 - \omega_2)(2t_1 + t_2) = 2^{-1}(A_5 + B_4)d_4 + B_5(2t_1 + t_2)d_5 + 2^{-1}(C_5 + B_6)d_6 \\
-(w_3 - \omega_3)(t_1 + 2t_2) = 2^{-1}(A_6 + C_4)d_4 + 2^{-1}(C_5 + B_6)d_5 + C_6(t_1 + 2t_2)d_6
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\omega_1 = w_1 + A_4 d_4 + (t_1 - t_2)^{-1}2^{-1}((A_5 + B_4)d_5 + (A_6 + C_4)d_6) \\
\omega_2 = w_2 + B_5 d_5 + (2t_1 + t_2)^{-1}2^{-1}((A_5 + B_4)d_4 + (C_5 + B_6)d_6) \\
\omega_3 = w_3 + C_6 d_6 + (t_1 + 2t_2)^{-1}2^{-1}((A_6 + C_4)d_4 + (C_5 + B_6)d_5),
\end{gathered}$$

где

$$t_1 - t_2 \neq 0, \quad 2t_1 + t_2 \neq 0, \quad t_1 + 2t_2 \neq 0 \tag{3.11}$$

Если не выполняется хотя бы одно из условий (3.11), может возникнуть особенность при задании спина. Следовательно, в компонентном представлении $\mathbf{Q}_4$ (3.5), (3.10) оставляем лишь члены

$$q_4 = A_4(t_1 - t_2)d_4, \quad q_5 = B_5(2t_1 + t_2)d_5, \quad q_6 = C_6(t_1 + 2t_2)d_6$$

где

$$A_4/a = B_5/b = C_6/c = (L_1L_2 - L_3)^{-1}$$

$$\begin{gathered}
a = V_4^2(V_1 - V_2) + V_5^2(V_1 + V_3) - V_6^2(V_2 + V_3) - (V_1 - V_2)(V_1 + V_3)(V_2 + V_3) \\
b = V_4^2(V_1 + V_2) + V_5^2(V_1 - V_3) - V_6^2(V_2 + V_3) - (V_1 + V_2)(V_1 - V_3)(V_2 + V_3) \\
c = -V_4^2(V_1 + V_2) + V_5^2(V_1 + V_3) - V_6^2(V_2 - V_3) + (V_1 + V_2)(V_1 + V_3)(V_2 - V_3) \\
V_4 = \hat{V}_{12}, \quad V_5 = \hat{V}_{13}, \quad V_6 = \hat{V}_{23}, \quad V_i = \hat{V}_{ii} \quad (i = 1, 2, 3)
\end{gathered}$$

Тогда спин при течении задается соотношением

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} + (L_1L_2 - L_3)^{-1}(a\hat{D}_{12}\mathbf{f}_{12}^{-} + b\hat{D}_{13}\mathbf{f}_{13}^{-} + c\hat{D}_{23}\mathbf{f}_{23}^{-}) \tag{3.12}$$

В случае совпадения двух собственных значений тензора $\mathbf{T}$ соответствующие собственные векторы определяются предельным переходом [8].

Имеет место потенциальность девиатора

$$\begin{gathered}
(\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}) = \\
= \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}}((L_1L_2 - L_3)^{-1}(a(t_1 - t_2)d_4^2 + b(2t_1 + t_2)d_5^2 + c(t_1 + 2t_2)d_6^2))
\end{gathered}$$

Следовательно, девиатор $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_4$ обладает потенциалом.

При наложении жестких движений на актуальную конфигурацию получаем [8]:

$$\mathbf{W}^{(t)} = \mathbf{O}_t^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{O}_t + \mathbf{\Omega}_t$$

$$\mathbf{\Omega}_t = \dot{\mathbf{O}}_t^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{O}_t = -\mathbf{O}_t^{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{O}}_t, \quad \mathbf{D}^{(t)} = \mathbf{O}_t^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{O}_t, \quad \mathbf{V}^{(t)} = \mathbf{O}_t^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}_t$$

$$\mathbf{\Omega}^{(t)} = \mathbf{O}_t^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{O}_t + \mathbf{\Omega}_t$$

Следовательно, $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{W}$ меняются по одному закону и уравнение (3.12) является объективным. Например, для моноклинного материала, когда скаляр э не изменяется при преобразовании поворота на угол $\pi$ вокруг оси $\mathbf{c}_3 = \mathbf{e}_3$, оно упрощается:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} + (L_1 L_2 - L_3)^{-1} \hat{D}_{12}(\hat{V}_{22} - \hat{V}_{11})(L_3(\hat{V}_{33})^{-1} + L_1 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{f}_{12}^{-}$$

**4. Девиаторное сечение поверхности текучести.** При построении девиаторного сечения удобно применить векторное представление девиаторов симметричных тензоров второго ранга в пятимерном векторном пространстве. Для этого задается ортонормированный тензорный базис пространства девиаторов

$$\mathbf{W}_1 = 6^{-1/2}(\mathbf{E} - 3\mathbf{c}_3\mathbf{c}_3), \quad \mathbf{W}_2 = 2^{-1/2}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1), \quad \mathbf{W}_3 = 2^{-1/2}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2\mathbf{c}_1)$$
$$\mathbf{W}_4 = 2^{-1/2}(\mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_1), \quad \mathbf{W}_5 = 2^{-1/2}(\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_3\mathbf{c}_2)$$

Скалярное произведение таких векторов понимается как двойное скалярное произведение тензоров.

*2. Пусть* $\mathbf{N}$ *— симметричный девиатор.* Тогда, для того чтобы девиатор $\mathbf{Q}(\mathbf{D}) \cdot\cdot\, \mathbf{NN}$ имел потенциал, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\mathbf{N}$ был одним из собственных векторов оператора $\mathbf{Q}(\mathbf{D})$.

Два любых таких девиатора $\mathbf{N}$ и $\mathbf{M}$ представляются в векторном виде

$$\mathbf{N} = \sum u_i \mathbf{W}_i, \quad \mathbf{M} = \sum v_i \mathbf{W}_i \quad (i = \overline{1,5})$$

Формулы связи с покомпонентным представлением в базисе $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ для $\mathbf{N}$ имеют вид

$$\begin{gathered} n_1 = \mathbf{N} \cdot\cdot\, \mathbf{c}_1\mathbf{c}_1 = 6^{-1/2}u_1 - 2^{-1/2}u_2, \quad n_2 = \mathbf{N} \cdot\cdot\, \mathbf{c}_2\mathbf{c}_2 = 6^{-1/2}u_1 + 2^{-1/2}u_2 \\ n_3 = \mathbf{N} \cdot\cdot\, \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 = 2^{-1/2}u_3, \quad n_4 = \mathbf{N} \cdot\cdot\, \mathbf{c}_1\mathbf{c}_3 = 2^{-1/2}u_4, \quad n_5 = \mathbf{N} \cdot\cdot\, \mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 = 2^{-1/2}u_5 \end{gathered} \tag{4.1}$$

Заменой здесь величин $n_i$, $u_i$, $\mathbf{N}$ на $m_i$, $v_i$, M получаются формулы связи для $\mathbf{M}$.

Поменяв формально величины $\mathbf{Q}$, $\mathbf{D}$ на $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ в покомпонентном представлении девиатора $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{N})$, получаем

$$m_j = \sum a_{ji} n_i \quad (j = \overline{1,5}),$$

где $a_{ji}$ — вычисляемые скаляры.

Условия существования потенциала тензора $\mathbf{Q}$ имеют вид

$$a_{22} = a_{11} + 2(a_{21} - a_{12}), \quad a_{43} = a_{34}, \quad a_{53} = a_{35}, \quad a_{54} = a_{45},$$
$$a_{1i} = 2(a_{i2} - a_{2i}), \quad a_{2i} = 2(a_{i1} - a_{1i}) \quad (i = \overline{3,5})$$

Удалив с диагонали матрицы $(a_{ij})$ не влияющую на выбор собственных векторов величину $a_{11}$ (при нахождении собственных значений оператора она учитывается) введем независимые параметры $p_q$ $(q = \overline{1,14})$:

$$p_1 = 2^{-1}(a_{12} + a_{21}), \quad p_2 = -2^{-1}(a_{12} - a_{21}), \quad p_3 = 2^{-1}\sqrt{3}(a_{13} + a_{23})$$
$$p_4 = -2^{-1}(a_{13} - a_{23}), \quad p_5 = a_{33} - a_{11}, \quad p_6 = 2^{-1}\sqrt{3}(a_{14} + a_{24})$$

$$p_7 = -2^{-1}(a_{14} - a_{24}), \quad p_8 = 2^{-1}\sqrt{3}(a_{15} + a_{25}), \quad p_9 = -2^{-1}(a_{15} - a_{25})$$
$$p_{10} = a_{44} - a_{11}, \quad p_{11} = a_{55} - a_{11}, \quad p_{12} = a_{34}, \quad p_{13} = a_{35}, \quad p_{14} = a_{45}$$

Переходя к векторному представлению девиаторов, получаем

$$A = \begin{pmatrix} p_1 + 2p_2 & \sqrt{3}p_2 & p_3 & p_6 & p_8 \\ \sqrt{3}p_2 & -p_1 + 2p_2 & p_4 & p_7 & p_9 \\ p_3 & p_4 & p_5 & p_{12} & p_{13} \\ p_6 & p_7 & p_{12} & p_{10} & p_{14} \\ p_8 & p_9 & p_{13} & p_{14} & p_{11} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$$\mathbf{D} = \sum d_i \mathbf{W}_i, \quad b^{\mathrm{T}} = (d_1, \ldots, d_5), \quad a^{\mathrm{T}} = (u_1, \ldots, u_5)$$
$$\mathbf{Q}(\mathbf{D}) \cdot\cdot \mathbf{N} = a^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot b = b^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot a = \mathbf{M}(\mathbf{N}) \cdot\cdot \mathbf{D}$$

Матрицей $A$ определяется симметричный линейный оператор $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{N})$ в пятимерном векторном пространстве. Если $\mathbf{N}$ – собственный вектор $\mathbf{M}(\mathbf{N})$ и $\omega$ – его собственное значение, то находим

$$\mathbf{Q}(\mathbf{D}) \cdot\cdot \mathbf{NN} = \mathbf{M}(\mathbf{N}) \cdot\cdot \mathbf{DN} = \omega\mathbf{N} \cdot\cdot \mathbf{DN} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}}(2^{-1}\omega(\mathbf{N} \cdot\cdot \mathbf{D})^2)$$

Обратно, если $\mathbf{Q}(\mathbf{D}) \cdot\cdot \mathbf{NN}$ имеет потенциал, то получаем $n_i m_j = n_j m_i$ для $i, j = \overline{1,5}$, и значит, по формулам связи (4.1) $v_i u_j = v_j u_i$. Все миноры второго порядка в образованной векторами $\mathbf{N}$ и $\mathbf{M}$ матрице равны нулю. Значит, векторы зависимые, т.е. существует такой скаляр $\omega$, что выполняется $\mathbf{M}(\mathbf{N}) = \omega\mathbf{N}$. Следовательно, вектор нормали к девиаторному сечению поверхности текучести является одним из собственных векторов оператора (4.2) и наоборот.

*3. Пусть материал изотропный, симметричный девиатор* $\mathbf{N}$ *является изотропной функцией от тензора* $\operatorname{dev}\mathbf{T}$ *и девиатор* $\mathbf{Q}(\mathbf{D}) \cdot\cdot \mathbf{NN}$ *имеет потенциал. Тогда существуют и единственны* $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{10}$, $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{20}$ *– два таких девиатора.*

Из соотношений (2.5) и (3.1) находим девиатор $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0$ с точностью до шарового тензора:

$$\mathbf{Q} = 2L_3^{-1}(\dot{\varphi}_1\mathbf{F} + \dot{\varphi}_2\mathbf{F}^2 + \varphi_1(\mathbf{F}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{F}) + \varphi_2(2\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{F} + \mathbf{F}^2\cdot\mathbf{D} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{F}^2)$$
$$\dot{\varphi}_1 = 2(d\mathbf{F} \cdot\cdot \mathbf{D} + c_1\mathbf{F}^2 \cdot\cdot \mathbf{D}), \quad \dot{\varphi}_2 = 2c_1\mathbf{F} \cdot\cdot \mathbf{D}$$

Вектор нормали к поверхности девиаторного сечения можно записать как

$$\mathbf{N} = q\mathbf{F}^2 + \mathbf{F} - 3^{-1}(qd_2 + I_1)\mathbf{E}, \quad \mathbf{N} = (\operatorname{dev}\mathbf{T})^2 - z\operatorname{dev}\mathbf{T} + 3^{-1}2J_2\mathbf{E}, \tag{4.3}$$

где $J_2$ и $J_3$ – главные второй и третий инварианты $\operatorname{dev}\mathbf{T}$. В выражении $\mathbf{Q} \cdot\cdot \mathbf{NN} \cdot\cdot \delta\mathbf{D}$ будет только один чисто не потенциальный член

$$\gamma(\mathbf{F}^2 \cdot\cdot \mathbf{DF} \cdot\cdot \delta\mathbf{D} - \mathbf{F} \cdot\cdot \mathbf{DF}^2 \cdot\cdot \delta\mathbf{D})$$

Обозначим

$$d_i = \mathbf{E} \cdot\cdot \mathbf{F}^i, \quad d_i' = \mathbf{E} \cdot\cdot (\operatorname{dev}\mathbf{F})^i, \quad (i = \overline{2,4}), \quad L = -(2^{-1}J_3)^{1/3}(-3^{-1}J_2)^{-1/2}$$

($L$ – параметр Лоде) и опустим множитель $4L_3^{-1}$. Вычисляя $\mathbf{Q} \cdot\cdot \mathbf{NN} \cdot\cdot \delta\mathbf{D}$ с точностью до потенциальных членов, находим $\gamma$:

$$0 = \gamma = Q_2 q^2 + Q_1 q + Q_0 = \gamma_0 + \gamma_1\varphi_1 + 2\varphi_2\gamma_2$$
$$Q_j = Q_{j0} + \varphi_1 Q_{j1} + 2\varphi_2 Q_{j2}, \quad \gamma_j = q^2 Q_{2j} + qQ_{1j} + Q_{0j}$$
$$Q_{20} = r_1 A_1 - r_0 A_2, \quad Q_{10} = -r_2 A_1 + r_1(A_2 + B_1) - r_0 B_2, \quad Q_{00} = -r_2 B_1 + r_1 B_2$$
$$Q_{21} = 2^{-1} I_1^2 - 6^{-1} d_2, \quad Q_{11} = 3^{-1} 4 I_1, \quad Q_{01} = 1$$
$$Q_{22} = -(I_3 - I_1 I_2), \quad Q_{12} = I_2 + 2^{-1} I_1^2 + 6^{-1} d_2, \quad Q_{02} = 3^{-1} 2 I_1$$
$$r_2 = d_2 - 3^{-1} I_1^2, \quad r_1 = -(d_3 - 3^{-1} I_1 d_2), \quad r_0 = d_4 - 3^{-1} d_2^2$$
$$A_i = \partial\varphi_i/\partial I_1 + I_1\,\partial\varphi_i/\partial I_2, \quad B_i = \partial\varphi_i/\partial I_2 \quad (j = 0,1,2;\ i = 1,2)$$

С точностью до малых величин $I_1 - 3$ и $d_2'$ находим

$$Q_0 = 2^{-1} 3\mu + \nu_3, \quad Q_1 = Q_2 = -\mu - 3\nu_3, \quad \varphi_1 = -2^{-1}\mu - \nu_3, \quad \varphi_2 = 2^{-1}(\mu + \nu_3)$$

и при $-\mu > \nu_3 > -3^{-1}\mu$ получаем два действительных значения

$$q = (-Q_1 + s\sqrt{Q_1^2 - 4Q_2 Q_0})(2Q_2)^{-1}; \quad s = 1 \quad (L \le 0), \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}_{10};$$
$$s = -1 \quad (L \ge 0), \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}_{20}$$

Введем обозначения

$$R = r_0 Q_0 + r_1 Q_1 + r_2 Q_2, \quad R_j = r_0 Q_{0j} + r_1 Q_{1j} + r_2 Q_{2j}$$
$$\Phi_j = Q_{j0} + \varphi_1 Q_{j1} + 2\varphi_2 Q_{j2} \quad (j = 0,1,2)$$

Условие ортогональности $\mathbf{N}_{10} \cdot\cdot\, \mathbf{N}_{20} = 0$ будет $R = 0$. Имеют место равенства $R_1 = R_2 = 0$ и согласно, условию интегрируемости [4],

$$R_0 = -(r_0 r_2 - r_1^2)(A_2 + B_1) = 0$$

Далее находим

$$0 = R_0 + \varphi_1 R_1 + 2\varphi_2 R_2 = \Phi_0 r_0 + \Phi_1 r_1 + \Phi_2 r_2 = R$$

Условие ортогональности выполняется вследствие гиперупругости материала Мурнагана.

Для расчетов удобнее второе представление (4.3):

$$z = (-Z_1 + s\sqrt{Z_1^2 - 4Z_2 Z_0})(2Z_2)^{-1}, \quad Z_0 = Q_0\beta_4^2 + Q_1\beta_2\beta_4 + Q_2\beta_2^2$$
$$Z_1 = 2Q_0\beta_3\beta_4 + Q_1(\beta_1\beta_4 + \beta_2\beta_3) + 2Q_2\beta_1\beta_2, \quad Z_2 = Q_0\beta_3^2 + Q_1\beta_1\beta_3 + Q_2\beta_1^2$$
$$\beta_1 = -2\varphi_2, \quad \beta_2 = 4L_3^{-1}(\varphi_2^2(I_1^2 - I_2) + 2\varphi_1\varphi_2 I_1 + 2\varphi_2\varphi_3 + \varphi_1^2), \quad \beta_3 = -\varphi_1$$
$$\beta_4 = 4L_3^{-1}(\varphi_2^2(I_3 - I_1 I_2) - 2\varphi_1\varphi_2 I_2 + 2\varphi_1\varphi_3), \quad \varphi_3 = -3^{-1}(\varphi_1 I_1 + \varphi_2 d_2)$$

Представления (4.3) необходимо еще нормировать. Для изотропного материала в равенстве (4.2) только два собственных вектора $\mathbf{N}_{10}$ и $\mathbf{N}_{20}$ имеют физический смысл.

Из перечисленных фактов 1–3 и предположения 2 вытекает важное следствие, которое позволяет определить девиаторное сечение поверхности текучести и сформулировать дифференциальные определяющие уравнения при течении.

*Пусть* $\overset{\Omega}{\mathbf{T}} = K(\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot\cdot\, \mathbf{NN})$, *где скаляр* $K > 0$ *не зависит от тензора* $\mathbf{D}$; $\mathbf{N}$ $(\mathbf{N} \cdot\cdot\, \mathbf{N} = 1)$ – *вектор внешней нормали к девиаторному сечению поверхности текучести* $S = S_1 \cup S_2$ *в регулярной точке. Тогда для изотропного материала* $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{10}$ *или* $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{20}$ *в зависимо-*

*сти от неположительного на $S_1$ или неотрицательного на $S_2$ значений параметра Лоде. Для анизотропного материала вектор* $\mathbf{N}$ *выбирается из* $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ *— двух собственных векторов оператора* $\mathbf{Q}$, *которые являются ближайшими к вектору внешней нормали для изотропного материала. В окрестности сингулярной точки нужна дополнительная проверка. В сингулярной точке* $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$*— векторы внешних нормалей к регулярным участкам* $S_1$ *и* $S_2$ *поверхности* $S$.

В пятимерном векторном пространстве девиаторов вектор внешней нормали $\mathbf{N}$ к девиаторному сечению поверхности текучести выбирается из двух взаимно ортогональных собственных векторов оператора (4.2), остальные векторы физического смысла не имеют. Существуют два семейства регулярных вогнутых поверхностей, и искомая поверхность образуется соединением в сингулярных точках двух представителей этих семейств. Поверхность текучести в пространстве напряжений формируется своими девиаторными сечениями с учетом экспериментальных данных.

Точку девиаторного сечения, содержавшего точку процесса $\operatorname{dev}\mathbf{T}$, назовем критической, если в ней собственное значение оператора $\mathbf{Q}$, отвечающее собственному вектору, по которому находится вектор внешней нормали в регулярной точке или один из векторов двух внешних нормалей в сингулярной точке, становится кратным. В критической точке поверхность $S$ становится неопределенной.

*Предположение* 3. При появлении критической точки возникает макротрещина.

**5. Определяющие уравнения в дифференциальном виде.** В упругом состоянии справедливы соотношения упругости согласно соотношениям (1.1), (2.1)–(2.7). Дифференциальные уравнения при течении формулируются для величин э, $\mathbf{T}$, $\delta_p$. Первые два уравнения записываются для трех возможных случаев. Тензор $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}$ — положительный, поэтому в критерии текучести для упрощения девиатор $\mathbf{Q}$ заменен девиатором $\mathbf{D}$.

В первом (основном) случае ($\operatorname{dev}\mathbf{T}\in S_i$, $\mathbf{N}_i\cdot\cdot\,\mathbf{D}>0$, $\mathbf{T}\cdot\cdot\,\mathbf{D}>0$) полагаем

$$(L_3^{-1}\text{э})^{\bullet} = (1-\alpha)\mathbf{T}\cdot\cdot\,\mathbf{D},\quad \overset{\Omega}{\mathbf{T}} = K(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}\cdot\cdot\,\mathbf{NN}) \tag{5.1}$$

Постоянная величина $K$ — достаточно малое положительное число, исключающая недопустимое отклонение от условия двухосности в соответствующих базовых экспериментах. Безразмерный скаляр $\alpha$ — величина относительной части рассеиваемой удельной мощности деформации. Зададим функцию $\alpha$ и девиатор $\mathbf{N}$. Полагаем $\alpha=\alpha_i$ на участках $S_i$ ($i=1,2$) поверхности девиаторного сечения $S$:

$$\begin{gathered}\alpha_i = \xi_i + (1-\xi_i)P_i,\quad \xi_i = \alpha_{i1} + \theta_i\theta_{i2}^{-1}(y_i\alpha_{i2}-\alpha_{i1}),\quad P_i = 2\pi^{-1}\psi_i\\ \psi_i = \arccos(\mathbf{N}\cdot\cdot\,\mathbf{D}_p\|\mathbf{D}_p\|^{-1}),\quad \mathbf{N}=\mathbf{N}_i,\quad \mathbf{D}_p = \mathbf{D}\cdot\cdot\,\mathbf{N}_1\mathbf{N}_1 + \mathbf{D}\cdot\cdot\,\mathbf{N}_2\mathbf{N}_2\\ \theta_i = \arccos(\mathbf{N}\cdot\cdot\operatorname{dev}\mathbf{T}\|\operatorname{dev}\mathbf{T}\|^{-1}),\quad y_i = (1-P_{i2}\alpha_{i2}^{-1})(1-P_{i2})^{-1}\end{gathered} \tag{5.2}$$

Величины $\alpha_{i1}$и $\alpha_{i2}$ определяются при проведенных до момента разрушения одноосном и двухосном растяжении ($i=1$) и сжатии ($i=2$), $\theta_{i2}$ —величина угла $\theta_i$ при двухосных нагружениях Бриджмена [9]. Имеем $\alpha_i=\alpha_i(\psi_i,\theta_i,\alpha_{i1},\alpha_{i2})$. При $P_i=1$ получается $\mathbf{N}_i\cdot\cdot\,\mathbf{D}=0$ и имеет место разгрузка. Поэтому при $\psi_i\to\pi/2$ величина $\alpha\to 1$ в силу требования непрерывности при переходе от активного процесса к пассивному. При постоянных величинах $\alpha_{i1}$ и $\alpha_{i2}$ функция $\alpha_i=\alpha_i(\psi_i,\theta_i)$ представляется линейчатой поверхностью. Минимальное значение $\alpha_i$ достигается при $\psi_i=0$ и максимальной величине $\theta_i$.

Во втором (особом) случае ($\operatorname{dev}\mathbf{T} \in S_i$, $\mathbf{N}_i \cdot\cdot \mathbf{D} > 0$, $\mathbf{T} \cdot\cdot \mathbf{D} \le 0$) полагаем

$$(L_3^{-1}э)^{\bullet} = \mathbf{T} \cdot\cdot \mathbf{D}, \quad \overset{\Omega}{\mathbf{T}} = (K + K_0)(\mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot\cdot \mathbf{NN}) \quad (\mathbf{N} = \mathbf{N}_i,\ K_0 = K_0(\mathbf{D})) \tag{5.3}$$

Для определения $K_0$ в уравнениях (5.1) заменяется $1 - \alpha$ на 1, $K$ на $K_0$ и из системы пяти определяющих уравнений, включая уравнения в конечном виде, находится $K_0$. Материал становится недиссипативным и теряется потенциальность в скоростях напряжений. Однако правая часть второго уравнения (5.3) удовлетворяет условию Хилла: является однородной величиной первой степени по компонентам тензора D, т.е. это уравнение остается корректным. Коэффициент $K + K_0$ при разгрузке близок к единице, условие непрерывности при переходе от активного процесса к пассивному процессу приближенно соблюдается. Точка процесса в пространстве напряжений заметно перемещается по поверхности $S$, в отличие от остальных случаев.

В третьем случае ($\operatorname{dev}\mathbf{T} \in S_1 \cap S_2$, $\mathbf{N}_1 \cdot\cdot \mathbf{D} > 0$, $\mathbf{N}_2 \cdot\cdot \mathbf{D} > 0$) полагаем

$$(L_3^{-1}э)^{\bullet} = (1 - \alpha)\mathbf{T} \cdot\cdot \mathbf{D}, \quad \overset{\Omega}{\mathbf{T}} = 0 \tag{5.4}$$

Третий случай реализуется в сингулярной точке поверхности $S$. Важно выбрать максимальную величину $\alpha$ для уменьшения вычисляемой величины $\beta$. Функции $\alpha_i(\psi_i)$ в соотношениях (5.2) монотонно возрастают при изменении величин $P_i$ от нуля до единицы соответственно. Учитывая, что выполняется $P_1 + P_2 = 1$, находим точки совпадения этих функций:

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \xi_1 + (1 - \xi_1)P_1 = \xi_2 + (1 - \xi_2)(1 - P_1)$$
$$P_i = (1 - \xi_i)(2 - \xi_1 - \xi_2)^{-1}, \quad i = 1, 2$$

Таким образом, в соотношениях (5.4) и (5.2) получаем

$$\alpha = \alpha_i, \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}_i \quad \text{при} \quad P_i \le (1 - \xi_i)(2 - \xi_1 - \xi_2)^{-1}$$

Всегда, кроме одноосных нагружений,

$$\dot{\delta}_p = \begin{cases} \beta k_p \mathbf{N} \cdot\cdot \mathbf{T}_p \|\mathbf{T}_p\|^{-1} & \text{при} \quad \mathbf{T}_p \ne 0, \quad \beta \ge 0, \quad (k_p = \pm 1) \vee (k_p = 0) \\ 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{T}_p = 0 & (\|\mathbf{T}_p\| = \sqrt{\mathbf{T}_p \cdot\cdot \mathbf{T}_p}) \end{cases} \tag{5.5}$$

Параметр $\beta$ характеризует скорость роста упругой анизотропии.

Укажем выбор параметров анизотропии $k_p$, обеспечивающий минимальное значение величины $\beta$. Дифференцируя уравнения (2.1) и (2.4) и подставляя в соотношения (5.3) и (5.4) с использованием условий (5.5), получаем систему одного тензорного и одного скалярного уравнения относительно неизвестных симметричного тензора $\overset{\Omega}{\mathbf{V}}$ и скаляра $\beta$. Она сводится к системе семи скалярных уравнений относительно шести компонент в базисе $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ О-производной меры упругих искажений и $\beta$:

$$\sum a_{ij} x_j = b_i \quad (i, j = \overline{1,7},\ x_7 = \beta) \tag{5.6}$$

Решение системы находим по методу Крамера. Считаем, что определитель системы $\Delta \ne 0$. Элементы седьмого столбца матрицы системы представляются в виде

$a_{i7} = \sum B_{ip}k_p$. Обозначим: $A_{i7}$ — алгебраические дополнения элементов седьмого столбца, $\Delta_7 = \sum A_{i7}b_i$, $C_p = \sum A_{i7}B_{ip}$. Имеем

$$\Delta = \sum A_{i7}a_{i7} = \sum A_{i7}\sum B_{ip}k_p = \sum k_p\left(\sum A_{i7}B_{ip}\right) = \sum k_pC_p,\ \beta = \Delta_7\Delta^{-1}$$

Если $\Delta_7 = 0$, то $\beta = 0$. Пусть $\Delta_7 \neq 0$, тогда

$$\beta = \Delta_7\left(\sum k_pC_p\right)^{-1} = \left(\sum k_p\Delta_7^{-1}C_p\right)^{-1}$$

Полагаем $k_p = \operatorname{sign}(\Delta_7^{-1}C_p)$. Значение $\beta$ получается положительным и минимальным по всем наборам $k_p$, а величина определителя системы будет максимальной по абсолютной величине, что гарантирует выполнение условия $\Delta \neq 0$.

При одноосных нагружениях условия (5.5) необходимо дополнить 12 однородными линейными уравнениями относительно параметров анизотропии $\delta_p$. В соответствии с представлениями $э_{2p}$ и $э_{3p}$ (2.3) в слагаемых разложений

$$э_2 = \sum \delta_p э_{2p}, \quad э_3 = \sum \delta_p э_{3p}$$

обозначим

$$\delta_p = \delta_p(i,j,k,l) \quad (p \in \overline{\{1,21\}}), \quad \delta_p = \delta_p(i,j,k,l,n,m) \quad (p \in \overline{\{22,77\}}) \quad (i,j,k,l,n,m \in \{1,2,3\}) \tag{5.7}$$

Рассматривались разные виды упругой деформационной анизотропии для триклинного, моноклинного, ортотропного и трансверсально-изотропного материалов [4]. Отыскивались возможные ограничения на параметры анизотропии $\delta_p$ в потенциале Мурнагана. Для триклинного материала ограничения отсутствуют. Для моноклинного и ортотропного материалов ненулевыми параметрами могут быть соответственно 13 и 9 параметров второй степени и 32 и 20 третьей степени. Ограничения на них отсутствуют. Остальные параметры нулевые, это тривиальные ограничения. Для трансверсально-изотропного материала число возможных ненулевых параметров будет таким же, как у ортотропного. Однако существуют и нетривиальные ограничения в виде однородных линейных уравнений. Пусть ось трансверсальной изотропии $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1$, $a = \sin\varphi$, $b = \cos\varphi$, $\varphi$ — угол поворота. Матрицы компонент тензора $\mathbf{C}$ и полученного его ортогональным преобразованием поворота тензора $\mathbf{C}'$ в базисе $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ x_4 & x_2 & x_6 \\ x_5 & x_6 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_4b - x_5a & x_4a + x_5b \\ x_4b - x_5a & x_2b^2 - 2x_6ab + x_3a^2 & (x_2 - x_3)ab + x_6(b^2 - a^2) \\ x_4a + x_5b & (x_2 - x_3)ab + x_6(b^2 - a^2) & x_2a^2 + 2x_6ab + x_3b^2 \end{pmatrix}$$

Полагаем последовательно $\varphi = \pi, \pi/2, \pi/4$. Приравнивая нулю коэффициенты при $x_rx_s$ и $x_rx_sx_q$ $\left(r,s,q \in \overline{\{1,6\}}\right)$ форм $э_2(\mathbf{C}) - э_2(\mathbf{C}')$ и $э_3(\mathbf{C}) - э_3(\mathbf{C}')$, согласно обозначениям (2.3) и (5.7) получаем соотношения

$$\begin{gathered} \delta_p(3,3,3,3) = \ldots, \quad \delta_p(1,1,2,2) = \ldots, \quad \delta_p(1,3,1,3) = \ldots, \quad \delta_p(3,3,3,3,3,3) = \ldots \\ \delta_p(1,1,1,1,3,3) = \ldots, \quad \delta_p(1,1,3,3,3,3) = \ldots, \quad \delta_p(2,2,3,3,3,3) = \ldots \\ \delta_p(1,2,1,2,3,3) = \ldots, \quad \delta_p(1,2,1,2,2,2) = \ldots, \quad \delta_p(1,2,1,2,1,1) = \ldots \\ \delta_p(1,2,1,3,2,3) = 2\delta_p(1,3,1,3,3,3) - \delta_p(1,3,1,3,2,2) \end{gathered} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} &\delta_p(2,3,2,3) = 2\delta_p(2,2,2,2) - \delta_p(2,2,3,3) \\ &\delta_p(2,3,2,3,3,3) = \ldots \\ &\delta_p(2,3,2,3,2,2) = 3\delta_p(2,2,2,2,2,2) - \delta_p(2,2,2,2,3,3) \\ &\delta_p(2,3,2,3,1,1) = 2\delta_p(1,1,2,2,2,2) - \delta_p(1,1,2,2,3,3) \end{aligned} \tag{5.9}$$

Многоточие означает, что правая часть соотношения получается из левой путем замены 3 на 2, а 2 на 3.

Кроме входящих в соотношения (5.8) и (5.9) величин $\delta_p$, ненулевыми могут быть также $\delta_p(1,1,1,1)$ и $\delta_p(1,1,1,1,1,1)$.

Как следует из тождеств

$$\text{э}_2(\mathbf{C}) - \text{э}_2(\mathbf{C}') = (2\delta_p(2,2,2,2)(x_2^2 + x_3^2 + x_6^2)\delta_p(1,2,1,2)(x_4^2 + x_5^2) + \\ + \delta_p(2,2,3,3)(x_2x_3 - x_6^2) + \delta_p(1,1,3,3)x_1(x_2 + x_3))(1 - a^2 - b^2) = 0$$

$$\text{э}_3(\mathbf{C}) - \text{э}_3(\mathbf{C}') = (3\delta_p(2,2,2,2,2,2)(x_2 + x_3)(x_2^2 - x_2x_3 + 3x_6^2 + x_3^2) + \\ + \delta_p(1,1,1,1,2,2)x_1^2(x_2 + x_3) + 2\delta_p(1,1,2,2,2,2)x_1(x_2^2 + x_3^2 + 2x_6^2) + \\ + 3\delta_p(2,2,2,2,3,3)(x_2 + x_3)(x_2x_3 - x_6^2) + \delta_p(1,1,2,2,3,3)x_1(x_6^2 - x_2x_3) +$$

$$+ \delta_p(1,3,1,3,1,1)x_1(x_4^2 + x_5^2) + 2\delta_p(1,3,1,3,2,2)(x_5^2x_2 + x_4^2x_3 - 2x_4x_5x_6) + \\ + 2\delta_p(1,3,1,3,3,3)(x_4^2x_2 + x_5^2x_3 + 2x_4x_5x_6))(1 - a^2 - b^2) = 0$$

полученные необходимые ограничения с учетом нулевых значений $\delta_p$ для данного трансверсально-изотропного материала являются и достаточными.

Все тривиальные ограничения и ограничения (5.8) удовлетворяются уравнениями (5.5). Ограничения (5.9) ими не удовлетворяются. Круговой перестановкой величин (5.7) $i$, $j$, $k$, $l$, $n$, $m$ в соотношениях (5.8) и (5.9) получаются соответствующие ограничения, когда $\mathbf{c} = \mathbf{c}_2$ и $\mathbf{c} = \mathbf{c}_3$. Таким образом, четыре уравнения (5.9) и восемь уравнений, полученных из системы (5.9), дополняют уравнения (5.5) при одноосных нагружениях по осям $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$.

**6. Заключение.** Получены соотношения для упругого спина $\mathbf{\Omega}$: (1.3) в упругом состоянии, (3.11) и (3.12) в пластическом состоянии. Они позволяют ввести объективную О-производную тензора (3.2). Ее выбор дает возможность вычислять при течении тензор $\mathbf{F}_e$ согласно полярному разложению: меру упругих искажений $\mathbf{V}$ из системы определяющих уравнений (5.6), тензор упругого поворота по соотношению для упругого спина $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O}$.

Определено девиаторное сечение поверхности текучести, сформулирован критерий разрушения при течении. Поверхность девиаторного сечения в пространстве напряжений Коши T зависит от упругого поворота $\mathbf{O}$, а в пространстве напряжений, полученном ортогональным преобразованием $\mathbf{O} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}}$, от тензора O не зависит, поэтому при разгрузке всегда остается неподвижной. Описание упругопластического процесса возможно с использованием индифферентных или инвариантных тензоров. Полученное начальное условие пластичности близко к условию пластичности А.Ю. Ишлинского.

Сформулированы дифференциальные уравнения при течении (5.1)–(5.5), в упругом состоянии они задаются соотношениями (1.1), (2.1)–(2.7). Описывается процесс изменения упругой деформационной анизотропии в пластическом состоянии. Уравнения удовлетворяют всем требованиям, предъявляемым при геометрически нелинейном описании [8].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Naghdi P.M.* A critical review of the state of finite plasticity // ZAMP. 1990. V. 41. № 3. P. 315–394.
2. *Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.* Elastoplasticity beyond small deformations // Acta Mech. 2006. V. 182. P. 31–111.
3. *Murnaghan F.D.* Finite Deformation of an Elastic Solid. N.Y.: Dover, 1951. 140 p.
4. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
5. *Жилин П.А.* Математическая теория неупругих сред // Успехи мех. 2003. Т. 2. № 4. С. 3–36.
6. *Клюшников В.Д.* Физико-математические основы прочности и пластичности. М.: МГУ, 1994. 189 с.
7. *Лурье А.И.* Вопросы математической физики. Л.: Наука, 1976. С. 48–57.
8. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
9. *Bridgman P.W.* Studies in Large Plastic Flow and Fracture: With Special Emphasis on the Effects of Hudrostatic Pressure. N.Y.; L.: McGraw-Hill, 1952. 362 p. = *Бриджмен П.В.* Исследование больших пластических деформаций и разрыва. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 444 с.