УДК 531.391

Памяти В.Г. Вильке
(к 80-летию со дня рождения,
05.11.1938–02.05.2016)

СПИН-ОРБИТАЛЬНОЕ РЕЗОНАНСНОЕ ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА С ГИБКИМИ ВЯЗКОУПРУГИМИ СТЕРЖНЯМИ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

© 2019 г. Е. В. Садовникова*, А. В. Шатина**

Московский технологический университет (МИРЭА), Москва, Россия
** e-mail: sadovnikova-e@mail.ru*
*** e-mail: shatina_av@mail.ru*

Поступила в редакцию 11.07.2017 г.

Изучается плоское вращательное движение спутника в центральном ньютоновском поле сил на эллиптической орбите. Спутник моделируется динамически симметричным твердым телом с жестко прикрепленными по оси симметрии гибкими вязкоупругими стержнями. При отсутствии деформаций в стержнях центральный эллипсоид инерции спутника представляет собой сферу. Получена усредненная система уравнений возмущенного движения вблизи резонанса 1:1 при малых значениях эксцентриситетов. Обоснован захват в спин-орбитальный резонанс 1:1.

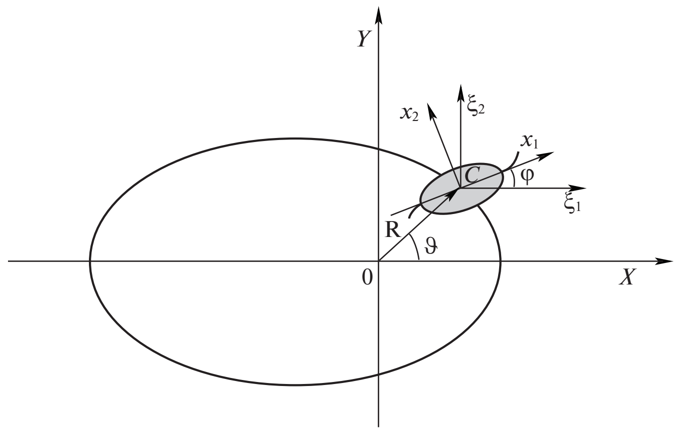
Ключевые слова: спутник с гибкими вязкоупругими стрежнями, спин-орбитальный резонанс

DOI: 10.1134/S0032823519010119

Как известно, большинство крупных естественных спутников планет Солнечной системы вращаются синхронно: угловая скорость собственного вращения совпадает со средней скоростью движения по орбите (тогда спутник обращен к планете одной стороной). Однако синхронное вращение сферически симметричного спутника на эллиптической орбите неустойчиво и ведет к ускорению его вращения [1]. Наблюдаемое синхронное вращение спутников планет можно объяснить тем, что большинство из них имеют постоянные квадрупольные моменты, т.е. постоянные горбы (отклонения от сферичности).

Для изучения спин-орбитального взаимодействия рассмотрим модель спутника в виде твердого осесимметричного тела с жестко прикрепленными по оси симметрии вязкоупругими стержнями. Предполагается, что при отсутствии деформаций в стержнях главные центральные моменты инерции спутника равны между собой, т.е. его центральный эллипсоид инерции – сфера. Такая модель учитывает и отклонения от сферичности, и диссипативный аспект.

Ранее [2] рассматривалась неограниченная постановка задачи о поступательно-вращательном движении описанной модели спутника в центральном ньютоновском поле сил. Было показано, что в стационарном движении центр масс спутника движется по круговой орбите, а спутник неподвижен в орбитальной системе координат, т.е. его собственная угловая скорость совпадает с орбитальной. Переход к плоской ограни-



Фиг. 1

ченной постановке задаче в данной работе обусловлен малостью линейных размеров спутника по сравнению с характерным размером орбиты [3]. Кроме того, эффект стремления эллиптических орбит к круговым за счет внутренней диссипации на много порядков слабее эффекта стабилизации спутников в окрестности плоских вращений вокруг нормали к плоскости орбиты [4, 5].

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Пусть спутник, представляющий собой симметричное твердое тело, вдоль оси симметрии которого расположены два гибких вязкоупругих стержня, движется в центральном ньютоновском гравитационном поле на эллиптической орбите. Введем инерциальную систему координат $OXYZ$ с началом в притягивающем центре, совпадающем с одним из фокусов эллипса. Ось OX направим по радиус-вектору перигея. Для описания вращательного движения спутника введем подвижную систему координат $Cx_1x_2x_3$, жестко связанную со спутником, и систему осей Кёнига $C\xi_1\xi_2\xi_3$. Точка C – центр масс спутника при отсутствии деформации стержней, когда стержни прямолинейны и расположены вдоль оси Cx_1. Предполагается, что центр масс спутника C движется по эллиптической орбите в плоскости OXY, ось Cx_3 перпендикулярна плоскости орбиты, точки стержней перемещаются в плоскости Cx_1x_2, совпадающей с плоскостью орбиты (фиг. 1).

Радиус-вектор точки стержня в системе координат $Cx_1x_2x_3$, согласно линейной теории изгиба тонких нерастяжимых стержней, имеет вид [2, 4]

$$\begin{gathered}\mathbf{r}_{\text{rod}} = \mathbf{r} + \mathbf{u}\\ \mathbf{u} = u(s,t)\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{r} = s\mathbf{e}_1; \quad s \in K = [-b-d \le s \le -b] \cup [b \le s \le b+d],\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $u(s,t)$ – отклонение сечения стержня с координатой s при изгибе, $\mathbf{e}_i$ – орт оси Cx_i $(i = 1,2,3)$.

Обозначим через $\mathbf{R}$ радиус-вектор точки C. В системе координат $OXYZ$:

$$\mathbf{R} = R\mathbf{e}_R, \quad R = \frac{aq}{p}, \quad \mathbf{e}_R = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0) \tag{1.2}$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial \vartheta}{\partial l}\dot{l} = \sigma n, \quad q = 1 - e^2, \quad p = 1 + e\cos\vartheta,$$
$$\sigma = \frac{p^2}{q^{3/2}}, \quad n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}, \quad l = n(t - t_0), \quad \gamma = GM_0, \tag{1.3}$$

где ϑ — истинная аномалия, a — большая полуось орбиты точки C, e — эксцентриситет орбиты, n — среднее движение центра масс C по орбите, l — средняя аномалия, G — универсальная гравитационная постоянная, M_0 — масса притягивающего центра, t_0 — начальный момент времени. Величины a, e, n — постоянные, точкой сверху обозначена производная по времени t.

Пусть V — область в E^3, занимаемая твердым телом и двумя недеформированными стержнями. Радиус-вектор точки M спутника в системе координат $OXYZ$ имеет вид

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{R} + \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u}),$$

где $\mathbf{r} \in V$, $\mathbf{u} \equiv 0$ для точек твердого тела, Γ — оператор перехода от подвижной системы координат $Cx_1x_2x_3$ к системе осей Кёнига $C\xi_1\xi_2\xi_3$. Обозначим через φ угол между осями $C\xi_1$ и Cx_1. Тогда

$$\Gamma = \Gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

Скорость точки M спутника определяется равенством

$$\mathbf{v}_M = \dot{\mathbf{R}}_M = \dot{\mathbf{R}} + \Gamma[\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}}]; \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_3 \tag{1.5}$$

Кинетическая энергия спутника представляется функционалом

$$T = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{v}_M^2 d\mu = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\int_V [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})]^2 d\mu + \frac{1}{2}\int_K \dot{\mathbf{u}}^2 \rho ds +$$
$$+ \int_K [\Gamma^{-1}\dot{\mathbf{R}}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}}]\rho ds + \int_K (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}), \dot{\mathbf{u}})\rho ds \tag{1.6}$$

Здесь μ — мера на области V, m — масса спутника, ρ — линейная плотность стержней, которую считаем постоянной. Учтено равенство (1.5).

Потенциальная энергия гравитационного поля имеет вид

$$\Pi = -\gamma\int_V \frac{d\mu}{\sqrt{[\mathbf{R} + \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u})]^2}} \tag{1.7}$$

Введем обозначение для орта вектора $\mathbf{R}$, задаваемого в подвижной системе координат $Cx_1x_2x_3$:

$$\boldsymbol{\xi} = \Gamma^{-1}\mathbf{R}/R = (\xi_1, \xi_2, 0), \quad \xi_1 = \cos(\vartheta - \varphi), \quad \xi_2 = \sin(\vartheta - \varphi) \tag{1.8}$$

С учетом того, что $|\mathbf{r} + \mathbf{u}| \ll R$, преобразуем функционал (1.7), сохраняя квадратичные члены по $(\mathbf{r} + \mathbf{u})/R$ и линейные по $\mathbf{u}/R$ к виду

$$\Pi = -\frac{\gamma m}{R} + \frac{\gamma}{R^2}\int_K (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{u})\rho ds - \frac{3\gamma}{R^3}\int_K (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r})(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{u})\rho ds \tag{1.9}$$

Функционалы потенциальной энергии упругих деформаций и диссипативных сил зададим выражениями

$$E[\mathbf{u}] = \frac{N}{2}\int_K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)^2 ds, \quad D[\dot{\mathbf{u}}] = \frac{\chi N}{2}\int_K \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial s^2}\right)^2 ds,$$

где N – изгибная жесткость стержня, χ – постоянная, характеризующая рассеяние энергии в стержне при изгибе ($\chi > 0$).

Уравнения движения выпишем в форме уравнений Рауса. Для этого от обобщенной скорости $\dot\varphi$ перейдем к обобщенному импульсу $I = \nabla_{\dot\varphi} T$. Учитывая второе равенство (1.5) и выражение (1.6), выделим в функционале кинетической энергии квадратичную и линейную части по $\dot\varphi$:

$$T = T_0 + T_1 + T_2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}J[\mathbf{u}]\dot\varphi^2, \quad T_1 = G_u\dot\varphi, \quad T_0 = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\int\limits_K \dot{\mathbf{u}}^2\rho ds + \int\limits_K (\Gamma^{-1}\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{u}})\rho ds \tag{1.10}$$

$$J[\mathbf{u}] = \int\limits_V [\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})]^2 d\mu, \quad G_u = \int\limits_K (\mathbf{u} \times \Gamma^{-1}\dot{\mathbf{R}} + (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{e}_3)\rho ds$$

Отсюда получаем

$$I = J[\mathbf{u}]\dot\varphi + G_u \tag{1.11}$$

Функционал Рауса имеет вид [2, 4]

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}[I, \varphi, \dot u, u, t] = T_2 - T_0 + \Pi + E[\mathbf{u}] \tag{1.12}$$

При этом в правой части равенства (1.12) необходимо выразить $\dot\varphi$ из соотношения (1.11).

Введя обозначения для координат вектора $\Gamma^{-1}\dot{\mathbf{R}} = (\eta_1, \eta_2, 0)$:

$$\eta_1 = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}[\sin(\varphi - \vartheta) + e\sin\varphi], \quad \eta_2 = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}}[\cos(\varphi - \vartheta) + e\cos\varphi] \tag{1.13}$$

получим следующее выражение для функционала Рауса:

$$\mathcal{R}[I, \varphi, \dot u, u, t] = \frac{1}{2}\left[A + \int\limits_K u^2\rho ds\right]^{-1}\left[I - \int\limits_K (s\dot u - u\eta_1)\rho ds\right]^2 - \frac{ma^2n^2(1 + e^2 + 2e\cos\vartheta)}{2(1-e^2)} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_K \dot u^2\rho ds - \int\limits_K \eta_2\dot u\rho ds - \frac{\gamma m}{R} + \frac{\gamma}{R^2}\int\limits_K \xi_2 u\rho ds - \frac{3\gamma}{R^3}\int\limits_K \xi_1\xi_2 su\rho ds + \frac{N}{2}\int\limits_K \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)^2 ds$$

$$A = \int\limits_V (x_1^2 + x_3^2)d\mu = \int\limits_V (x_1^2 + x_2^2)d\mu = \int\limits_V (x_2^2 + x_3^2)d\mu$$

Здесь R и ϑ – заданные функции времени согласно соотношениям (1.3), A – момент инерции спутника с недеформированными стержнями относительной оси Cx_i $(i = 1, 2, 3)$.

Уравнения движения спутника записываются в форме уравнений Рауса

$$\dot I = -\nabla_\varphi\mathcal{R}, \quad \dot\varphi = \nabla_I\mathcal{R}, \quad -\frac{d}{dt}\nabla_{\dot u}\mathcal{R} + \nabla_u\mathcal{R} + \nabla_{\dot u}D = 0, \tag{1.14}$$

т.е. в виде сложной системы интегро-дифференциальных уравнений. Конфигурационным пространством задачи является прямое произведение

$$\mathrm{R} \times V_0, \quad V_0 = \left\{y(s)\colon y \in W_2^2(K),\ y(\pm b) = \frac{dy(\pm b)}{ds} = 0\right\}$$

$W_2^2(K)$ – пространство Соболева. Для дальнейшего исследования применяется метод разделения движений [6, 7], основанный на предположении, что время затухания собственных колебаний стержней на наинизшей частоте много больше периода этих колебаний и много меньше характерного времени движения спутника как механической системы в целом.

2. Построение возмущенной системы уравнений движения. Введем малый параметр

$$\varepsilon = \omega_0^2 d^4 \rho N^{-1} \ll 1,$$

где ω_0 — постоянная, ограничивающая модуль начальной угловой скорости спутника. Можно выбрать масштабы размерных единиц так, чтобы $\omega_0^2 d^4 \rho = 1$, тогда $\varepsilon = N^{-1}$. Если $\varepsilon = 0$, то будем полагать $u \equiv 0$. Это означает, что стержни не деформируются и спутник движется как твердое тело. В этом случае функционал Рауса имеет вид

$$\mathcal{R}[I, \varphi, 0, 0, t] = \frac{I^2}{2A} - \frac{\gamma m(3 + 4e\cos\vartheta + e^2)}{2a(1 - e^2)}$$

Уравнения невозмущенного движения выглядят следующим образом

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{I}{A} \tag{2.1}$$

При $\varepsilon \neq 0$ после затухания собственных колебаний вязкоупругих стержней, согласно методу разделения движений [4, 6], решение последнего уравнения (1.14) будем искать в виде разложений по малому параметру ε:

$$u(s,t) = \varepsilon u_1(s,t) + \varepsilon^2 u_2(s,t) + \cdots$$

Для функции $u_1(s,t)$ первого приближения по ε получим

$$B(u_1 + \chi\dot{u}_1) = \frac{d}{dt}\left[-\rho s\frac{I}{A} - \rho\eta_2\right] - \rho\eta_1\frac{I}{A} - \frac{\gamma}{R^2}\rho\xi_2 + 3\frac{\gamma}{R^3}\rho s\xi_1\xi_2 \tag{2.2}$$

Здесь B — дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $B(y) = d^4y/ds^4$ и краевыми условиями

$$y(\pm b) = \frac{dy(\pm b)}{ds} = 0, \quad \frac{d^2y(\pm(b+d))}{ds^2} = \frac{d^3y(\pm(b+d))}{ds^3} = 0$$

Переменные I и φ в правой части уравнения (2.2) — решения невозмущенной системы уравнений (2.1). Используя соотношения (1.3), (1.8), (1.13) и (2.1), преобразуем уравнение (2.2) к виду

$$B(u_1 + \chi\dot{u}_1) = sf(t); \quad f(t) = -\frac{3\rho\gamma}{2R^3}\sin 2\beta, \quad \beta = \varphi - \vartheta \tag{2.3}$$

Частное решение уравнения (2.3), установившееся после затухания собственных колебаний стержней, можно представить в виде ряда [2, 4]

$$u_1(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-\chi)^n\frac{\partial^n u_{10}}{\partial t^n}; \quad u_{10}(s,t) = B^{-1}(sf(t)) \tag{2.4}$$

Ограничиваясь двумя первыми членами ряда, получим решение уравнения (2.3) в виде

$$u_1(s,t) = \Psi(s)\{f - \chi\dot{f}\} \tag{2.5}$$

В правой части равенства (2.5) дифференцирование по времени производится в силу невозмущенной системы уравнений (2.1), т.е.

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{I}{A} + \frac{\partial f}{\partial\vartheta}\dot{\vartheta} \tag{2.6}$$

при учете соотношений (1.3). Функция $\Psi(s)$ — нечетная [2]:

$$\int_K \Psi(s)ds = 0, \quad \int_K s\Psi(s)ds = d_1 > 0 \tag{2.7}$$

На следующем шаге необходимо линеаризовать правые части системы двух первых уравнений (1.14) по u и $\dot{u}$ и подставить полученное приближенное решение $\varepsilon u_1(s,t)$. В результате возмущенная система уравнений движения спутника примет вид

$$\dot{I} = -\frac{3\varepsilon\rho d_1\gamma}{R^3}(f - \chi\dot{f})\cos 2\beta, \quad \dot{\varphi} = \frac{I}{A} - \frac{\varepsilon\rho d_1}{A}(\dot{f} - \chi\ddot{f}) \tag{2.8}$$

Введем безразмерную переменную $k = I/(An)$, приближенно равную отношению собственной угловой скорости вращения спутника к среднему движению по орбите, и используем обозначения (1.3). Тогда из системы (2.8) с учетом равенств (2.6) получим следующую систему уравнений возмущенного движения спутника:

$$\dot{k} = \varepsilon_1 n F_1(k,\beta,\vartheta), \quad \dot{\varphi} = kn + \varepsilon_1 n F_2(k,\beta,\vartheta), \quad \dot{l} = n$$

$$F_1(k,\beta,\vartheta) = \frac{3p^6}{4q^6}\{(1 + 3\chi nep^{-1}\sigma\sin\vartheta)\sin 4\beta - 4\chi n(k-\sigma)\cos^2 2\beta\}$$

$$\begin{gathered} F_2(k,\beta,\vartheta) = \frac{p^3}{2q^3}\{-3ep^{-1}\sigma\sin\vartheta\sin 2\beta + 2(k-\sigma)\cos 2\beta + \\ + \chi n[3ep^{-2}\sigma^2(p\cos\vartheta - 4e\sin^2\vartheta)\sin 2\beta + \\ + 4ep^{-1}\sigma\sin\vartheta(3k - 4\sigma)\cos 2\beta + 4(k-\sigma)^2\sin 2\beta]\} \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\varepsilon_1 = 3\varepsilon A^{-1}\rho^2 d_1 n^2 \ll 1, \quad \vartheta = \vartheta(l), \quad \beta = \varphi - \vartheta(l)$$

3. Эволюционная система уравнений движения вблизи резонанса 1:1. Проведем процедуру усреднения возмущенной системы уравнений (2.9) вблизи резонанса 1:1, когда значения переменной k близки к единице. В правые части первых двух уравнений системы (2.9) средняя аномалия входит неявным образом через истинную аномалию. При малых значениях эксцентриситетов справедливы равенства [1]

$$\vartheta = l + 2e\sin l + \frac{5}{4}e^2\sin 2l + o(e^2)$$

$$\sin\vartheta = \sin l + e\sin 2l + \frac{9}{8}e^2\left(\sin 3l - \frac{7}{9}\sin l\right) + o(e^2)$$

$$\cos\vartheta = \cos l + e(\cos 2l - 1) + \frac{9}{8}e^2(\cos 3l - \cos l) + o(e^2)$$

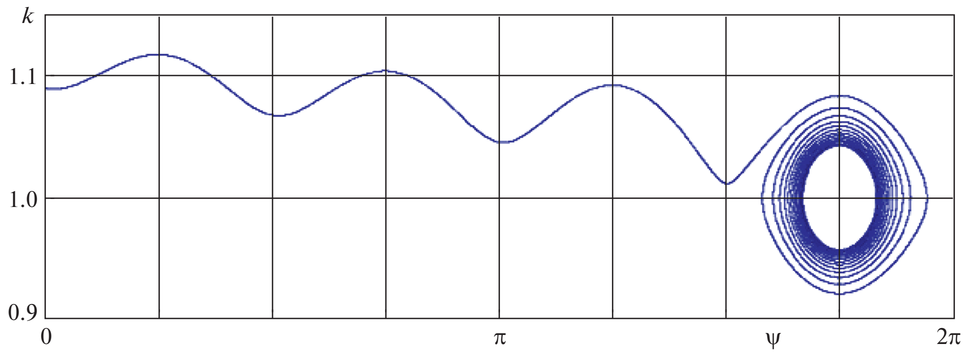
Введем полубыструю переменную $\psi = \varphi - l$ [8]. Вблизи резонанса 1:1 переменная ψ становится медленной. Далее проведем усреднение только по одной быстрой угловой переменной – средней аномалии l. Полученная в результате указанных преобразований система уравнений движения спутника

$$\begin{gathered} \dot{k} = \frac{3\varepsilon_1 n}{4}\left\{\left(1 - \frac{17}{2}e^2\right)\sin 4\psi - 2\chi n\left[(k-1)\left(1 - \frac{17}{2}e^2\right)\cos 4\psi + (k-1) + \frac{3}{2}e^2(5k-9)\right]\right\} \\ \dot{\psi} = n(k-1) + \varepsilon_1 n(k-1)\{\cos 2\psi + 2\chi n(k-1)\sin 2\psi\}\left(1 - \frac{5}{2}e^2\right) \end{gathered} \tag{3.1}$$

имеет две серии стационарных решений:

$$1) \quad k = 1, \quad \psi = -\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi m}{2}, \quad m \in Z, \quad 2) \quad k = 1, \quad \psi = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\pi m}{2}, \quad m \in Z$$

$$\alpha = \arcsin\frac{12\chi ne^2}{1 - 17e^2/2}, \quad 0 < \alpha \ll 1$$



Фиг. 2

Первая серия соответствует движению спутника, при котором он все время обращен одной стороной к притягивающему центру, а стержни либо почти направлены к притягивающему центру, либо почти перпендикулярны радиус-вектору центра масс. Вторая серия соответствует движению спутника в резонансе 1:1, когда угол между его осью симметрии и прямой, соединяющей его центр масс с притягивающим центром, близок к значению $\pi/4$ или $-\pi/4$.

Проведенный анализ устойчивости полученных стационарных решений на основе линеаризованных уравнений показал, что стационарные решения первой серии неустойчивы, а второй серии – асимптотически устойчивы.

На фиг. 2 представлена интегральная кривая системы уравнений (3.1) в плоскости (k, ψ) для следующих начальных данных и значений параметров:

$$k(0) = 1.09, \quad \psi(0) = 0, \quad \varepsilon_1 = 0.01, \quad \chi n = 0.8, \quad e = 0.01$$

построенная в среде Octave. Интегрирование проводилось на отрезке времени, соответствующем 100 оборотам спутника вокруг притягивающего центра. Как видно из графика, угол ψ сначала монотонно увеличивается, а затем происходит захват в резонанс около значения $\psi = 7\pi/4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Murray C.D., Dermott S.F.* Solar System Dynamics. Cambridge: Univ. Press, 1999. 592 p. = *Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит, 2010. 588 с.
2. *Вильке В.Г., Шатина А.В.* Эволюция движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями в центральном ньютоновском поле сил // Космич. иссл. 1999. Т. 37. Вып. 3. С. 289–295.
3. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
4. *Вильке В.Г.* Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Ч. 1, 2. М.: Изд-во мех.-мат. фак. МГУ, 1997. Ч. 1. 216 с. Ч. 2. 160 с.
5. *Амелькин Н.И.* Об асимптотических свойствах движений спутников в центральном поле, обусловленных внутренней диссипацией // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 205–223.
6. *Вильке В.Г.* Разделение движений и метод усреднения в механике систем с бесконечным числом степеней свободы // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1983. Вып. 5. С. 54–59.
7. *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 34–42.
8. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2009. 416 с.