ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2019, том 83, № 1, с. 72–83

УДК 539.3: 534.1

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА О ПРОХОЖДЕНИИ УПРУГОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ДВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ МАССИВА ТРЕЩИН

© 2019 г. М. Ю. Ремизов*

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

** e-mail: remizov72@mail.ru*

Поступила в редакцию 03.10.2017 г.

Вычисляются коэффициенты отражения и прохождения в задаче о падении плоской волны на трехмерную систему двух параллельных двоякопериодических массивов трещин. В условиях низкочастотного режима задача сводится к системе интегральных уравнений на одной выделенной трещине. Полуаналитический метод, разработанный ранее для трехмерных скалярных и плоских упругих задач, приводит к явным аналитическим представлениям для волнового поля и параметров рассеяния.

Ключевые слова: коэффициенты отражения и прохождения, двоякопериодическая решетка, гиперсингулярное интегральное уравнение, система трещин, акустический фильтр

DOI: 10.1134/S0032823519010090

1. Введение. Исследование прохождения упругих волн через периодические решетки – важная проблема при ультразвуковом неразрушающем контроле материалов, при изучении распространения звука, а также при использовании электромагнитных волноводов с диафрагмами. Различные численные методы были применены в двумерных задачах с периодическими отверстиями произвольной формы [1–4]. Несмотря на высокую точность компьютерных результатов, существует лишь несколько аналитических теорий. На практике аналитические результаты могут быть получены в случае режима низких частот при слабом взаимодействии волн, когда некоторые приближенные результаты можно установить в аналитической форме. Таким образом, аналитические методы, приводящие к явным формулам для соответствующих параметров рассеяния, справедливы, как правило, только в определенном низкочастотном пределе. Были получены [5–9] аналитические формулы для параметров отражения и прохождения в режиме одной моды для акустических и электромагнитных волн, проникающих сквозь двояко- и троякопериодические массивы отверстий и объемных препятствий произвольной формы. В плоских задачах распространения волн через периодические массивы трещин в упругих твердых телах рассматривались однопериодические [10, 11] и двоякопериодические [12, 13] системы. Все упомянутые источники относятся к скалярной волновой теории.

В настоящей работе продолжается изучение двоякопериодических структур параллельных трещин произвольной конфигурации в трехмерной постановке. Обсуждается пример прямоугольных трещин. Тематика исследования связана с рядом публикаций ([14, 15] и др.), однако здесь применяется другая методика. Как и в некоторых предшествующих работах, принято, что а) распространяется только одна мода при нормальной падающей волне (ak_2, $ck_2 < \pi$), где k_2 – волновое число для поперечной волны,

$2a$ и $2c$ – периоды решеток, б) вертикальные плоскости с массивами трещин находятся достаточно далеко друг от друга, так что

$$D/a \gg 1, \quad D/c \gg 1, \tag{1.1}$$

где D – расстояние между двумя плоскостями, в которых расположены трещины.

Цель настоящей работы – развитие полуаналитических подходов к вычислению характеристик отражения и прохождения в упругих трехмерных задачах, а также обнаружение ряда новых физических свойств, характерных только для упругих задач, отсутствующих в скалярном случае. Изучаемые проблемы связаны с теорией и практикой использования *акустических метаматериалов*, которые обладают, благодаря специфической внутренней структуре, свойствами акустических фильтров, т.е. свойствами запирания распространяющейся волны на определенных интервалах частот. Это явление было недавно обнаружено эспериментально [16]. Некоторые фундаментальные аспекты, связанные с акустическими метаматериалами, обсуждаются и в ряде других источников [17–19].

Пространственные задачи акустики в средах (в том числе и упруго-анизотропных) с периодическими системами включений как в длинноволновом приближении, так и в случае более коротких волн, рассматривались и в других работах [20–24].

2. Математическая постановка задачи. Рассмотрим трехмерную упругую среду, которая содержит пару параллельных вертикальных двоякопериодических массивов сопараллельных трещин, расположенных при $x = 0$ и $x = D$ соответственно; расстояние D между системами трещин определяет третий период. Период решетки вдоль оси y равен $2a$, вдоль оси z равен $2c$. Будем считать режим колебаний гармоническим по времени с множителем $e^{-i\omega t}$, который в дальнейшем опускаем. Если изучается падение плоской продольной волны e^{ik_1x} на рассматриваемую решетку вдоль положительного направления оси x, то в силу симметрии задача эквивалентна рассмотрению волновода шириной $2a$ вдоль оси y и $2c$ вдоль оси z (фиг. 1). Принимается, что продольная плоская волна в форме

$$\varphi_0 = e^{ik_1x}, \quad \psi_l = 0; \quad l = 1,2,3 \tag{2.1}$$

приходит из $-\infty$, порождая рассеянное поле перед первым массивом ($x < 0$), между первым и вторым ($0 < x < D$) и после второго ($x > D$). Тогда потенциалы Ламе, удовлетворяющие уравнению Гельмгольца в соответствующих областях, могут быть представлены в виде тригонометрических рядов Фурье по переменным y и z:

$$\begin{gathered}
x < 0: \quad \varphi^l = e^{ik_1x} + Re^{-ik_1x} + \sum A_{nj} e^{q_{nj}x}\cos(a_n y)\cos(c_j z) \\
\begin{Bmatrix} \psi_1^l \\ \psi_2^l \\ \psi_3^l \end{Bmatrix} = \sum \begin{Bmatrix} B_{nj}^1 \\ B_{nj}^2 \\ B_{nj}^3 \end{Bmatrix} e^{r_{nj}x} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \\ \sin \end{Bmatrix}(a_n y) \begin{Bmatrix} \sin \\ \sin \\ \cos \end{Bmatrix}(c_j z)
\end{gathered} \tag{2.2}$$

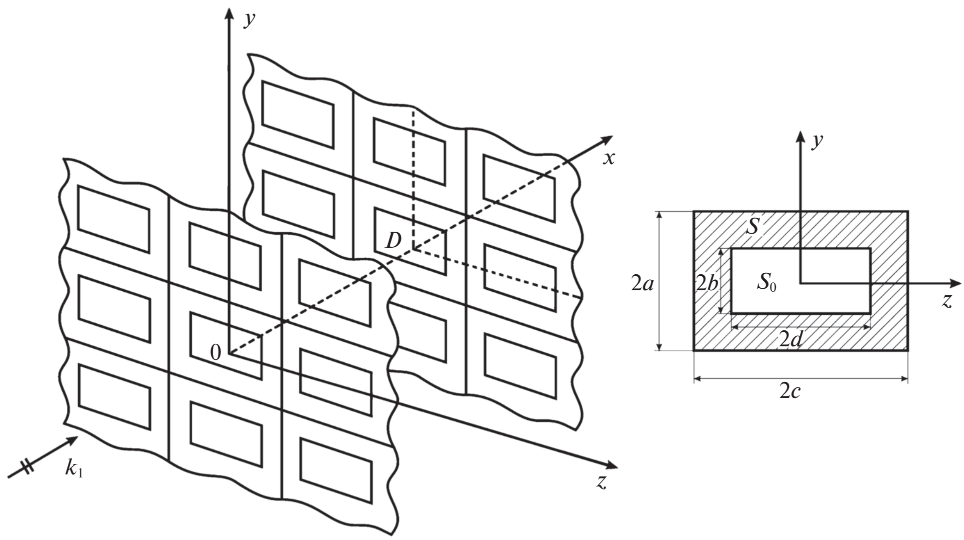
$$0 < x < D: \quad \varphi^1 = e^{ik_1x} + F_0^1\cos(k_1x) + H_0^1\cos(k_1(x-D)) +$$

$$+ \sum\{F_{nj}^1\,\mathrm{ch}(q_{nj}x) + H_{nj}^1\,\mathrm{ch}(q_{nj}(x-D))\}\cos(a_n y)\cos(c_j z)$$

$$\psi_1^1 = \sum\{G_{nj}^1\,\mathrm{ch}(r_{nj}x) + P_{nj}^1\mathrm{ch}(r_{nj}(x-D))\}\sin(a_n y)\sin(c_j z) \tag{2.3}$$

$$\psi_2^1 = \sum\{V_{nj}^1\,\mathrm{sh}(r_{nj}x) + Q_{nj}^1\mathrm{sh}(r_{nj}(x-D))\}\cos(a_n y)\sin(c_j z)$$

$$\psi_3^1 = \sum\{W_{nj}^1\,\mathrm{sh}(r_{nj}x) + Y_{nj}^1\mathrm{sh}(r_{nj}(x-D))\}\sin(a_n y)\cos(c_j z)$$



Фиг. 1

$$x > D: \quad \varphi^r = Te^{ik_1(x-D)} + \sum C_{nj} e^{-q_{nj}(x-D)} \cos(a_n y)\cos(c_j z)$$

$$\begin{Bmatrix} \psi_1^r \\ \psi_2^r \\ \psi_3^r \end{Bmatrix} = \sum \begin{Bmatrix} D_{nj}^1 \\ D_{nj}^2 \\ D_{nj}^3 \end{Bmatrix} e^{-r_{nj}(x-D)} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (a_n y) \begin{Bmatrix} \sin \\ \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (c_j z), \tag{2.4}$$

где

$$q_{nj} = \sqrt{a_n^2 + c_j^2 - k_1^2}, \quad r_{nj} = \sqrt{a_n^2 + c_j^2 - k_2^2}, \quad a_n = \pi n/a, \quad c_j = \pi j/c$$

Большими буквами, кроме D, R и T, обозначены неизвестные постоянные, $k_1 = \omega/c_p$ и $k_2 = \omega/c_s$ – продольные и поперечные волновые числа, c_p и c_s – продольная и поперечная скорости волн в среде ($c_p > c_s$), R и T – коэффициенты отражения и прохождения, суммирование ведется по $n + j > 0$.

Следует отметить, что представления (2.2)–(2.4) – точные для произвольных значений волновых чисел k_1 и k_2, даже в случае, когда квадратные корни q_{nj} и r_{nj} могут принимать комплексные значения. Однако ограничимся рассмотрением случая одной моды: $0 < k_1 a < k_2 a < \pi$, $0 < k_1 c < k_2 c < \pi$, тогда $q_{nj} > 0$, $r_{nj} > 0$ для всех $n + j = 1, 2, \ldots$. При $n = j = 0$ имеем $q_{00} = -ik_1$ и $r_{00} = -ik_2$ в соответствии с условием излучения. Кроме того, принимается, что массивы находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга.

Компоненты тензора напряжений и вектора перемещений могут быть выражены через потенциалы Ламе в виде

$$\frac{\sigma_{xx}}{\mu} = (2k_1^2 - k_2^2)\varphi + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z \partial x}\right)$$

$$\frac{\sigma_{xy}}{\mu} = k_2^2\psi_3 + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z \partial y}\right), \quad \frac{\sigma_{xz}}{\mu} = -k_2^2\psi_2 + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z \partial y}\right) \tag{2.5}$$

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \quad (xyz, 123)$$

Потенциалы $\psi_{1,2,3}$ следует рассматривать с дополнительным условием

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_3}{\partial z} = 0 \tag{2.6}$$

Принимая непрерывность поля перемещений u_x, u_y, u_z вне области трещины, введем неизвестные функции $g_\chi^s(y,z)$ ($\chi = x,y,z$; $s = 1,2$), такие, что

$$x = 0\colon u_\chi^l - u_\chi^1 = \begin{cases} g_\chi^1(y,z), & (y,z) \in S_0 \\ 0, & (y,z) \notin S_0 \end{cases}; \quad x = D\colon u_\chi^1 - u_\chi^r = \begin{cases} g_\chi^2(y,z), & (y,z) \in S_0 \\ 0, & (y,z) \notin S_0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Физический смысл этих функций – относительные смещения левого и правого берегов трещины вдоль соответствующих декартовых координат.

Ввиду очевидной симметрии задачи, функция u_x – четная по переменным y и z, функция u_y – нечетная по y и четная по z, функция u_z – четная по y и нечетная по z.

Теперь формулы (2.5) и (2.7) могут быть использованы для представления всех постоянных, входящих в потенциалы (2.2)–(2.4) в терминах функций $g_\chi^s(y,z)$ $\chi = x,y,z$; $s = 1,2$). По аналогии с плоской задачей [11] можно доказать, что при учете естественной геометрической симметрии в рассматриваемой задаче относительные тангенциальные смещения между берегами трещины всюду равны нулю: $g_y^s \equiv 0$, $g_z^s \equiv 0$. Тогда ортогональность тригонометрических функций приводит соотношения (2.7) к следующим равенствам:

$$-ik_1R - H_0^1k_1\sin(k_1D) = A^1 \quad ik_1e^{ik_1D} - F_0^1k_1\sin(k_1D) - ik_1T = A^2$$

$$(A_{nj} + H_{nj}\,\mathrm{sh}(q_{nj}D))q_{nj} + (B_{nj}^3 + Y_{nj}^1\,\mathrm{sh}(r_{nj}D))a_n - (B_{nj}^2 + Q_{nj}^1\,\mathrm{sh}(r_{nj}D))c_j = e_{nj}B^1$$

$$(F_{nj}^1\,\mathrm{sh}(q_{nj}D) + C_{nj})q_{nj} + (W_{nj}^1\,\mathrm{sh}(r_{nj}D) - D_{nj}^3)a_n - (V_{nj}^1\,\mathrm{sh}(r_{nj}D) - D_{nj}^2)c_j = e_{nj}B^2 \tag{2.8}$$

$$A^s = \frac{1}{4ac}\iint\limits_{S_0} g_x^s(\eta,\zeta)d\eta d\zeta, \quad B^s = \frac{2}{ac}\iint\limits_{S_0} g_x^s(\eta,\zeta)\cos(a_n\eta)\cos(c_j\zeta)d\eta d\zeta; \quad s = 1,2$$

$$e_{nj} = \begin{cases} 1/2, & n,j = 1,2,\ldots \\ 1/4, & n = 0, \quad j = 1,2,\ldots, \quad j = 0, \quad n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Запишем граничные условия для поля напряжений и перемещений при $x = 0, D$

$$\sigma_{xx}^l = \sigma_{xx}^1, \quad \sigma_{xy}^l = \sigma_{xy}^1, \quad \sigma_{xz}^l = \sigma_{xz}^1, \quad (y,z) \notin S_0 \quad (l,1 \leftrightarrow 1,r)$$

$$\sigma_{xx}^l = \sigma_{xx}^1 = 0, \quad \sigma_{xy}^l = \sigma_{xy}^1 = 0, \quad \sigma_{xz}^l = \sigma_{xz}^1 = 0, \quad (y,z) \in S_0 \quad (l,1 \leftrightarrow 1,r) \tag{2.9}$$

$$u_x^l = u_x^1, \quad u_y^l = u_y^1, \quad u_z^l = u_z^1, \quad (y,z) \notin S_0 \quad (l,1 \leftrightarrow 1,r)$$

означающие непрерывность поля напряжений (первая строка формул (2.9)) и поля перемещений (последняя строка) вне трещины.

Подставляя все выражения для постоянных в граничные условия отсутствия напряжений на берегах трещины при $x = 0$ и $x = D$, $(y,z) \in S_0$ и используя основное предположение (1.1), после некоторых рутинных преобразований получаем основную систему интегральных уравнений (ИУ)

$$\frac{1}{ac}\iint_{S_0} g_x^s(\eta,\zeta)\left\{\frac{1}{8ik_1} - \frac{K(y-\eta, z-\zeta)}{k_2^4}\right\}d\eta d\zeta + \frac{e^{ik_1D}}{8acik_1}\iint_{S_0} g_x^{3-s}(\eta,\zeta)d\eta d\zeta = \delta_{1s} + \delta_{2s}e^{ik_1D}$$

$$K(y,z) = \sum_{n+j>0} e_{nj}L_{nj}\cos(a_n y)\cos(c_j z), \quad L_{nj} = \frac{R_{nj}}{q_{nj}}, \tag{2.10}$$

$$R_{nj} = [2(a_n^2 + c_j^2) - k_2^2]^2 - 4r_{nj}q_{nj}(a_n^2 + c_j^2)$$

$(y,z) \in S_0$, $s = 1, 2$, δ_{ij} – символ Кронекера, R_{nj} – функция Релея.

Рассмотрим вспомогательное ИУ

$$\frac{1}{ack_2^2}\iint_{S_0} h(\eta,\zeta)K(y-\eta, z-\zeta)d\eta d\zeta = 1, \quad (y,z) \in S_0 \tag{2.11}$$

Очевидно, что

$$g_x^s(y,z) = \left(\frac{J_s}{8acik_1} + \frac{J_{3-s}e^{ik_1D}}{8acik_1} - \delta_{1s} - \delta_{2s}e^{ik_1D}\right)k_2^2 h(y,z), \quad s = 1, 2, \tag{2.12}$$

где

$$J_s = \iint_{S_0} g_x^s(\eta,\zeta)d\eta d\zeta \tag{2.13}$$

Интегрирование соотношений (2.12) по области S_0 дает систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных J_s

$$\left(\frac{1}{k_2^2} - \frac{H}{8acik_1}\right)J_s + (-1)^s\frac{He^{ik_1D}}{8acik_1}J_{3-s} = -H(\delta_{1s} + \delta_{2s}e^{ik_1D}), \quad s = 1, 2 \tag{2.14}$$

Здесь $H = \iint_{S_0} h(\eta,\zeta)d\eta d\zeta$ – интеграл от решения вспомогательного ИУ (2.11), из которого следует, что функция $h(y,z)$ – вещественнозначная в режиме одной моды, значит, и величина H имеет вещественное значение.

Как только вспомогательное ИУ (2.11) и система (2.14) решены, все необходимые характеристики волнового поля могут быть легко найдены. В частности, коэффициенты отражения и прохождения определяются по формулам

$$R = -\frac{J_1 + J_2e^{ik_1D}}{8acik_1}, \quad T = -\frac{J_1e^{ik_1D} + J_2}{8acik_1} + e^{ik_1D} \tag{2.15}$$

Можно показать, что для любого вещественного значения H естественное энергетическое условие $|R|^2 + |T|^2 = 1$ удовлетворяется автоматически.

Так как коэффициенты отражения и прохождения данная теория предоставляет в явном виде и единственная численная процедура – построение решения вещественного ИУ (2.11), предлагаемый метод можно назвать полуаналитическим. Эффективный способ преобразования ядра $K(y,z)$ описан в следующем разделе.

3. Эффективное преобразования ядра. Рассматривая ядро $K(y,z)$ в системе ИУ (2.10), прежде всего следует заметить, что

$$L_{nj} \approx -2(k_2^2 - k_1^2)(a_n^2 + c_j^2)^{1/2}, \quad (n,j) \to \infty \tag{3.1}$$

Следовательно, сумма, определяющая ядро, может быть представлена в виде

$$K(y,z) = -2(k_2^2 - k_1^2)\sum_{n+j>0} e_{nj}(a_n^2 + c_j^2)^{1/2}\cos(a_n y)\cos(c_j z) +$$
$$+\sum_{n+j>0} e_{nj}[L_{nj} + 2(k_2^2 - k_1^2)(a_n^2 + c_j^2)^{1/2}]\cos(a_n y)\cos(c_j z)$$

или

$$K(y,z) = -2(k_2^2 - k_1^2)I(y,z) + K_r(y,z), \quad I(y,z) = I_r(y,z) + I_s(y,z) \tag{3.2}$$

Здесь K_r — регулярная функция, функция I — сумма регулярной и нерегулярной функций.

Продемонстрируем математические преобразования для случая $a = c$. Вводя безразмерные переменные $\tilde{y} = y/a$, $\tilde{z} = z/c$ и затем опуская тильды, получаем представление

$$\frac{a}{\pi}I(y,z) = \sum_{n+j>0} e_{nj}(n^2 + j^2)^{1/2}\cos(\pi n y)\cos(\pi j z) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e_{n0} n\cos(\pi n y) + \sum_{j=1}^{\infty} e_{0j} j\cos(\pi j z) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} e_{nj}(n^2 + j^2)^{1/2}\cos(\pi n y)\cos(\pi j z) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} n\cos(\pi n y) - \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\infty} j\cos(\pi j z) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(n^2 + j^2)^{1/2}\cos(\pi n y)\cos(\pi j z) \tag{3.3}$$

Последняя двойная сумма преобразуется так. Для каждого $j \geq 1$ сумма по n вычисляется по формуле Пуассона [24]

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = \frac{p(0)}{2} + P(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} P(2\pi n),\\ p(t) = (t^2 + j^2)^{1/2}\cos(\pi t y), \quad P(u) = \int_0^{\infty} p(t)\cos(ut)dt\end{gathered} \tag{3.4}$$

Беря обобщенное значение расходящегося интеграла $P(u)$, получим

$$P(u) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t}(t^2 + j^2)^{1/2}\cos(\pi t y)\cos(ut)dt = -\frac{j}{2}\left[\frac{K_1(j|\pi y + u|)}{|\pi y + u|} + \frac{K_1(j|\pi y - u|)}{|\pi y - u|}\right], \tag{3.5}$$

где применены табличные интегралы и функция Макдональда $K_1(\xi)$ [25, 26].

После преобразований последняя сумма по n в представлении (3.3) принимает вид ($j \geq 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2 + j^2)^{1/2}\cos(\pi n y) = j\left[\frac{1}{2} - \frac{K_1(j\pi|y|)}{\pi|y|} - \sum_{n=1}^{\infty}\chi_n(j,y)\right],$$

$$\chi_n(j,y) = \frac{K_1(j|2\pi n + \pi y|)}{|2\pi n + \pi y|} + \frac{K_1(j|2\pi n - \pi y|)}{|2\pi n - \pi y|}$$

Окончательно, функция $I(y,z)$ в равенствах (3.2) представляется в виде

$$\frac{a}{\pi}I(y,z) = \frac{1}{4}\Sigma_1(y) - \frac{1}{2\pi|y|}\Sigma_2(y,z) - \frac{1}{2}\sum_{n,j=1}^{\infty}\chi_n(j,y)j\cos(\pi jz)$$
$$\Sigma_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cos(\pi ny), \quad \Sigma_2(y,z) = \sum_{j=1}^{\infty} jK_1(j\pi|y|)\cos(\pi jz) \tag{3.6}$$

Функции $\Sigma_1(y)$ и $\Sigma_2(y,z)$ вычисляются явно через сведение к табличным рядам [25]:

$$\Sigma_1(y) = \lim_{\varepsilon\to+0}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n} n\cos(\pi ny) = -\frac{1}{4\sin^2(\pi y/2)},$$

$$\Sigma_2(y,z) = -\frac{\operatorname{sign}(y)}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\sum_{j=1}^{\infty} K_0(j\pi|y|)\cos(\pi jz) =$$
$$= -\frac{\operatorname{sign}(y)}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{(y^2+z^2)^{1/2}} + \mathrm{C} + \ln\frac{|y|}{4} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\Theta_+(j,y,z) + \Theta_-(j,y,z) - \frac{1}{j}\right)\right\} = \tag{3.7}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{|y|}{(y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{|y|} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(|y|[\Theta_+^3(j,y,z) + \Theta_-^3(j,y,z)]\right)\right\},$$
$$\Theta_\pm(j,y,z) = \frac{1}{[y^2 + (2j\pm z)^2]^{1/2}},$$

где $\mathrm{C} = 0.5772\ldots$ – постоянная Эйлера [26].

Таким образом, для ядра (3.2) основного ИУ (2.11) имеем

$$K(y,z) = K_r(y,z) - 2(k_2^2 - k_1^2)[I_r(y,z) + I_s(y,z)] \tag{3.8}$$

где

$$\frac{a}{\pi}I_r = -\frac{1}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}(\Theta_+^3(j,y,z) + \Theta_-^3(j,y,z)) - \frac{1}{2}\sum_{n,j=1}^{\infty} j\cos(\pi jz)\chi_n(j,y) + \frac{1}{4\pi^2y^2} - \frac{1}{16\sin^2(\pi y/2)}$$
$$\frac{a}{\pi}I_s = -\frac{1}{4\pi^2(y^2+z^2)^{3/2}}$$

Полученное сингулярное представление ядра при малых аргументах содержит двумерный гиперсингулярный член $1/(y^2+z^2)^{3/2}$, хорошо известный в линейной теории упругости для трещин в неограниченной среде [27].

4. Численное решение вспомогательного уравнения. Основное ИУ (2.11) при использовании нового представления ядра (2.16), (2.17) перепишем в безразмерной форме ($c = a = 1$)

$$\frac{1}{k_2^2}\iint_{S_0} h(\eta,\zeta)\left\{\Phi_r(y-\eta, z-\zeta) + \frac{k_2^2 - k_1^2}{2\pi\Delta^3(\eta,\zeta,y,z)}\right\}d\eta d\zeta = 1, \quad (y,z)\in S_0 \tag{4.1}$$
$$\Phi_r(y,z) = -2(k_2^2 - k_1^2)I_r(y,z) + K_r(y,z), \quad \Delta(\eta,\zeta,y,z) = [(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2}$$

Для обеспечения устойчивого счета в представленных численных расчетах используются дискретные квадратурные формулы для двумерных гиперсингулярных ядер, основанные на применении “метода дискретных вихрей” [27], согласно которому, при дискретизации уравнения (4.1) устойчивое поведение гиперсингулярных ядер достигается за счет выбора двух различных сеток узлов для “внутренних” η, ζ и “внешних” y, z переменных. Более точно, если разделить интервал интегрирования $(-b,b)$ на N_1

равных малых подинтервалов и интервал $(-d, d)$ на N_2 подынтервалов, и, если "внутренние" узлы по каждой из декартовых координат y и z взяты точно в концах соответствующих подинтервалов, тогда "внешние" узлы следует брать каждый раз в середине между двумя соседними "внутренними" узлами:

$$\eta_k = -b + k\varepsilon_1, \quad y_l = -b + (l - 1/2)\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = 2b/N_1$$
$$\zeta_m = -d + m\varepsilon_2, \quad z_p = -d + (p - 1/2)\varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = 2d/N_2$$
$$k = 0, \dots, N_1, \quad l = 1, \dots, N_1, \quad m = 0, \dots, N_2, \quad p = 1, \dots, N_2$$

Такая дискретизация в равенстве (4.1) означает

$$\frac{1}{k_2^2}\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{m=1}^{N_2} h(\eta_k, \zeta_m)\left\{\varepsilon_1\varepsilon_2\Phi_r(y_l - \eta_k, z_p - \zeta_m) + \frac{k_2^2 - k_1^2}{2\pi}\int\limits_{\eta_{k-1}}^{\eta_k}\int\limits_{\zeta_{m-1}}^{\zeta_m}\frac{d\eta d\zeta}{\Delta^3(\eta, \zeta, y_l, z_p)}\right\} = 1 \qquad (4.2)$$

Было показано [24, 28], что здесь интегрирование гиперсингулярных ядер можно провести с использованием стандартных первообразных, так же как и для обычных непрерывных функций. Для двойного интеграла используется табличный интеграл [25]

$$\iint\frac{d\eta d\zeta}{\Delta^3(\eta, \zeta, y_l, z_p)} = -\frac{\Delta(\eta, \zeta, y_l, z_p)}{(y_l - \eta)(z_p - \zeta)} \qquad (4.3)$$

В результате уравнение (4.2) сводится в дискретной форме к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{1}{k_2^2}\sum_{k,m=1}^{N} h(\eta_k, \zeta_m)\left\{\varepsilon_1\varepsilon_2\Phi_r(y_l - \eta_k, z_p - \zeta_m) + \frac{k_2^2 - k_1^2}{2\pi}\left[-\frac{\Delta(\eta_k, \zeta_m, y_l, z_p)}{(\eta_k - y_l)(\zeta_m - z_p)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\Delta(\eta_k, \zeta_{m-1}, y_l, z_p)}{(\eta_k - y_l)(\zeta_{m-1} - z_p)} + \frac{\Delta(\eta_{k-1}, \zeta_m, y_l, z_p)}{(\eta_{k-1} - y_l)(\zeta_m - z_p)} - \frac{\Delta(\eta_{k-1}, \zeta_{m-1}, y_l, z_p)}{(\eta_{k-1} - y_l)(\zeta_{m-1} - z_p)}\right]\right\} = 1 \qquad (4.4)$$

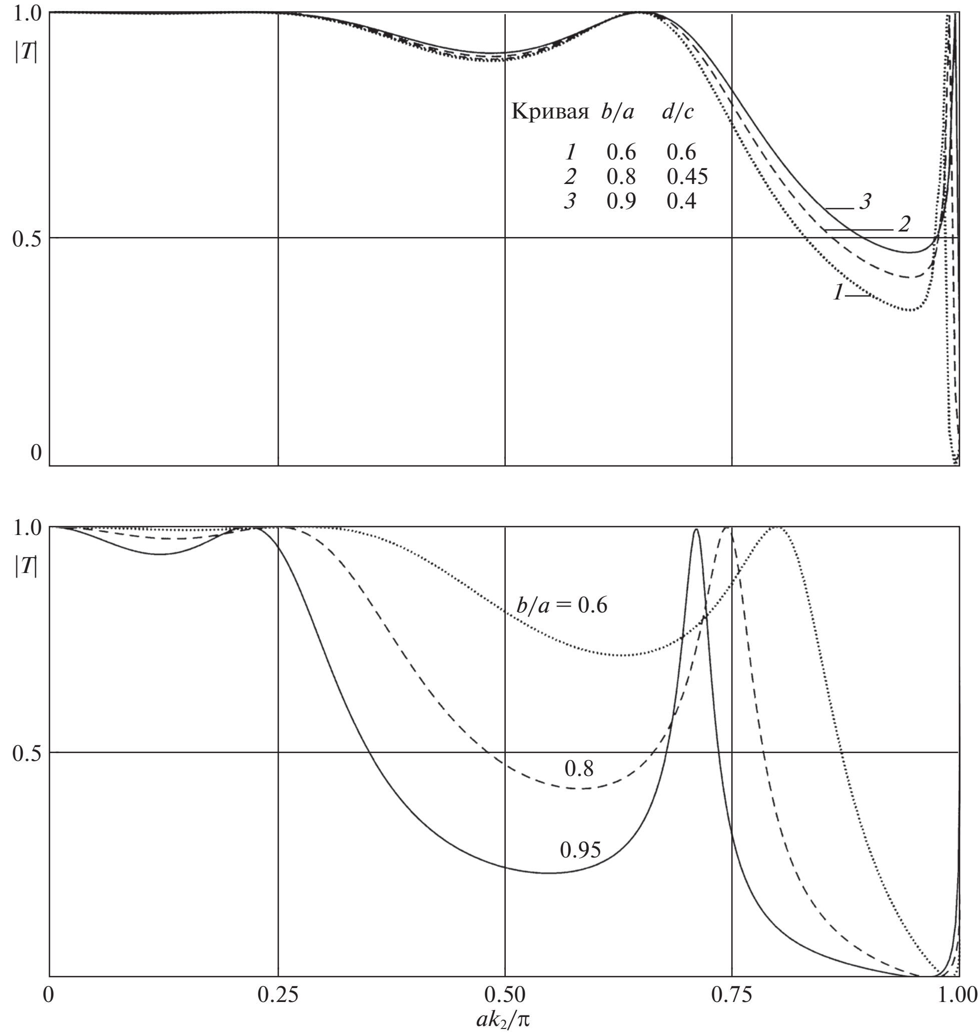
Было доказано [24], что применяемый метод дискретных вихрей автоматически обеспечивает выполнение требуемого условия: раскрытие трещины должно стремиться к нулю с приближением к внешней границе (периметру области S_0). В начальной непрерывной форме (см. уравнения (2.11) и (2.12)) это следует из качественных свойств соответствующих гиперсингулярных уравнений, а в дискретной форме это обеспечивается использованием специфического численного метода [25].

Некоторые примеры расчета представлены на фиг. 2 и фиг. 3 при отношении скоростей в упругом материале $c_p/c_s = 1.870$. Верхняя часть фиг. 2 отражает поведение коэффициента прохождения $|T|$ как функцию параметра частоты для прямоугольной трещины разной конфигурации при постоянной площади области (прямоугольника со сторонами $2b$, $2d$): $(bd)/(ac) = 0.36$ при $S_0 = 0.36$, $a = c = 1$, $D/a = 4$. В нижней части показано поведение коэффициента прохождения в зависимости от параметра частоты для квадратных трещин при $b = d$, $a = c$, $D/a = 3$ и разных относительных размерах трещины.

Коэффициент прохождения как функция расстояния между массивами для фиксированных значений относительного размера квадратной трещины b/a изображен на фиг. 3 при $b = d$, $a = c$, $ak_2/\pi = 0.6$.

Здесь не демонстрируются графики для коэффициента отражения $|R|$, так как он связан с коэффициентом прохождения $|T|$ простым соотношением: $|T| = (1 - |R|^2)^{1/2}$.

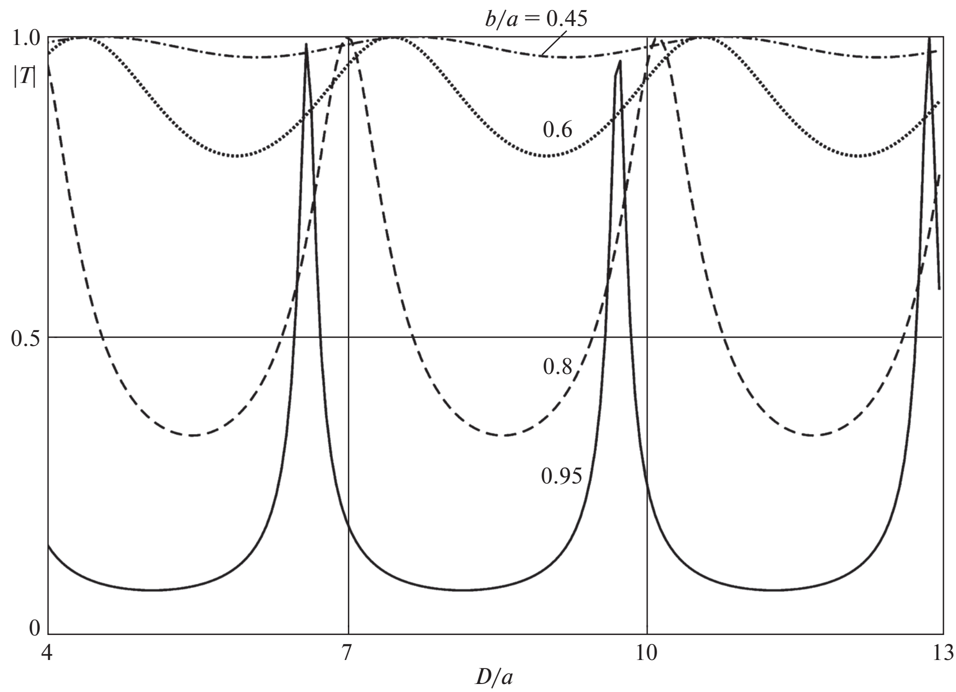
5. Заключение. Необходимо оценить, в каком физическом режиме материал с рассмотренной внутренней структурой может иметь свойства акустического фильтра. Физически, метаматериалы, работающие как акустический фильтр, значительно по-



Фиг. 2

давляют проникающую волну (низкое значение $|T|$), т.е. имеет место так называемое запирание в определенных диапазонах частот. Если зафиксировать область трещины $S_0 = bd$ и расстояние D $(D/a = 4)$, то поведение функции $|T(ak_2/\pi)|$ демонстрирует свойство акустического фильтра для разных соотношений между сторонами прямоугольной области S_0 (верхняя часть фиг. 2). Нетрудно оценить, что расхождение значений коэффициента $|T|$ для прямоугольных трещин одинаковой площади, но разной конфигурации, может достигать 30%.

Если задать величины b/a и ak_2, то поведение коэффициента $|T|$ в зависимости от расстояния между параллельными массивами D/a показывает (фиг. 3), что для длинных трещин имеет место почти полное запирание на большей части интервала изме-



Фиг. 3

нения параметра D/a, кроме некоторых узких участков, где $|T|$ приближается к единичному значению.

Из графиков нижней части фиг. 2 следует, что подавляемый коэффициент прохождения $|T(ak_2/\pi)|$ на трех частотных диапазонах одномодового интервала спадает больше с увеличением относительного размера трещины. В случае $D/a = 3$ для квадратных трещин разных размеров диапазон частот наиболее сильного запирания расположен в верхней части одномодового интервала ($0.85 < ak_2/\pi < 0.99$). Это происходит в случае трещин среднего ($b/a = 0.8$ при $S_0/S = (bd)/(ac) = 0.64$) и большого ($b/a = 0.9$ при $S_0/S = (bd)/(ac) = 0.81$) размера. Можно заметить, что для более крупных трещин этот интервал длиннее.

Из проведенного анализа следует, что требуемое управление свойствами акустического фильтра в рассматриваемой системе достигается выбором как длины трещины, так и расстояния между двумя соседними вертикальными массивами, содержащими периодические системы трещин. Предлагаемый метод может применяться и для более сложных волновых задач с большим числом параллельных вертикальных массивов, содержащих двоякопериодические системы трещин.

В принятой здесь постановке автором совместно с М.А. Сумбатяном была рассмотрена двумерная задача для двух параллельных массивов трещин [29] и задача о распространении волн через двоякопериодический и троякопериодический массивы трещин в трехмерной постановке [30, 31], а также представлено развитие полуаналитического метода решения задач высокочастотной дифракции упругих волн на трещине [32].

Автор благодарит М.А. Сумбатяна за замечания.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (9.5794.2017/8.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шендеров Е.Л.* Прохождения звука через жесткий экран конечной толщины с отверстиями // Акуст. ж. 1970. Т. 16. № 2. С. 295–304.
2. *Miles J.W.* On Rayleigh scattering by a grating // Wave Motion. 1982. № 4. P. 285–292.
3. *Achenbach J.D., Li Z.L.* Reflection and transmission of scalar waves by a periodic array of screens // Wave Motion. 1986. № 8. P. 225–234.
4. *Kok Y.-L., Gallagher N.C., Jr., Ziolkowski R.V.* Dual series solution to the scattering of plane wave from a binary conducting grating // IEEE Trans. Anten. Prop. 1989. AP-37. P. 901–917.
5. *Zarrillo G., Aguiar K.* Closed-form low frequency solutions for electromagnetic waves through a frequency selective surface // IEEE Trans. Anten. Prop. 1988. AP. 35. P. 1406–1417.
6. *Scarpetta E., Sumbatyan M.A.* Explicit analytical results for one-mode normal reflection and transmission by a periodic array of screens // J. Math. Anal. Appl. 1995. № 195. P. 736–749.
7. *Scarpetta E., Sumbatyan M.A.* On wave propagation in elastic solids with a doubly periodic array of cracks // Wave Motion. 1997. № 25. P. 61–72.
8. *Scarpetta E., Tibullo V.* Explicit results for scattering parameters in three-dimensional wave propagation through a doubly periodic system of arbitrary openings // Acta Mechanica. 2006. № 185. P. 1–9.
9. *Scarpetta E., Tibullo V.* On the three-dimensionl wave propagation through cascading screens having a periodic system of arbitrary openings // Int. J. Eng. Sci. 2008. № 46. P. 105–111.
10. *Angel Y.C., Bolshakov A.* In-plane waves in an elastic solid containing a cracked slab region // Wave Motion. 2000. № 31. P. 297–315.
11. *Scarpetta E.* In-plane problem for wave propagation through elastic solids with a periodic array of cracks // Acta Mech. 2002. № 154. P. 179–187.
12. *Angel Y.C., Achenbach J.D.* Harmonic waves in an elastic solid containing a doubly periodic array of cracks // Wave Motion. 1987. № 9. P. 377–385.
13. *Homentcovschi D., Miles R.N.* Influence of viscosity on the diffraction of sound by a periodic array of screens. The general 3-D problem // J. Acoust. Soc. Am. 2005. V 117. № 5. P. 2761–2771.
14. *Sotiropoulos D.A., Achenbach J.D.* Ultrasonic reflection by a planar distribution of cracks // J. NDE. 1988. № 7. P. 123–129.
15. *Mykhas'kiv V.V., Zhbadynskyi I.Ya., Zhang Ch.* Dynamic stresses due to time-harmonic elastic wave incidence on doubly periodic array of penny-shaped cracks // J. Math. Sci. 2014. № 203. P. 114–122.
16. *Liu Z., Zhang X., Mao Y., Zhu Y.Y., Yang Z., Chan C.T., Sheng P.* Locally resonant sonic materials // Science. 2000. V. 289. № 5485. P. 1734–1736.
17. *McPhedran R.C., Movchan A.B., Movchan N.V.* Platonic crystals: Bloch bands, neutrality and defects // Mech. Mater. 2009. № 41. P. 356–363.
18. *McPhedran R.C., Movchan A.B., Movchan N.V.* Wave scattering by platonic grating stacks // Proc. Roy. Soc. 2009. № 465. P. 3383–3400.
19. *Craster R.V., Guenneau S.* Acoustic Metamaterials. Springer Series in Materials Science 166. Dordrecht: Springer, 2013.
20. *Piau M.* Attenuation of a plane compressional wave by a random distribution in thin circular cracks // Int. J. Eng. Sci. 1979. № 17. P. 151–167.
21. *Gubernatis J.E.* Long-wave approximations for the scattering of elastic waves from flaws with applications to ellipsoidal voids and inclusions // J. Appl. Phys. 1979. № 50. P. 4046–4058.
22. *Willis J.R.* A polarization approach to the scattering of elastic waves – II. Multiple scattering from inclusions // J. Mech. Phys. Solids.1980. № 28. P. 307–327.
23. *Кузнецов С.В.* Рассеивание волн в пористых средах // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 3. Р. 81–86.
24. *Сумбатян М.А., Скалия А.* Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. М.: Физматлит, 2013. 328 с.
25. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1980.

26. *Abramowitz M., Stegun I.A.* Handbook of Mathematical Functions. Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1979.
27. *Sneddon I.N., Lowengrub M.* Crack problems in the classical theory of elasticity. L.: Wiley, 1969.
28. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985.
29. *Sumbatyan M.A., Remizov M.Yu.* On the theory of acoustic metamaterials with a triple-periodic system of interior obstacles // Advan. Struct. Mater. 2017. № 41. P. 19–33.
30. *Remizov M.Yu., Sumbatyan M.A.* 3-D one-mode penetration of elastic waves through a doubly periodic array of cracks // Math. Mech. Solids. 2018. № 23(4). P. 636–650.
31. *Remizov M.Yu., Sumbatyan M.A.* On 3d Theory of Acoustic Meta-materials with a Triple-Periodic System of Interior Obstacles // Proc. National Acad. Sci. Armenia. Mech. 2017. № 70(4). P. 35–49.
32. *Ремизов М.Ю., Сумбатян М.А.* Полуаналитический метод решения задач высокочастотной дифракции упругих волн на трещине // ПММ. 2013. Т. 77. № 4. С. 629–635.