

УДК 539.3

**ПРОЦЕССЫ КРУЧЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ
ИЗ НЕСЖИМАЕМЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ
МАКСВЕЛЛОВСКОГО ТИПА**

© 2019 г. Е. Д. Мартынова*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

* e-mail: elemarta@mail.ru

Поступила в редакцию 13.02.2017 г.

Получены аналитические решения задачи о кручении несжимаемых цилиндров, материалы которых описываются определяющими соотношениями вязкоупругих сред, обобщающими соотношения элементарной модели Максвелла на случай конечных деформаций. Определяющие соотношения отличаются друг от друга значением параметра, конкретизирующего вид используемой в них объективной производной из семейства Гордона–Шоуолтера, включающего производные Олдройда, Коттер–Ривлина и Яуманна. Показано, что при кручении цилиндра неизменной длины, материал которого описывается любым определяющим соотношением из рассматриваемого однопараметрического семейства, возникает продольная сжимающая сила (эффект Пойнтинга). При ступенчатых процессах деформации также получено качественное описание ряда имеющихся экспериментальных данных.

Ключевые слова: определяющие соотношения вязкоупругих сред при конечных деформациях, кручение вязкоупругого цилиндра, конечные деформации, объективные производные, семейство производных Гордона–Шоуолтера, эффект Пойнтинга

DOI: 10.1134/S0032823519010077

1. Введение. Построение новых определяющих соотношений (ОС) вязкоупругих сред при конечных деформациях проводится ниже с применением метода, использованного ранее для упругопластических тел и тел с памятью формы [1, 2]. Суть метода состоит в постановке новых пар тензорных мер напряжений и конечных деформаций в выбранные формы определяющих соотношений, например, применяемые при малых деформациях. В качестве таких мер, в частности, могут быть использованы “индифферентные” тензоры (другие названия – “пространственно ориентированные”, или “левые”), т.е. преобразующиеся при замене системы отсчета к тензорам $\hat{Z}_*(t)$ по формуле

$$\hat{Z}_*(t) = \hat{\theta}(t)\hat{Z}(t)\hat{\theta}^T(t),$$

где $\hat{Z}(t)$ – индифферентный тензор в исходной системе отсчета, $\hat{\theta}(t)$ – ортогональный тензор перехода к новой системе отсчета. В этом случае производные по времени $D[\hat{Z}]$, входящие в ОС, должны быть определены так, чтобы получающийся тензор $D[\hat{Z}]$ также являлся индифферентным. Производные, сохраняющие тип тензора, называются объективными.

Такой подход к построению ОС обеспечивает корректное удовлетворение принципа материальной независимости от системы отсчета. Дополнительную возможность

при использовании указанного метода построения ОС дает модификация объективных производных введением скалярных параметров, которые могут быть связаны с температурой, влажностью и т.п. Примененное здесь семейство ОС вязкоупругих сред построено на основе однопараметрического семейства объективных производных Гордона—Шоултера.

В соответствии с описанным выше методом выберем в качестве формы ОС вязкоупругих сред дифференциальную форму элементарной модели Максвелла [3]

$$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} - T^{-1}\sigma \quad (1.1)$$

и обобщим ее, используя тензоры напряжений Коши $\hat{S}$ и скорости деформации $\hat{V}$, а также — однопараметрическое семейство объективных производных Гордона—Шоултера $D_a[\hat{S}]$ [4]

$$D_a[\hat{S}] := \hat{S}^\bullet - \hat{\Omega}\hat{S} + \hat{S}\hat{\Omega} - a(\hat{V}\hat{S} + \hat{S}\hat{V}) \quad (1.2)$$

Здесь $a \in [-1, 1]$ — скалярный параметр, $\hat{V} = (\hat{D} + \hat{D}^T)/2$ — тензор скорости деформации, $\hat{\Omega} = (\hat{D} - \hat{D}^T)/2$ — тензор вихря, $\hat{D} = \hat{A} \cdot \hat{A}^{-1}$ — тензор градиента скорости, $\hat{A}$ — аффинор деформации. В результате получим следующее ОС:

$$D_a[\hat{S}] = E\hat{V} - T^{-1}\hat{S} \quad (1.3)$$

При $a = 1, -1, 0$ из выражения (1.2) получаются объективные производные Олдройда, Коттер—Ривлина и Яуманна соответственно [5, 6], а соотношения (1.3) превращаются в ОС вязкоупругих материалов, называемые в англоязычной литературе UCM (upper-convected Maxwell) [7], LCM (lower-convected Maxwell), COM (corotational Maxwell). Выражение (1.2) — частный случай трехпараметрического представления производных конвективно-коротационного типа, предложенного Г.Л. Бровко [8].

Заметим, что ОС (1.2) и (1.3) могут быть записаны с использованием производной Яуманна $D_J[\hat{S}]$ в виде

$$D_J[\hat{S}] := \hat{S}^\bullet - \hat{\Omega}\hat{S} + \hat{S}\hat{\Omega} = E\hat{V} + a(\hat{V}\hat{S} + \hat{S}\hat{V}) - T^{-1}\hat{S}$$

или в виде равенства

$$D_J[\hat{S}] = \hat{L} : \hat{V} - T^{-1}\hat{S} \quad (1.4)$$

содержащего тензор четвертого ранга $\hat{L}$

$$\hat{L} := E\hat{I} + \frac{a}{2}[T_{(1,3,2,4)}(\hat{I} \otimes \hat{S} + \hat{S} \otimes \hat{I}) + T_{(3,2,1,4)}(\hat{I} \otimes \hat{S} + \hat{S} \otimes \hat{I})],$$

обладающий симметрией по первой и второй парам индексов и внутри этих пар. Здесь $\hat{I}$ — единичный тензор четвертого ранга. С помощью операций тензорного умножения и транспонирования он может быть представлен через единичный тензор второго ранга $\hat{I}$, например, в виде $\hat{I} = T_{(1,3,2,4)}(\hat{I} \otimes \hat{I})$; T_σ — операция транспонирования тензоров, σ — перестановка упорядоченного набора чисел (1, 2, 3, 4) [9]. В литературе используется также другое обозначение операции, определяющей тензор $\hat{I}$ [10]: $\hat{I} = (\hat{I} \otimes \hat{I})^{(1324)}$. В таком случае правая часть этого равенства называется изомером соответствующего вида. При $T \rightarrow \infty$ выражение (1.4) превращается в ОС анизотропной гипопругой среды с тензором упругих модулей $\hat{L}$, зависящим от E , a и $\hat{S}$.

Соотношения (1.2) и (1.3) или эквивалентные им соотношения (1.4) содержат дополнительный параметр a по сравнению с упомянутыми моделями типа УСМ, что расширяет возможность описания свойств вязкоупругих материалов.

2. Определяющее соотношение для несжимаемого вязкоупругого материала. В дальнейшем будем полагать вязкоупругий материал несжимаемым. В этом случае тензор напряжений Коши определяется с точностью до неопределенного шарового тензора $-p\hat{I}$ и может быть представлен в виде

$$\hat{\sigma} = \hat{S} - p\hat{I} \quad (2.1)$$

$\hat{S}$ – тензор “определяющих напряжений” [11], находится из уравнения (1.4) или из эквивалентного уравнения (1.3). Заметим, что в общем случае $\hat{S}$ не является девиатором тензора $\hat{\sigma}$.

3. Задача о кручении сплошного вязкоупругого цилиндра. Кинематика движения сплошного несжимаемого цилиндра при кручении без удлинения в цилиндрической системе координат задается соотношениями

$$r = R, \quad \varphi = \Phi + \alpha(t), \quad z = Z, \quad \alpha(t) := \kappa(t)Z, \quad (3.1)$$

где R, Φ, Z – цилиндрические координаты точки в начальный момент времени, r, φ, z – текущие цилиндрические координаты, $\kappa(t)$ – крутка. Выберем цилиндрические координаты точек тела в начальной конфигурации R, Φ, Z в качестве лагранжевых координат. В этом случае аффинор деформации может быть представлен в виде [12]

$$\hat{A} = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_0^r + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_0^\varphi + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_0^z \quad (3.2)$$

Здесь $\mathbf{e}_0^r, \mathbf{e}_0^\varphi, \mathbf{e}_0^z$ – векторы взаимного базиса лагранжевой системы координат в начальной конфигурации, $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ – векторы естественного лагранжева базиса в текущей конфигурации. Поскольку $|\mathbf{e}_0^\varphi| = R^{-1}$ и, в силу закона движения (3.1), $|\mathbf{e}_\varphi| = R$, в равенстве (3.2) векторы $\mathbf{e}_\varphi$ и $\mathbf{e}_0^\varphi$ можно заменить ортами $\mathbf{e}'_\varphi$ и $\mathbf{e}_0'^\varphi$:

$$\hat{A} = \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_0^r + \mathbf{e}'_\varphi \otimes \mathbf{e}_0'^\varphi + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_0^z \quad (3.3)$$

При повороте поперечного сечения цилиндра на угол α векторы $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}'_\varphi$ выражаются через $\mathbf{e}_{0r}$ и $\mathbf{e}'_{0\varphi}$ соотношениями

$$\mathbf{e}_r = \cos \alpha \mathbf{e}_{0r} + \sin \alpha \mathbf{e}'_{0\varphi}, \quad \mathbf{e}'_\varphi = -\sin \alpha \mathbf{e}_{0r} + \cos \alpha \mathbf{e}'_{0\varphi} \quad (3.4)$$

Для вычисления вектора $\bar{\mathbf{e}}_z$ воспользуемся равенством $\mathbf{e}_z = \partial \mathbf{x} / \partial Z$, где $\mathbf{x}$ – радиус-вектор точки цилиндра в текущей конфигурации, причем вследствие закона движения (3.1) $\mathbf{x} = R\mathbf{e}_r + Z\mathbf{e}_{0z}$. На основании равенств (3.4) имеем $\partial \mathbf{e}_r / \partial Z = k\mathbf{e}'_\varphi$ и, следовательно,

$$\mathbf{e}_z = Rk\mathbf{e}'_\varphi + \mathbf{e}_{0z} = Rk(-\sin \alpha \mathbf{e}_{0r} + \cos \alpha \mathbf{e}'_{0\varphi}) + \mathbf{e}_{0z} \quad (3.5)$$

Подставляя выражения (3.4) и (3.5) в соотношение (3.3) и учитывая, что

$$\mathbf{e}_{0r} = \mathbf{e}_0^r, \quad \mathbf{e}'_{0\varphi} = \mathbf{e}_0'^\varphi, \quad \mathbf{e}_{0z} = \mathbf{e}_0^z$$

получим выражение для аффинора деформации в виде

$$\begin{aligned} \hat{A} = & (\cos \alpha \mathbf{e}_{0r} + \sin \alpha \mathbf{e}'_{0\varphi}) \otimes \mathbf{e}_{0r} + (-\sin \alpha \mathbf{e}_{0r} + \cos \alpha \mathbf{e}'_{0\varphi}) \otimes \mathbf{e}'_{0\varphi} + \\ & + [Rk(-\sin \alpha \mathbf{e}_{0r} + \cos \alpha \mathbf{e}'_{0\varphi}) + \mathbf{e}_{0z}] \otimes \mathbf{e}_{0z} \end{aligned}$$

Таблица 1.

a	S_{23}/E	S_{22}/E	S_{33}/E
произвольное	$X \frac{1 - e^{-\tau} \cos \eta + Y e^{-\tau} \sin \eta}{2(Y^2 + 1)}$	$-\frac{S_{33}(1 + a)}{E(1 - a)}$	$Y \frac{Y e^{-\tau} \cos \eta + e^{-\tau} \sin \eta - Y}{2(Y^2 + 1)(1 + a)}$
-1	$Xg(\tau)/2$	0	$-X^2 f(\tau)$
1	$Xg(\tau)/2$	$X^2 f(\tau)$	0
0	$X \frac{1 - e^{-\tau} \cos \xi + X e^{-\tau} \sin \xi}{2(X^2 + 1)}$	$S_{22} = -S_{33}$	$X \frac{X e^{-\tau} \cos \xi + e^{-\tau} \sin \xi - X}{2(X^2 + 1)}$

Таким образом, в диадном базисе, построенном на векторах $\mathbf{e}_{0r}$, $\mathbf{e}'_{0\phi}$, $\mathbf{e}_{0z}$, матрица аффинора деформации имеет вид

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & -\kappa R \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha & \kappa R \cos \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найденные ниже компоненты тензора напряжений также относятся к упомянутому базису.

Учитывая, что напряженно-деформированное состояние остается неизменным по длине цилиндра, будем рассматривать сечение $Z = 0$. Для него $\alpha(t) = 0$, и аффинор и введенные выше матрицы принимают вид

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \kappa(t)R \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{V} = \frac{1}{2} \kappa(t)R \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Omega} = \frac{1}{2} \kappa(t)R \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Подставляя полученные матрицы в ОС (1.2), (1.3) и (2.1), получим систему линейных дифференциальных уравнений относительно компонент тензора $\hat{S}$. Полагая далее $\kappa(t) = \nu t$, $\nu = \text{const}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{S}_{11} &= -S_{11}, & \dot{S}_{22} &= -S_{22} + S_{23}\rho L(1 + a), & \dot{S}_{33} &= -S_{33} - S_{23}\rho L(1 - a) \\ \dot{S}_{12} &= -S_{12} + S_{13}\rho L(1 + a)/2, & \dot{S}_{13} &= -S_{13} - S_{12}\rho L(1 - a)/2 \\ \dot{S}_{23} &= -S_{23} - S_{22}\rho L(1 - a)/2 + S_{33}\rho L(1 + a)/2 + E\rho L/2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь координаты R , ϕ , Z занумерованы в порядке 1, 2, 3; точкой над компонентами тензора $\hat{S}$ обозначена производная по безразмерному параметру $\tau := t/T$, а также введены безразмерные параметры $\rho := R/R_0$ и $L := R_0 T \nu$. Будем считать, что $\hat{S}(0) = 0$, $\rho(0) = 0$. В таком случае $\hat{S}(0) = \hat{0}$, и решение системы (3.6) имеет вид

$$S_{11} = S_{12} = S_{13} = 0, \quad S_{22}(1 - a) = -S_{33}(1 + a)$$

(для любого a), остальные безразмерные компоненты $\hat{S}/E$ представлены в таблице 1 (для произвольного значения a и в частных случаях $a = \pm 1, 0$).

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} X &:= RT\nu, & Y &:= RT\nu\sqrt{1 - a^2}, & \xi &:= \tau X, & \eta &:= \tau Y, \\ g(\tau) &:= 1 - e^{-\tau}, & f(\tau) &:= 1 - e^{-\tau} - \tau e^{-\tau}. \end{aligned}$$

Значения S_{22}/E при $a = 1$ и S_{33}/E при $a = -1$ получаются из выражений, приведенных во второй строке таблицы 1, соответствующими предельными переходами или непосредственным решением системы (3.6) при указанных значениях параметра a .

Неизвестный аддитивный шаровой тензор $-p(\rho, \tau)\hat{I}$, с точностью до которого соотношением (2.1) определяется тензор напряжений Коши для несжимаемого материала, в рассматриваемой задаче находится из уравнения равновесия цилиндра в проекции на ось R

$$\partial(S_{11} - p)/\partial\rho + (S_{11} - S_{22})/\rho = 0$$

при граничном условии $(S_{11} - p)|_{\rho=1} = 0$. Учитывая, что $S_{11} \equiv 0$, получим

$$p(\rho, \tau) = \int_{\rho}^1 S_{22}(\rho, \tau) \rho^{-1} d\rho \quad (3.7)$$

Найденное ненулевое значение аддитивного тензора $-p(\rho, \tau)\hat{I}$ отличает решение рассматриваемой задачи о кручении цилиндра от решения аналогичной задачи о простом сдвиге [13].

Подставляя приведенные в таблице 1 выражения для компонент тензора $\hat{S}$, а также найденную функцию $p(\rho, \tau)$ в формулу (2.1), найдем тензор напряжения Коши $\hat{\sigma}$ в рассматриваемой задаче. Зная компоненты $\sigma_{23}(\rho, \tau)$ и $\sigma_{33}(\rho, \tau)$, вычислим продольную силу и крутящий момент, соответствующие рассматриваемой кинематике (3.1)

$$N(\tau) = 2\pi R_0^2 \int_0^1 \sigma_{33}(\rho, \tau) \rho d\rho \quad M(\tau) = 2\pi R_0^3 \int_0^1 \sigma_{23}(\rho, \tau) \rho^2 d\rho \quad (3.8)$$

В частных случаях $a = \pm 1$ интеграл в выражении (3.7) легко вычисляется, в итоге получаются следующие выражения для $p(\rho, \tau)$ и компонент тензора напряжения Коши:

при $a = 1$

$$\begin{aligned} p^{OI}(\rho, \tau) &= EL^2 f(\tau)(1 - \rho^2)/2 \\ \sigma_{11}^{OI} &= \sigma_{33}^{OI} = -EL^2 f(\tau)(1 - \rho^2)/2, \quad \sigma_{22}^{OI} = EL^2 f(\tau)(3\rho^2 - 1)/2 \\ \sigma_{32}^{OI} &= E\rho Lg(\tau)/2, \quad \sigma_{12}^{OI} = \sigma_{13}^{OI} = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

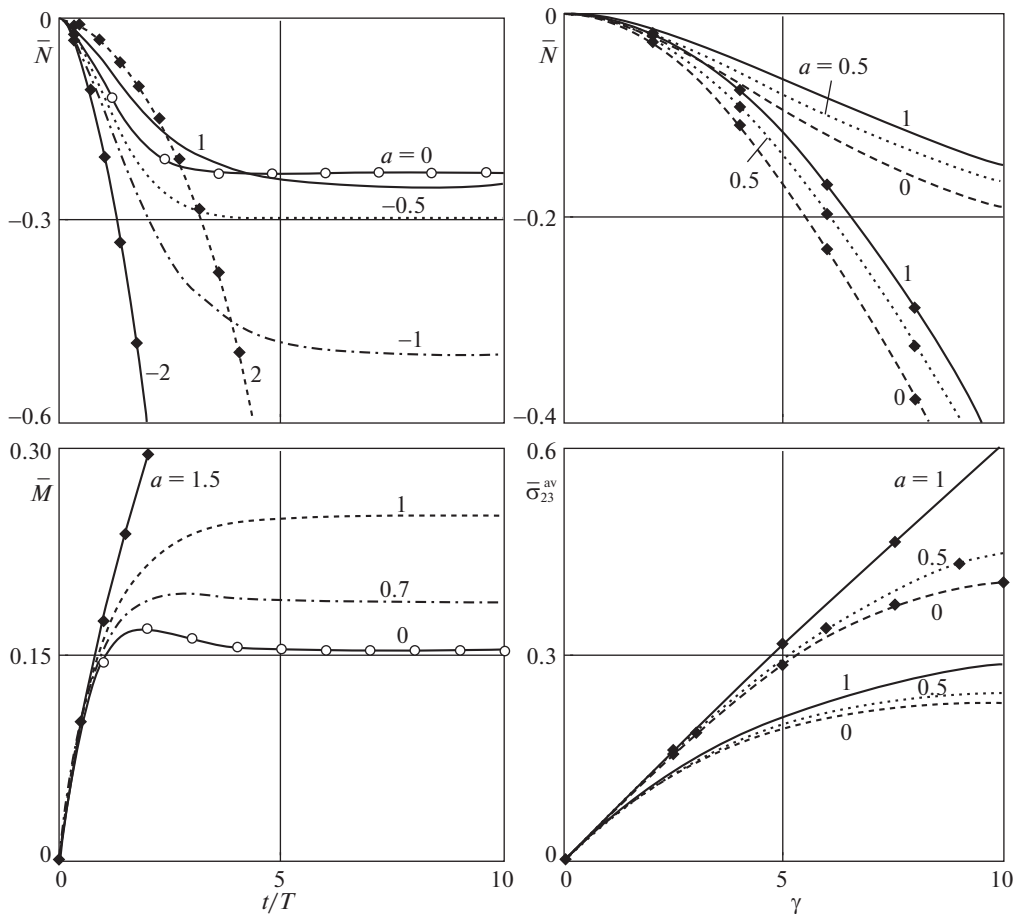
при $a = -1$

$$\begin{aligned} p^{CR}(\rho, \tau) &= 0, \quad \sigma_{11}^{CR} = \sigma_{22}^{CR} = 0, \quad \sigma_{33}^{CR} = -E\rho^2 L^2 f(\tau) \\ \sigma_{32}^{CR} &= E\rho Lg(\tau)/2, \quad \sigma_{12}^{CR} = \sigma_{13}^{CR} = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

(верхние индексы указывают на объективную производную, соответствующую выбранным значениям параметра a : Олдройда или Коттер–Ривлина). Подставляя выражения (3.9) и (3.10) в формулы (3.8), получим

$$\begin{aligned} N(\tau)|_{a=-1} &= N^{OI}(\tau) = \frac{1}{2} N(\tau)|_{a=1} = \frac{1}{2} N(\tau)^{CR} = -\frac{\pi R_0^2}{4} EL^2 f(\tau) = -\frac{\pi R_0^4}{4} ET^2 v^2 f(\tau) \\ M(\tau)|_{a=\pm 1} &= M^{OI}(\tau) = M^{CR}(\tau) = \frac{\pi R_0^3}{4} ELg(\tau) = \frac{\pi R_0^4}{4} ETvg(\tau) \end{aligned} \quad (3.11)$$

При других значениях параметра a интеграл (3.7) находится численно.



Фиг. 1

В левой части фиг. 1 приведены графики безразмерных усилий $\bar{N}(\tau) = N(\tau)/(\pi R_0^2 E)$ (верхняя часть) и моментов $\bar{M}(\tau) = M(\tau)/(\pi R_0^3 E)$ (нижняя часть) при разных значениях параметра a , при которых они были получены; кривыми с маркерами в виде ромбов показаны функции $\bar{N}(\tau)$ и $\bar{M}(\tau)$ при $a \notin [-1, 1]$.

Заметим, что из формул (3.11) функции $f(\tau)$ и $g(\tau)$ могут быть выражены через осевую силу $N(\tau)$ и момент $M(\tau)$ соответственно, после чего подставлены в соотношения (3.9) или (3.10). В результате получим

$$\sigma_{23}^{Ol}(R, t) = \sigma_{23}^{CR}(R, t) = M(t) \frac{R}{J_p}, \quad \sigma_{33}^{Ol}(R, t) = N^{Ol}(t) \frac{R_0^2 - R^2}{J_p},$$

$$\sigma_{33}^{CR}(R, t) = N^{CR}(t) \frac{R^2}{J_p}; \quad J_p = \pi \frac{R_0^4}{2},$$

где J_p – полярный момент инерции кругового сечения.

4. Ступенчатые процессы деформации.

Одноступенчатый процесс. Приведенное в предыдущем разделе решение задачи о кручении вязкоупругого цилиндра, полученное в предположении, что $\dot{\kappa}(t) = \text{const}$, позволяет найти напряжения для кусочно-линейной функции крутки

$$\kappa(t) = \begin{cases} \nu t & \text{при } t \in [0, t_0] \\ \nu t_0 & \text{при } t > t_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

При $t \in [0, t_0]$ решение определяется формулами из таблицы 1. При $t > t_0$ в системе (3.6) $\dot{\kappa}(t) = 0$ и, используя предположение о непрерывности напряжений при $t = t_0$, в этом случае для ненулевых компонент тензора $\hat{S}$ легко получим

$$S_{\alpha\beta}(R, t) = S_{\alpha\beta}(R, t_0) \exp(-(t - t_0)/T), \quad \alpha, \beta = 2, 3 \quad (4.2)$$

Переход в выражениях (4.1) и (4.2) к пределу при $t_0 \rightarrow 0$, $\nu t_0 = \kappa_0$ дает решение рассматриваемой задачи о кручении в случае одноступенчатого процесса деформации $\kappa(t) = \kappa_0 h(t)$ ($h(t)$ – функция Хевисайда)

$$S_{\alpha\beta}(R, t) = S_{\alpha\beta}^0(R) \exp(-t/T), \quad S_{\alpha\beta}^0(R) := \lim_{\substack{t_0 \rightarrow 0 \\ \nu t_0 = \kappa_0}} S_{\alpha\beta}(R, t_0), \quad \alpha, \beta = 2, 3 \quad (4.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} 2S_{23}^0(R) &= E \frac{\sin u}{\sqrt{1-a^2}}, & 2S_{22}^0(R) &= E \frac{1-\cos u}{1-a}, \\ 2S_{33}^0(R) &= -E \frac{1-\cos u}{1+a}; & u &:= R\kappa_0 \sqrt{1-a^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

При этом, согласно формулам (3.7) и (3.8),

$$p(R, t) = \exp(-t/T) \int_R^{R_0} S_{22}^0(R) R^{-1} dR \quad (4.5)$$

$$M(t) = 2EJ_p \kappa_0 u_0^{-4} [2u_0 \sin u_0 - (u_0^2 - 2) \cos u_0 - 2] \exp(-t/T), \quad u_0 := R_0 \kappa_0 \sqrt{1-a^2}$$

Продольная сила $N(t)$ в общем случае не выражается через элементарные функции, но легко может быть найдена численно.

Из приведенных формул следует, что если $\kappa(t)$ имеет одноступенчатый вид (процесс релаксации), то $S_{\alpha\beta}(R, t)$, $p(R, t)$, $N(t)$ и $M(t)$ асимптотически стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$, причем полученное решение будет иметь физический смысл, если S_{23}^0 , S_{22}^0 и $|S_{33}^0|$ возрастают с ростом κ_0 для любого R , т.е. при $R_0 \kappa_0 \sqrt{1-a^2} \leq \pi/2$.

В частных случаях $a = \pm 1, 0$ из формул (4.4) и (4.5) следует:

при $a = 1$

$$\begin{aligned} 2S_{23}^0(R) &= ER\kappa_0, & 2S_{22}^0(R) &= E(R\kappa_0)^2, & S_{33}^0(R) &= 0, \\ 4p(R, t) &= E(R_0^2 - R^2)\kappa_0^2 \exp(-t/T), \end{aligned}$$

$$4N(t) = -E\kappa_0^2 J_p \exp(-t/T), \quad 2M(t) = E\kappa_0 J_p \exp(-t/T),$$

при $a = -1$

$$2S_{23}^0(R) = ER\kappa_0, \quad S_{22}^0(R) = 0, \quad 2S_{33}^0(R) = -E(R\kappa_0)^2, \quad p(R, t) = 0$$

$$2N(t) = -E\kappa_0^2 J_p \exp(-t/T), \quad 2M(t) = E\kappa_0 J_p \exp(-t/T),$$

при $a = 0$

$$2S_{23}^0(R) = E \sin(R\kappa_0), \quad 2S_{22}^0(R) = -2S_{33}^0(R) = E[1 - \cos(R\kappa_0)]$$

$$M(t) = \pi E \kappa_0^{-3} [2R_0 \kappa_0 \sin(R_0 \kappa_0) - (R_0^2 \kappa_0^2 - 2) \cos(R_0 \kappa_0) - 2] \exp(-t/T)$$

Аналогично можно рассмотреть *двухступенчатый процесс деформации* с функцией крутки вида

$$\kappa(t) = \kappa_0[h(t) - h(t - t_1)] + \kappa'_0 h(t - t_1)$$

В этом случае при $0 < t \leq t_1$ решение задается формулами (4.3), при $t > t_1$ напряжения получаются предельным переходом при

$$t'_0 \rightarrow 0, \quad \nu t'_0 = \kappa_0 - \kappa'_0 \quad (\kappa_0 > \kappa'_0)$$

из решения задачи о кручении цилиндра с круткой

$$\kappa(t) = \begin{cases} \kappa_0 & \text{при } t \in (0, t_1] \\ \kappa_0 - \nu(t - t_1) & \text{при } t \in (t_1, t_1 + t'_0] \\ \kappa'_0 & \text{при } t > t_1 + t'_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

В результате при $t > t_1$ будем иметь

$$S_{\alpha\beta}(R, t) = S_{\alpha\beta}^1(R) \exp[-(t - t_1)/T], \quad \alpha, \beta = 2, 3 \quad (4.7)$$

Здесь

$$S_{23}^1(R) = E \frac{[\sin(2u - u') + \sin u'] \exp(-t_1/T) - 2 \sin(u - u')}{4\sqrt{1 - a^2}} \quad (4.8)$$

$$2(1 - a)S_{22}^1(R) = -2(1 + a)S_{33}^1(R) = E[\cos(u - u') - \cos u'] \exp(-t_1/T) + 1 - \cos(u - u') \quad (4.9)$$

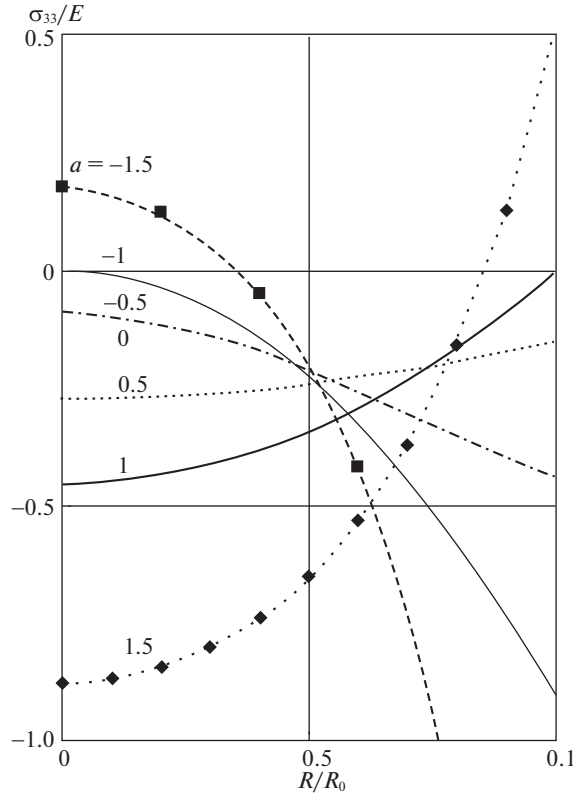
$$u' := \sqrt{1 - a^2} R \kappa'_0$$

5. Анализ результатов. 1. Из выражений для тензора $\hat{S}$, приведенных в таблице 1, а также формул (3.7) и (3.8) видно, что ОС (1.3) и (2.1) при любом значении параметра a позволяют описать возникновение продольной силы при кручении вязкоупругого цилиндра неизменной длины, что аналогично эффекту Пойнтинга для упругих материалов [11], причем несложно показать, что $N(t) < 0$ при $t > 0$. При этом зависимости безразмерного продольного усилия $\bar{N}(\tau)$ и безразмерного среднего сдвигового напряжения

$$\bar{\sigma}_{23}^{\text{av}}(t) = \frac{2}{ER_0^2} \int_0^{R_0} \sigma_{23}(R, t) R dR$$

от деформации сдвига $\gamma(t) = R_0 \kappa(t)/2$, приведенные в правой части фиг. 1 при разных значениях параметра a , качественно согласуются (в пределах монотонности функций $N(t)$ и $M(t)$ (анализ монотонности см. ниже)) с экспериментальными данными, полученными при кручении цилиндров неизменной длины из наполненного полимерного материала, имитирующего твердое топливо [14]. Кривые с маркерами в виде ромбов соответствуют скорости изменения крутки в 10 раз большей, чем кривые без маркеров.

2. Согласно формулам (3.11), при $a = \pm 1$ и любых $t > 0$ выполняются неравенства $N(t) < 0$, $M(t) > 0$, т.е. осевая сила — сжимающая, причем эта сила и момент — монотонные функции времени, так как $\dot{g}(t) > 0$, $\dot{f}(t) > 0$.



Фиг. 2

При произвольных $a \neq \pm 1$, дифференцируя приведенные в таблице 1 выражения, получим

$$\frac{\partial S_{23}(\rho, \tau)}{\partial \tau} = \frac{EX}{2T} e^{-\tau} \cos \eta(\tau), \quad \frac{\partial S_{33}(\rho, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{1-a}{1+a} \frac{\partial S_{22}(\rho, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{EX}{2T} \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} e^{-\tau} \sin \eta(\tau)$$

Отсюда следует, что, также как при использовании производной Яуманна при простом сдвиге, $\sigma_{\alpha\beta}(R, t)$ ($\alpha, \beta = 2, 3$) — немонотонные функции t . Условие монотонности по времени всех компонент тензора напряжения для любого фиксированного R , а также крутящего момента и продольной силы имеет вид

$$0 \leq R_0 t v \sqrt{1-a^2} \leq \pi/2,$$

где $vt = \kappa(t)$ — крутка. При заданном a отсюда можно получить ограничение, которое надо наложить на функцию $\kappa(t)$, а при известном диапазоне изменения $\kappa(t)$ — условие для параметра a , при котором рассматриваемые величины изменяются монотонно:

$$1 - a^2 \leq a_*^2; \quad a_* := \pi/(2R_0 \kappa(t))$$

В частности, если $a_* > 1$, условие монотонности выполняется при любом a . Возможная немонотонность функции $M(t)$ проиллюстрирована в левой нижней части фиг. 1.

3. На фиг. 2 показаны зависимости σ_{33}/E от R при фиксированном t для разных значений a . При любых $a \in [-1, 1]$ $\sigma_{33}(R) \leq 0$. Известен эксперимент Ривлина [15], в

котором определяется распределение напряжения σ_{33} по радиусу при кручении резинового образца. Вероятно, аналогичный эксперимент для вязкоупругого материала можно использовать для выбора параметра a . Заметим, что при $a \notin [-1, 1]$ в поперечном сечении цилиндра возникают области растягивающих осевых напряжений (линии с маркерами в виде ромбов на фиг. 2).

4. Для двухступенчатого процесса кручения из формул (4.9) следует, что при

$$\kappa_0 = 2\kappa'_0 \quad (5.1)$$

величины S_{22}^1 и S_{33}^1 , определяющие скачок σ_{33} и, следовательно, продольной силы N при переходе ко второму этапу, не зависят от длительности первого этапа t_1 (так как выражения в фигурных скобках становятся равными нулю). Отсюда следует, что функции $N(t - t_1)$ при $t > t_1$ имеют одинаковый вид при любом t_1 . Заметим также, что, положив в формулах (4.4) для одноступенчатого процесса кручения $\kappa_0 = \kappa'_0$, получим при выполнении условия (5.1) следующие равенства:

$$S_{\alpha\alpha}^0(R) = S_{\alpha\alpha}^1(R), \quad \alpha = 1, 2$$

и значит, в рассматриваемом случае нормальное усилие на втором этапе двухступенчатого кручения имеет такой же вид, как и при одноступенчатом процессе. Два отмеченных свойства функции $N(t)$, полученных аналитически в предположении о несжимаемости материала и выполнении ОС (1.3) и (2.1), соответствуют результатам, наблюдавшимся при кручении цилиндров из полиметилметакрилата и полиизобутилена в экспериментах, где длина образцов оставалась неизменной [16].

Виды функций $N(t)/E$ для разных значений a при

$$\kappa_0 = 1, \quad \kappa'_0 = 0.5, \quad t_1/T = 0.5 \quad (5.2)$$

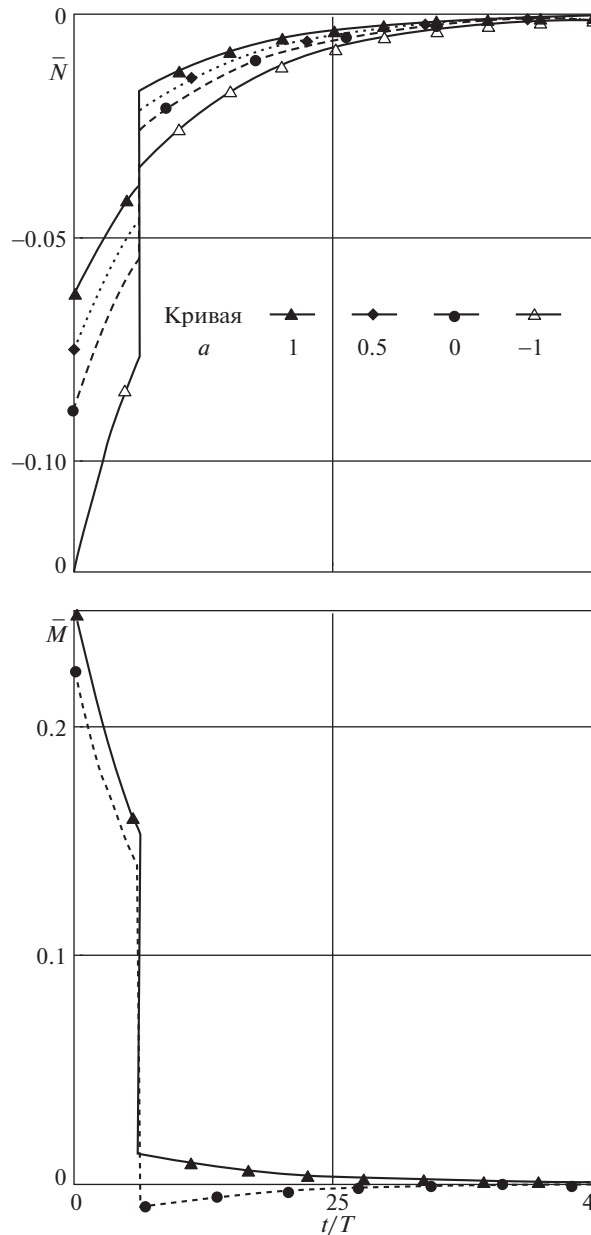
показаны в верхней части фиг. 3.

5. Из формулы (4.8) следует, что на втором этапе двухступенчатого процесса кручения величина $S_{23}^1(R)$ может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от значений κ_0 , κ'_0 , a и t_1/T . Крутящий момент при $t > t_1$ определяется по формуле

$$M(t) = 2\pi \exp[-(t - t_1)/T] \int_{R_0}^R S_{23}^1(R) R^2 dR \quad (5.3)$$

и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, убывая от некоторого положительного значения или возрастая от отрицательного в зависимости от знака интеграла в формуле (5.3). Указанные возможности проиллюстрированы в нижней части фиг. 3, где приведены графики безразмерного момента $\bar{M}(t)$ для двухступенчатого процесса кручения при тех же значениях параметров (5.2), что и для графиков в верхней части. Заметим, что на экспериментальных графиках [16] функция $M(t)$ при $t > t_1$ возрастает до некоторого *положительного* значения, в то время как из формулы (5.3) следует, что $M(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Эта особенность решения, полученного для двухступенчатого кручения при использовании ОС (1.3) и (2.1), имеет место также для элементарной модели Максвелла (1.1), на основе которой они построены, и “унаследована” от нее.

6. Заключение. Предложено семейство удовлетворяющих принципу материальной объективности определяющих соотношений вязкоупругих сред при конечных деформациях, обобщающее соотношения элементарной модели Максвелла. Разные элемен-



Фиг. 3

ты семейства формально связаны с однопараметрическим семейством объективных производных Гордона–Шоултера. Показано, что эти соотношения могут быть приведены к виду (1.4), содержащему производную Яуманна и тензор четвертого ранга, соответствующий некоторому анизотропному гипопругому материалу, компоненты которого зависят от параметра a , определяющего конкретную производную из семейства Гордона–Шоултера, модуля упругости E , входящего в исходную модель Максвелла, и тензора напряжений Коши.

Аналитически решена задача о кручении вязкоупругого цилиндра постоянной длины, материал которого описывается произвольным соотношением из указанного семейства. Найденное решение для любого значения параметра a качественно описывает факты, наблюдаемые в экспериментах по кручению вязкоупругих цилиндров неизменной длины: эффект Пойнтинга, зависимость напряженного состояния от скорости деформации, особенности поведения при двухступенчатых нагружениях и релаксации. Для каждого значения параметра a существует область изменения крутки, зависящая от a и радиуса цилиндра, в пределах которой напряжения монотонно меняются со временем. Таким образом, на примере конкретной рассмотренной задачи показана применимость семейства определяющих соотношений (1.3), (2.1) (при любом значении входящего в них параметра a) для описания поведения вязкоупругих материалов с учетом геометрической нелинейности.

Автор благодарит Е.И. Рыжака за доброжелательную, конструктивную критику, полезные замечания и советы, касающиеся содержания работы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16-01-00669 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бровко Г.Л., Финошкина А.С. Использование новых объективных производных в моделях пластичности при конечных деформациях // Современные проблемы термовязкопластичности в прикладных задачах анализа конструкций и технологий высоких параметров. Тр. VI школы-семинара. М.: Изд-во ун-та машиностроения, 2013. С. 24–33.
2. Шуткин А.С. Подходы к обобщению определяющих соотношений деформируемых твердых тел на область конечных деформаций // Мех. композ. матер. констр. 2010. Т. 16. № 2. С. 166–180.
3. Ильющин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
4. Gordon R.J., Schowalter W.R. Anisotropic fluid theory: a different approach to the dumbbell theory of dilute polymer solutions // Trans. Soc. Rheol. 1972. V. 16. P. 79–97.
5. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
6. Бровко Г.Л. Некоторые подходы к построению определяющих соотношений пластичности при больших деформациях // Упругость и неупругость. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. С. 68–81.
7. Oldroyd J.G. On the formulation of rheological equations of states // Proc. R. Soc. London. Ser. A. 1950. V. 200. P. 523–541.
8. Бровко Г.Л. Свойства и интегрирование некоторых производных от тензорных процессов в механике сплошной среды // Изв. РАН. МТТ. 1990. № 1. С. 54–60.
9. Бровко Г.Л. Элементы математического аппарата механики сплошной среды. М.: Физматлит, 2015. 422 с.
10. Рыжак Е.И. Бескоординатное тензорное исчисление для механики сплошных сред. Учебное пособие. М.: МФТИ, 2011. 170 с.
11. Truesdell C. A First Course in Rational Continuum Mechanics. New York: Academic Press, 1977. 304 p. = Труделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
12. Бровко Г.Л. Определяющие соотношения механики сплошной среды. Развитие математического аппарата и основ общей теории. М.: Наука, 2017. 431 с.
13. Мартынова Е.Д., Стеценко С.Н. Использование однопараметрического семейства объективных производных Гордона–Шоуолтера для описания конечных деформаций вязкоупругих тел // Вестн. МГУ. Сер. I. Мат. Мех. 2017. № 6. С. 64–68.
14. Lenoe E.M., Heller R.A., Freudenthal A.M. Viscoelastic behavior of a filled elastomer in the linear and nonlinear range // Trans. Soc. Rheol. 1965. V. 9. № 2. P. 77–102.
15. Green A.E., Adkins J.E. Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics. Oxford: Clarendon, 1960. 328 p. = Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
16. McKenna G.B. Measurement of the torque and normal force in torsion in the study of the thermoviscoelastic properties of polymer glasses // Relaxations in Complex Systems. Ed. by K.L. Ngai and G.B. Wright. Springfield, VA: U.S. Gov. Printing Office, NTIS, 1985. P. 129–143.