

УДК 539.3

СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ОБЪЕМНЫМИ СИЛАМИ В ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

© 2019 г. В. И. Кузьменко*, Н. В. Кузьменко**, Л. В. Левина***, В. Б. Пеньков****

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

* e-mail: vasilykuzmenko@yandex.ru

** e-mail: nik2.kuzmenko@mail.ru

*** e-mail: satalkina_lyubov@mail.ru

**** e-mail: vbpenkov@mail.ru

Поступила в редакцию 11.11.2017 г.

Обоснован метод решения задач изотропной теории упругости с полиномиальными объемными силами. Существование базиса пространства состояний, порождаемых мономами произвольных порядков – компонентами объемной силы, позволяет для любой полиномиальной силы строго выписать соответствующее напряженно-деформированное состояние. Выполнены решения основной смешанной задачи о равновесии: 1) защемленного по основанию усеченного цилиндра при действии неконсервативной объемной силы, 2) защемленного по экваториальному сечению тяжелого полушара, имеющего неоднородный модуль сдвига, характерный для тел с приповерхностным упрочнением.

Ключевые слова: изотропная теория упругости, полиномиальные объемные силы, задачи о равновесии, метод граничных состояний с возмущениями, энергетический метод

DOI: 10.1134/S0032823519010053

В практике инженерных расчетов напряженно-деформированное состояния (НДС) упругих тел в аналитической форме учет объемных сил детально разработан лишь для консервативных (потенциальных) сил. Это связано с использованием общего решения Папковича–Нейбера [1], обусловленного учетом таких сил, и по причине того, что в традиционных исследованиях трудно встретить объемные силы непотенциального характера. Имеются классические примеры решения задач с потенциальными силами [2]. Общее решение в перемещениях выражается через тензор Грина и может быть получено лишь численно, что ограничивает возможность его применения. Расширение числа вариантов исследуемых объектов приводит к ситуации, когда объемные силы порождаются не традиционными механическими причинами (гравитация, инерция), а причинами иного физического характера (например, взаимодействием тел с электромагнитным полем). Такое возможно, поскольку тело может быть однородным в механическом отношении, но обладать неоднородными электромагнитными свойствами и, соответственно, испытывать действия сил из классов более широких, чем консервативные.

Необходимость решения задач с непотенциальными объемными силами возникает при рассмотрении проблем, связанных с деформациями механически неоднородных тел. Разложение параметров состояния в ряд по малому безразмерному параметру приводит к появлению фиктивных объемных сил, которые не являются потенциаль-

ными. Фиктивными силами называем выражения, которые находятся на месте реальных объемных сил, в уравнениях равновесия. Их приближение потенциальными силами иногда оказывается допустимым способом решения [3], но не всегда эффективным.

Разработка надежного общего подхода, позволяющего эффективно справляться с трудностями, возникающими из-за неконсервативности объемных сил, является конечной целью представленной работы. Удачная попытка в плане приложения, но без доказательства существования базиса внутренних состояний от полиномиальных сил, делалась ранее [4, 5]. Эффективность нового подхода подкреплена решением смешанных задач для односвязных ограниченных тел: о равновесии усеченного конуса под воздействием неконсервативных объемных сил и о равновесии неоднородного тяжелого упругого полушара (здесь эффект возникновения фиктивных объемных сил проявляется на каждом шаге итерации метода возмущений).

1. Обоснование метода построения напряженно-деформированного состояния. Традиционно объемные силы в задачах теории упругости учитывались в консервативной форме, что позволяло на базе фундаментальных решений Папковича–Нейбера установить соответствующее поле перемещений [1].

Поле перемещений выражается через решение уравнения Пуассона

$$\chi_{,ii} = \frac{1 - 2\nu}{2\mu(1 - \nu)} \Pi$$

следующим образом:

$$\tilde{u}_i = \chi_{,i}$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона, μ – модуль сдвига, Π – потенциал объемных сил. Поле перемещений позволяет восстановить все параметры внутреннего состояния из соотношений теории упругости Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.1)$$

и обобщенного закона Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \lambda = \frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}, \quad (1.2)$$

а также объемные силы из уравнений равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad (1.3)$$

где ε_{ij} и σ_{ij} – компоненты тензоров деформаций и напряжений, δ_{jk} – символ Кронекера, λ – параметр Ламе. Через \tilde{u}_i выражаем соответствующие поля деформаций и напряжений $\tilde{\varepsilon}_{ij}$, $\tilde{\sigma}_{ij}$. Набор $\tilde{\xi} = \{\tilde{u}_i, \tilde{\varepsilon}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}\}$ соответствует внутреннему состоянию тела, вызванному только объемными силами. Знание этого состояния позволяет разделить решение задачи на две части: $\xi = \xi^\circ + \xi$, где ξ – искомое внутреннее состояние, ξ° – состояние, обусловленное граничными условиями, учитывающими их изменение вследствие действия объемных сил на границе.

Использование вышеизложенной процедуры проблематично в случае неконсервативных объемных сил. Предлагается иной подход. Считаем поле перемещений в сплошном теле описанным многочленами от x, y, z . Моном $w = x^\alpha y^\beta z^\gamma$ можно назначить в качестве любой компоненты вектора перемещения $\mathbf{u}(x, y, z)$, образуя некоторое

допустимое упругое состояние. Например, в случае $\mathbf{u} = \{w, 0, 0\}$ по формулам (1.1) и (1.2) определяем соответствующие тензоры деформаций и напряжений

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{w}{2} \begin{pmatrix} 2\alpha x^{-1} & \beta y^{-1} & \gamma z^{-1} \\ \beta y^{-1} & 0 & 0 \\ \gamma z^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma} = w \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\alpha x^{-1} & \mu\beta y^{-1} & \mu\gamma z^{-1} \\ \mu\beta y^{-1} & \lambda\alpha x^{-1} & 0 \\ \mu\gamma z^{-1} & 0 & \lambda\alpha x^{-1} \end{pmatrix}$$

Из уравнений равновесия (1.3) получаем выражение для вектора объемной силы

$$\mathbf{X} = -w \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\alpha(\alpha - 1)x^{-2} + \mu\beta(\beta - 1)y^{-2} + \mu\gamma(\gamma - 1)z^{-2} \\ (\lambda + \mu)\alpha\beta x^{-1}y^{-1} \\ (\lambda + \mu)\alpha\gamma x^{-1}z^{-1} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

обеспечивающее замыкание определяющих соотношений.

Варьируя целые α, β, γ , можно предложить множество таких состояний. Перебирая всевозможные варианты в пределах $\alpha + \beta + \gamma \leq n$, получаем множество векторов объемных сил, компоненты которых образованы однородными многочленами до порядка $n - 2$ включительно. Принципиальным является вопрос: содержит ли это множество конечномерный базис, позволяющий разложить произвольный вектор объемных сил в ряд Фурье по его элементам при увеличении числа n до бесконечности?

Следующие наводящие соображения позволяют понять логику дальнейших действий. Во-первых, анализ достаточно провести для фиксированного множества $n = \alpha + \beta + \gamma$ и установить возможность построения базиса внутри этого множества. Во-вторых, достаточно проанализировать лишь одну из компонент вектора \mathbf{X} (выводы по отношению к другим компонентам обусловлены циклической симметрией). В-третьих, если система компонент, назначенных в соответствии с верхним элементом столбца (1.4), будет линейно независимой, то таковой станет и система векторов объемных сил. В-четвертых, применение разработанного авторами алгоритма построения базиса для $n = 2, 3, \dots, 12$ подтвердило теоретически возможное число m линейно независимых многочленов от номера n .

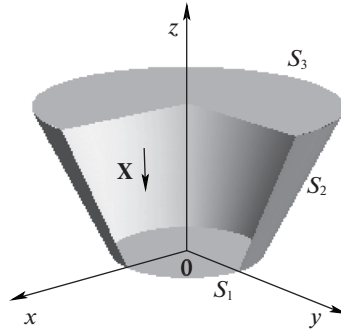
Отметим, что во множестве элементов базиса, характеризующихся максимальным порядком многочлена n , содержится $(n - 1)n/2$ линейно-независимых многочленов, что равно комбинаторному числу линейно независимых мономов порядка $n - 2$. Следовательно, базис многочленов, аппроксимирующий произвольный многочлен порядка $n - 2$, полный. Разработан алгоритм формирования базиса из многочленов до десятого порядка включительно. Число линейно независимых векторов, составленных по этой схеме, равно $\frac{3}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i(i + 1)$. Таким образом, существует базис пространства полиномиальных объемных сил во множестве вариантов, порождаемых указанным приемом.

При расчетах полезно знать набор мономов $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, порождающих линейно независимые элементы базиса пространства полиномиальных объемных сил. Ниже приведен отрезок до четвертого порядка включительно

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma \in \{z^2, z^3, yz^2, xz^2, z^4, yz^3, y^2 z^2, xz^3, xyz^2, x^2 z^2, \dots\}$$

Наличие базиса позволяет провести его ортогонализацию и нормирование в соответствии со скалярным произведением, выражаемым интегралом от скалярного произведения векторов в алгебраическом смысле

$$(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}) = \int_V \mathbf{X}^{(1)} \cdot \mathbf{X}^{(2)} dV \quad (1.5)$$



Фиг. 1

Любой вектор объемных сил может быть представлен в виде ряда Фурье

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{X}_{\text{орт}}^{(k)}, \quad c_k = (\mathbf{X}, \mathbf{X}_{\text{орт}}^{(k)}), \quad (1.6)$$

где $\mathbf{X}_{\text{орт}}^{(k)}$ — k -я объемная сила из ортонормированного базиса. Поскольку объемная сила \mathbf{X} известна, можно оценить ошибку аппроксимации при замене бесконечного ряда конечной суммой n слагаемых из левой части неравенства Бесселя:

$$\delta = \sqrt{(\mathbf{X}, \mathbf{X})} - b, \quad b = \sqrt{\sum_{k=1}^n c_k^2} \quad (1.7)$$

Величина δ используется для выбора числа членов ряда, обеспечивающих заранее оговоренную точность аппроксимации объемных сил.

Каждому базисному вектору $\mathbf{X}^{(k)}$ соответствуют вектор перемещения $\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}$ и тензоры деформаций $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k)}$ и напряжений $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(k)}$, образующие внутреннее НДС $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{(k)} = \{\tilde{\mathbf{u}}^{(k)}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(k)}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(k)}\}$. Любой линейной комбинации $\mathbf{X}^{(k)}$ соответствует такая же комбинация состояний $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{(k)}$.

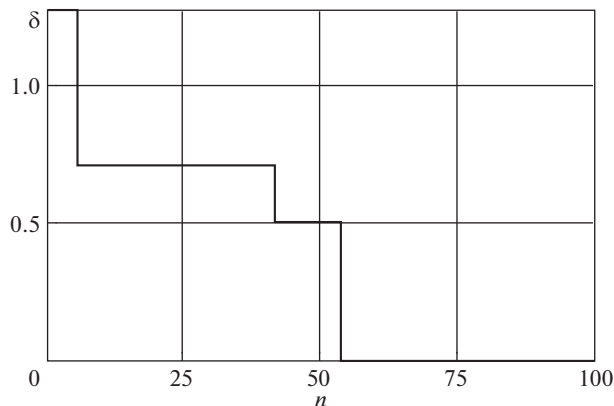
Таким образом, после аппроксимации объемной силы рядом можно построить линейную комбинацию элементов ортонормированного базиса пространства Ξ внутренних состояний среды, определяющую НДС $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$, обусловленное объемной силой \mathbf{X} .

2. Основная смешанная задача о равновесии усеченного конуса под действием неконсервативных объемных сил. Усеченный круговой конус высотой R , защемленный по меньшему основанию S_1 радиуса $R/2$, свободный от нагружения по большему основанию S_3 радиуса R и боковой поверхности S_2 , находится в равновесии под действием неконсервативных объемных сил, направленных противоположно оси z (фиг. 1):

$$\mathbf{X} = \{0, 0, -\rho^2 z\}; \quad \rho^2 = (x^2 + y^2)$$

Материал конуса изотропно упругий с коэффициентом Пуассона $\nu = 0.25$, параметры Ламе $\lambda = \mu = 1$ представлены в безразмерной форме. Линейный характерный размер принят равным R .

Ортогонализация начальных элементов базиса проводилась исходя из скалярного произведения (1.5), строилась матрица Грама $G = [(\mathbf{X}^{(i)}, \mathbf{X}^{(j)})]$ с дальнейшим ее разложением по Холецкому. Это возможно из-за того что матрица Шмидта (левый множитель H , переводящий исходный базис в ортонормированный) совпадает с обратной матрицей, участвующей в разложении Холецкого.



Фиг. 2

Ошибка ортогонализации оценивалась по квадратичной норме матрицы $\|HGH^T - E\|$ (E – единичная матрица) и составила малую величину порядка 10^{-10} . Разложение заданной в задаче объемной силы по ортонормированному базису оценивалось в соответствии с определением (1.7), и его погрешность составила малую величину $\delta = 3 \times 10^{-7}$, обусловленную лишь вычислениями. Зависимость δ от числа n элементов базиса приведена на фиг. 2.

Характер изменения погрешности свидетельствует о высокой точности аппроксимации объемной силы базисом из 58 элементов, принадлежащих множеству, характеризующему максимальным порядком мономов $n = 3$. Линейная комбинация элементов ортонормированного базиса пространства внутренних состояний с коэффициентами Фурье позволила установить внутреннее состояние, отвечающее заданной объемной силе. После округления коэффициентов до рациональных значений состояние, удовлетворяющее определяющим соотношениям (1.1)–(1.3), получено точно (проверяется непосредственной подстановкой $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{o}}$ в равенства (1.1)–(1.3)):

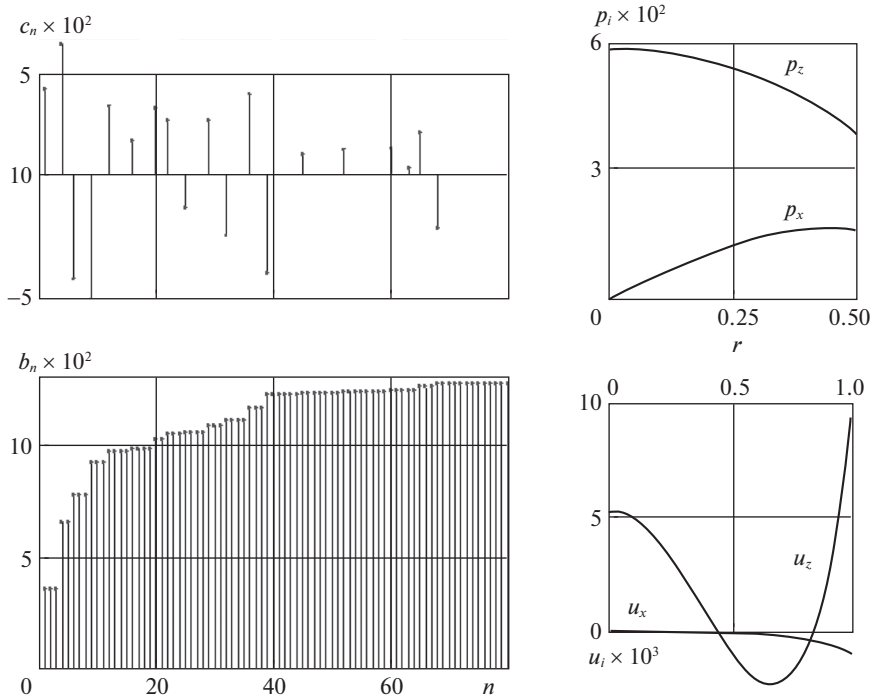
$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{z^3}{18} \begin{pmatrix} -xz \\ -yz \\ \rho^2 + z^2/5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}} = \frac{z^2}{18} \begin{pmatrix} -z^2 & 0 & -xz \\ 0 & -z^2 & -yz \\ -xz & -yz & 3\rho^2 + z^2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{o}} = \frac{z^2}{18} \begin{pmatrix} 3(\rho^2 - z^2) & 0 & -2xz \\ 0 & 3(\rho^2 - z^2) & -2yz \\ -2xz & -2yz & 9\rho^2 + z^2 \end{pmatrix}$$

Упругое поле ξ позволяет сформировать поправку в граничные условия, учитывающую влияние объемных сил \mathbf{X} , для определения состояния ξ^0 . В полярных координатах r, φ граничные условия принимают вид

$$\mathbf{u}|_{S_1} = 0, \quad \mathbf{p}|_{S_2} = \frac{(1-2r)^2}{18\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2(3-11r+7r^2)\cos\varphi \\ 2(3-11r+7r^2)\sin\varphi \\ 1-8r+21r^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p}|_{S_3} = \frac{1}{18} r \left\{ \cos\varphi, \sin\varphi, -\frac{1}{5}r \right\}$$



Фиг. 3

Решение краевой задачи проводилось методом граничных состояний [6]. Для определения коэффициентов Фурье в смешанной задаче формировалась бесконечная система уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} (2\delta_{jk} - a_{kj})c_j = b_k$$

$$a_{kj} = \int_{\tilde{S}_p} u_i^j p_i^k dS + \int_{\tilde{S}_u} p_i^j u_i^k dS, \quad b_k = \int_{\tilde{S}_u} u_i p_i^k dS + \int_{\tilde{S}_p} p_i u_i^k dS$$

Расчеты проводились для 80 элементов базиса. Значения коэффициентов Фурье приведены в графической форме в левой верхней части фиг. 3. В левой нижней части представлен характер насыщения суммы Бесселя b (см. вторую формулу (1.7)) в зависимости от числа элементов n , косвенно свидетельствующий о сходимости решения. Поскольку определяющие соотношения среды удовлетворены тождественно, о точности решения можно судить по величине среднеквадратичной интегральной невязки заданных граничных условий и построенного граничного состояния. Она составила 0.017 в безразмерной форме. Результирующее состояние – суперпозиция состояний, обусловленных действием объемной силы и влиянием граничных условий.

В нижней части фиг. 3 приведены результаты решения задачи в графической форме (эпюры механических величин в осевом сечении $y = 0$ границ, линии уровня напряжений в осевом сечении тела). Распределение осевых усилий (правая верхняя часть фиг. 3) свидетельствует о том, что, несмотря на неоднородность объемных сил в любом сечении $z = \text{const}$, наибольшая осевая реакция возникает на оси симметрии; она

убывает по мере приближения к границе основания. Радиальные составляющие реакции равны нулю на оси симметрии и возрастают по мере приближения к границе, достигая своего максимума в точке, близкой к границе. Изменение формы свободной поверхности конуса (правая нижняя часть фиг. 3) характеризуется незначительным радиальным смещением ее в сторону центра основания, увеличивающимся по модулю по мере приближения к границе основания и достаточно сложной формой изменения поверхности основания. Он обусловлен осевыми смещениями: незначительный провал наблюдается за пределами полурадиуса основания и захватывает кольцо $r \in (0.45, 0.88)$, внутри которого и значительно больше снаружи поверхность основания выпучивается вверх. Этот эффект неочевиден.

На фиг. 4 приведены линии уровня напряжений в осевом сечении $y = 0$ тела. Осевые напряжения σ_{zz} (фиг. 4, а) — сжимающие в нижней части тела и растягивающие ближе к верхнему основанию, причем растяжения осевых волокон усиливаются по мере приближения к боковой границе конуса, достигая максимума на границе с верхним основанием. С такими осевыми напряжениями согласуется распределение радиальных напряжений σ_{xx} (б), которые также сжимающие в нижней части тела и растягивающие в верхней. Окружные напряжения по характеру мало отличаются от радиальных, поэтому здесь не приведены. Напряжения сдвига σ_{xz} (в), отвечающие за изменения формы, сконцентрированы на верхнем круговом ребре, имеют положительный характер в основной массе тела $r < 0.65$, достигая максимума на окружности радиуса 0.45, отстоящей от нижнего основания на высоту 1/3. Картина линий уровня наибольших касательных напряжений (г) свидетельствует о том, что наиболее опасной зоной возникновения условий разрушения является верхнее круговое ребро тела. Напротив, зоны, примыкающие к оси симметрии и боковой границе тела примерно на уровне $z = 0.5$, стабильны по отношению к возможности разрушения.

3. Равновесие поверхностно упрочненного тяжелого полушара. Тяжелый полушар безразмерного радиуса $R = 1$ сцеплен экваториальным сечением с горизонтальным жестким основанием (фиг. 5) и находится в равновесии под действием силы тяжести безразмерной интенсивности 1. При фиксированном коэффициенте Пуассона $\nu = 0.25$ материал шара неоднородный: по мере приближения к сферической границе модуль упругости возрастает в соответствии с зависимостью $\lambda = \mu = 1 + \beta(x^2 + y^2 + z^2)$ (в центр полушара помещено начало системы координат $Oxyz$; z — ось симметрии).

Систематическое исследование неоднородных упругих сред проведено В.А. Ломакиным [7]. Здесь, в частности, установлен эффект присутствия объемных сил, порожденный процедурами разложения в асимптотические ряды.

Проведем разложение определяющих соотношений среды методом Пуанкаре, полагая β малым параметром. Представим искомое состояние в форме асимптотического разложения

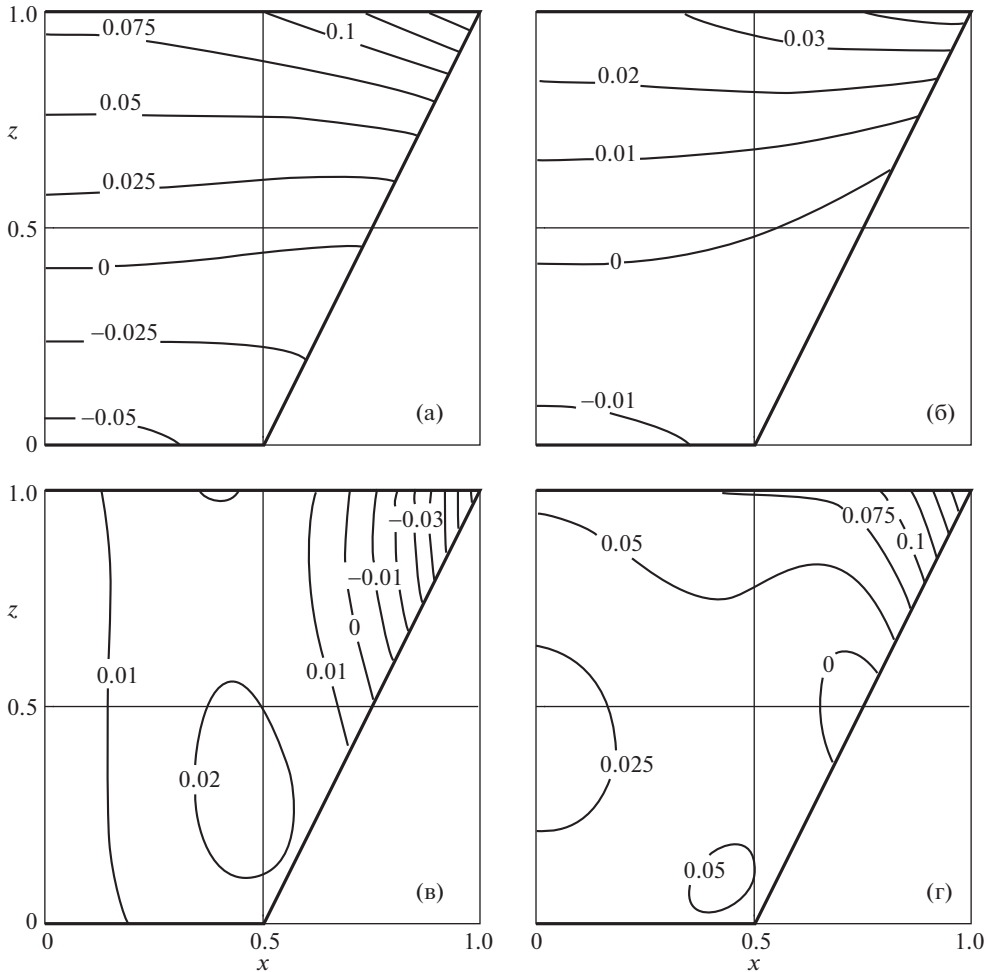
$$\xi = \xi^0 + \beta \xi^1 + \dots + \beta^m \xi^m + \dots$$

Считая граничные условия отнесенными к состоянию ξ^0 , получаем последовательность задач изотропной теории упругости в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^m &= \frac{1}{2}(u_{i,j}^m + u_{j,i}^m), & s_{ij}^m &= \lambda^0 \varepsilon_{kk}^m \delta_{ij} + 2\mu^0 \varepsilon_{ij}^m, & s_{ij,j}^m + X_i^m &= 0, \\ X_i^m &= (\lambda^1 \varepsilon_{kk}^{m-1} \delta_{ij} + 2\mu^1 \varepsilon_{ij}^{m-1})_{,j}, & \lambda^0 &= \mu^0 = 1, & \lambda^1 &= \mu^1 = x^2 + y^2 + z^2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где s_{ij}^m выполняет роль компоненты тензора напряжений и находится по решению задачи m приближения. Тензор напряжений восстанавливается по правилу

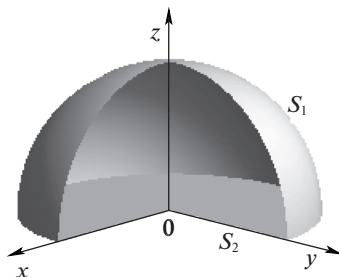
$$\sigma_{ij}^m = s_{ij}^m + \lambda^1 \varepsilon_{kk}^{m-1} \delta_{ij} + 2\mu^1 \varepsilon_{ij}^{m-1}.$$



Фиг. 4

Из выражения (3.1) следует, что при решении неоднородной задачи появляется эффект наличия неконсервативных объемных сил на каждом шаге приближения. Решение для каждого фиксированного m проводится в соответствии с процедурами, описанными в разд. 2, причем при этом в нулевом приближении $m = 0$ поправленные граничные условия должны быть полностью выполнены. Отсюда ясно, что при высших приближениях для их решения достаточно рассматривать задачи только одного типа, к примеру задачу в перемещениях.

Эффективным средством решения задачи на каждом шаге итерации является метод граничных состояний (МГС), предоставляющий результаты решения в символьном виде. Технические достоинства метода следующие: 1) ортонормированный базис пространства Ξ строится однократно для тела определенной формы и может далее использоваться при решении различных краевых задач; 2) матрица коэффициентов бесконечной системы уравнений (БСУ) строится однократно, поскольку изменение параметров нагружения влияет лишь на правые части БСУ; 3) решение основных задач



Фиг. 5

(матрица коэффициентов БСУ – единичная) сводится к громоздкому вычислению квадратур; 4) в итерационном процессе при $m > 0$ МГС позволяет далее не рассматривать смешанную задачу, а использовать какую-либо основную задачу, формулируя граничные условия соответствующим образом, например, $\mathbf{p}|_{\partial V} = 0$ для первой основной задачи, $\mathbf{u}|_{\partial V} = 0$ для второй основной задачи.

Вычисления проводились при $\beta = 0.1$. Были выполнены приближения до $m = 2$ и построены результирующие поля, отвечающие за НДС, имеющие форму громоздких аналитических выражений. На фиг. 6 представлены изолинии напряжений, построенные в сечении $y = 0$ полушара:

а) радиальное напряжение σ_{xx} , б) осевое напряжение σ_{zz} , в) напряжение сдвига σ_{xz} , г) наибольшие касательные напряжения.

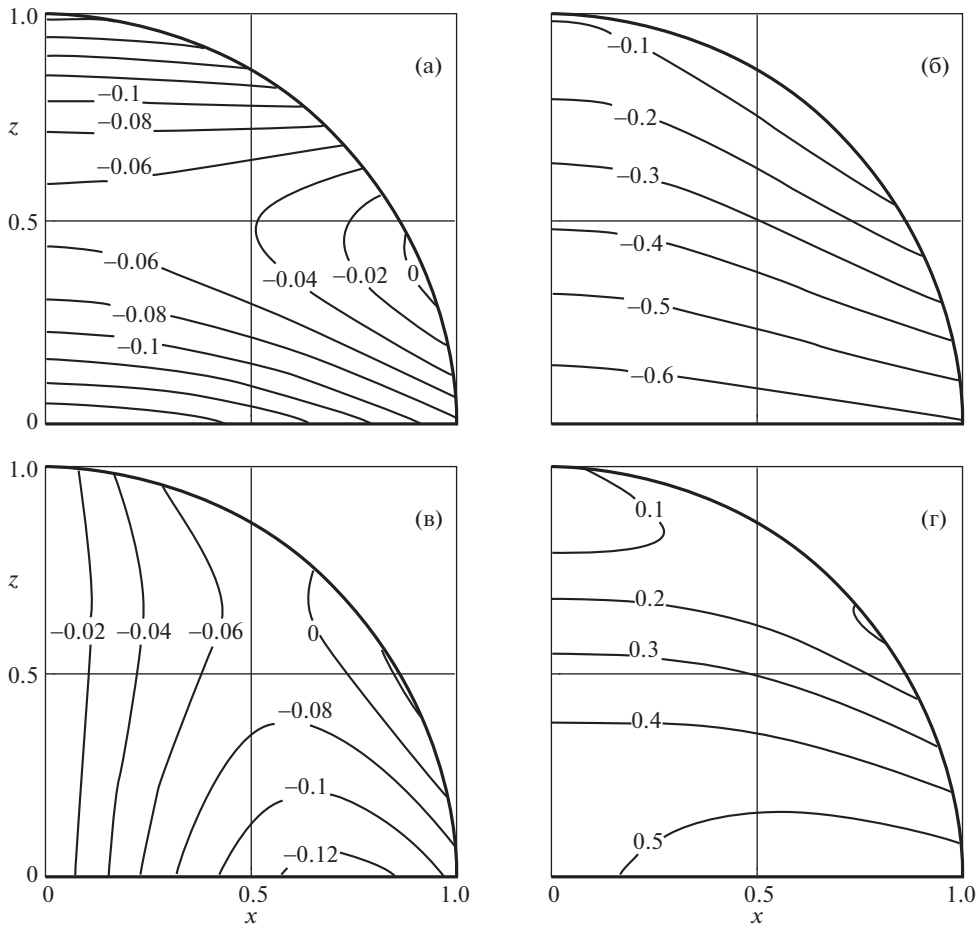
Анализ поля радиальных напряжений σ_{xx} в сечении $y = 0$ свидетельствует о том, что радиальные волокна внутри полушара всюду сжимаются, причем наибольшие значения напряжения сжатия принадлежат как полярной шапке полушара, так и зоне, примыкающей к оси шара на экваторе. У поверхности шара в районе широт $\theta = 30^\circ$ радиальные волокна сжимаются слабо. Осевые напряжения также всюду сжимающие, причем в области экватора характер сжатия осевых и радиальных волокон примерно одинаков, а на поверхности шара наименьшие сжатия испытывают осевые волокна на широте $\theta = 60^\circ$. Наибольший сдвиг наблюдается в окрестности экватора в кольце, примыкающем к радиусу $r = 0.7$. Анализ наибольших касательных напряжений свидетельствует о том, что зона, примыкающая к оси вблизи полюса, деформирована слабо, а разрушение следует ожидать в экваториальном сечении примерно на уровне $r = 0.7$.

4. Выводы.

1. Предложен и обоснован эффективный обратный способ оценки с высокой точностью НДС упругого тела, обусловленного объемными силами, позволяющий восстанавливать поля напряжений и деформаций от распределенных сил из класса приближаемых полиномами.

2. Для НДС от полиномиальных объемных сил возможно построение строгого решения.

3. Способ применен для решения задачи о равновесии усеченного кругового конуса, жестко сцепленного по меньшему основанию с жесткой подложкой, находящейся под воздействием неоднородных объемных сил гравитационного типа. НДС, вызванное действиями объемных сил, получено строго.



Фиг. 6

4. Способ явился эффективным аппаратом решения неоднородных задач теории упругости, поскольку при разложении по малому параметру на каждом шаге возникает эффект наличия непотенциальных объемных сил. Решена задача о равновесии поверхностно упрочненного тяжелого полушара.

5. Сочетание методов Пуанкаре и граничных состояний выявило еще одно преимущество МГС по сравнению с иными подходами, а именно, на всех итерациях, следующих за нулевой, нет необходимости решать краевую задачу в смешанной постановке; достаточно рассматривать вариант какой-нибудь основной задачи. Это обусловлено тем, что граничное состояние содержит всю информацию, по которой можно формулировать задачи совершенно различные по типу и при этом равноценные по результатам решения.

6. К преимуществам способа следует отнести тот факт, что при любом порядке базиса полученное состояние является решением системы дифференциальных уравнений равновесия. Такие решения могут служить в качестве поверочных для решений, полученных, к примеру, методом конечных элементов.

Использование компьютерной алгебры и обратный переход к размерным величинам принципиально позволяют выписывать решение в форме пусть громоздких, но приближенных полнопараметрических аналитических выражений [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
2. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
3. *Пеньков В.Б., Саталкина Л.В.* Метод граничных состояний с возмущениями: неоднородные и нелинейные задачи теории упругости и термоупругости. Germany: LAP Lambert Acad. Publ., 2012. 116 с.
4. *Пеньков В.Б., Левина Л.В., Левин М.Ю., Кузьменко Н.В.* A new method for analyzing the effect of body forces induced by nanodispersed magnetic fluids on states of elastic solids // Научно-произв. период. ж. "Наука в центральной России". № 2(20). Липецк: ООО "Максимал информационные технологии", 2016. С. 12–16.
5. *Кузьменко Н.В., Левина Л.В.* Обратный метод эффективного анализа состояния упругого тела от массовых сил из класса непрерывных // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теорет. и прикл. мех. Сборник докл. (Казань, 20–24 августа 2015 г.). Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. С. 2278–2280.
6. *Пеньков В.Б., Пеньков В.В.* Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневост. мат. ж. 2001. Т. 2. № 2. С. 115–137.
7. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. 368 с.
8. *Новикова О.С.* Построение полнопараметрических аналитических решений основных смешанных задач эластостатики для обеспечения технологических процессов обработки давлением // Проблемы и перспективы развития машиностроения. Сб. научных тр. МНТК, посвященной 60-летию Липецкого гос. техн. ун-та. Ч. 2. 17–18 ноября 2016 г. Липецк: ЛГТУ, 2016. С. 203–207.