ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2019, том 83, № 1, с. 134–143

УДК 532.5; 539 : 534.1

ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ИЗГИБА ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ ГАЗА

М. А. Ильгамов[1,2,*]

[1] Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
[2] Институт механики УФИЦ РАН, Уфа, Россия
** e-mail: ilgamov@anrb.ru*

Поступила в редакцию 24.10.2017 г.

Определяется поперечная распределенная нагрузка на упругую тонкую пластину, находящуюся в газовой среде. Разные значения давления среды на обе поверхности образуют как перепад давления, так и поперечную неуравновешенную силу, зависящую от среднего давления и кривизны срединной поверхности. Показано, что в общем случае обе эти составляющие поперечной силы должны учитываться. При малом отношении среднего давления к модулю упругости материала пластины и при большой относительной толщине влияние второй составляющей нагрузки мало. При малой относительной толщине пластины, большом отношении среднего давления среды к модулю упругости материала влияние второй составляющей поперечной нагрузки на изгиб становится сравнимым с изгибной жесткостью пластины. Рассматривается линейный изгиб и устойчивость пластины.

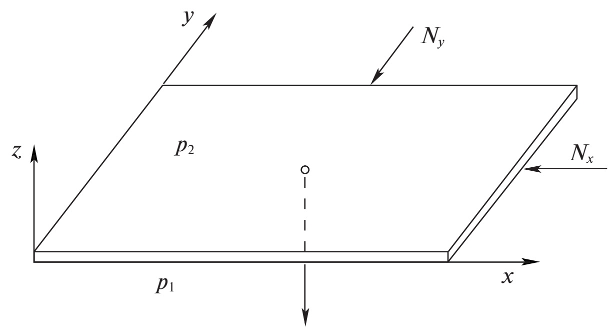
Ключевые слова: прямоугольная пластина, изгиб, избыточное давление, граничные условия, критическая сжимающая сила, приведенная жесткость

DOI: 10.1134/S0032823519010041

1. Введение. Основными нагрузками, действующими на конструкции, содержащие тонкостенные пластины и оболочки, являются силы веса, силы вдоль срединной поверхности и давление на их поверхности. Первыми двумя видами нагрузок в основном определяется напряженно-деформированное состояние строительных конструкций. В конструкциях оборудования нефтехимии, энергетики, подводных аппаратов, аэрокосмической техники главными нагрузками может быть давление газов и жидкостей на поверхности пластин и оболочек.

Насколько известно, в литературе отсутствует анализ напряженно-деформированного состояния тонкостенных упругих элементов в зависимости от среднего давления окружающей среды $p_m = (p_1 + p_2)/2$ (p_1, p_2 – избыточные давления, действующие на поверхности тела). Влияние этого давления представляется пренебрежимо малым. Начиная с работы Лява [1], где систематизированы и обобщены достижения по теории пластин и оболочек к первой четверти двадцатого столетия, фундаментальных трудов И.Г. Бубнова [2], Б.Г. Галеркина [3] и С.П. Тимошенко [4], в последующих публикациях, вплоть до современной монографической, обзорной, справочной и учебной литературы (например, [5–7]) принималось, что поперечная распределенная сила, действующая на тонкую пластину и оболочку, равна $q = p_1 - p_2 - g$, где g – сила веса (фиг. 1).

Определенное отношение к данному вопросу имеет анализ устойчивости упругой полосы в частном случае давлений $p_1 = p_2 = p_m$, в условиях малости влияния собствен-



Фиг. 1

ного веса ($g = 0$) и осевого сжимающего усилия $N = p_m h$, где h – толщина полосы. Возможно, впервые задача об устойчивости прямой формы упругой балки под давлением окружающей среды была рассмотрена в случае колонны под гидростатическим давлением [8] с привлечением элементарной теории изгиба балки и полосы под всесторонним равномерным давлением [9] с использованием соотношений теории упругости. Было показано, что в случае действия на торцевые кромки такого же давления, что на боковые поверхности полосы, не происходит ее изгиба.

Вопросы устойчивости стержней под всесторонним давлением были предметом изучения в публикациях второй половины прошлого века [10–16] и в последующих работах. Были проведены эксперименты [11]. Наиболее подробно задача была рассмотрена также с применением соотношений теории упругости [14]. Задачи изгиба и устойчивости пластин, контактирующих с жидкостью и газом, рассматривались в основном с применением гипотез Кирхгофа для тонкого тела [8, 12, 13, 15–18].

Было показано [18], что поперечная распределенная нагрузка q определяется не только заданным перепадом давлений, но и самой деформацией пластины. В случае статического цилиндрического изгиба свободно опертой по кромкам пластины длиной L и толщиной h из материала с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν

$$q = p_1 - p_2 - g - p_m h(d^2 w/dx^2), \tag{1.1}$$

а прогиб w определяется приведенной жесткостью $D(1+\alpha)$, где

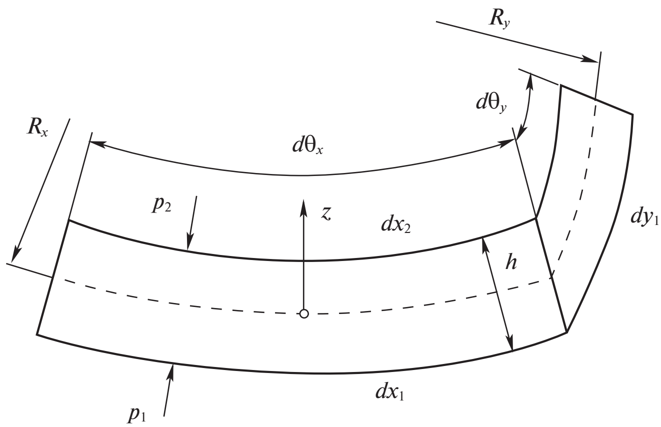
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \alpha = \frac{p_m h L^2}{\pi^2 D} \tag{1.2}$$

Этот результат получен для случая, когда давление p_m не действует на торцевые кромки пластины и продольная сжимающая сила N отсутствует. Если сжимающая сила появляется в результате действия давления на кромки пластины, то $N = p_m h$. В этом случае прогиб определяется только собственным весом пластины и ее изгибной жесткостью D. Сила N может задаваться независимо от окружающего давления. Для свободно опертой невесомой пластины, на торцевые кромки которой давление не действует, критическое значение сжимающей силы равно

$$N_{cr} = N_E(1+\alpha), \quad N_E = \pi^2 D / L^2, \tag{1.3}$$

где N_E – эйлерово значение критической силы. Таким образом, давление окружающей среды стабилизирует плоское состояние пластины.

Рассмотрено также изменение давлений, связанное с разными удельными весами γ_1, γ_2 жидкостей снизу и сверху пластины [17]. Тогда в выражении поперечной на-



Фиг. 2

грузки (1.1) появляется член $(\gamma_1 - \gamma_2)w$, где w – функция прогиба. Учет этого фактора приводит к задаче взаимодействия упругой и гидродинамической неустойчивостей. Изучено взаимодействие статической и динамической неустойчивостей при действии сжимающей силы в срединной поверхности пластины и ускорения, направленного по нормали к контактной поверхности жидкостей с разными плотностями. В зависимости от характера действия внешних сил рассмотрены взаимодействия неустойчивостей Эйлера и Релея, Лаврентьева–Ишлинского и Релея–Тейлора, а также Конинга–Тауба и Рихтмайера–Мешкова.

В отличие от предыдущих исследований [17, 18] здесь рассматривается изгиб прямоугольной пластины с конечным отношением сторон, дан вывод уравнения исходя из соотношений теории упругости, изучено влияние переменности кривизны срединной поверхности и разных граничных условий на значение поперечной распределенной силы, прогиба и критических сил.

2. Постановка задачи. Рассматривается статический линейный изгиб прямоугольной пластины размерами $L_x \times L_y$ и толщиной h. Отношение сторон находится в пределах $1/2 < L_x/L_y < 2$ [3, 5]. На нижнюю и верхнюю поверхности пластины действуют избыточные давления газов p_1 и p_2. При изгибе пластины давления p_1 и p_2 остаются неизменными. Не учитывается влияние плотностей газов на изменение давлений ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$). Рассматриваются случаи, когда давление не действует на кромки пластины и есть такое действие. В отличие от предыдущих постановок задач [17, 18] здесь направление оси z, нагрузки q и прогиба $w\ (x, y)$ положительно вверх.

На фиг. 2 представлен элемент срединной поверхности пластины размерами ($dx = R_x\, d\theta_x) \times (dy = R_y\, d\theta_y$). Здесь R_x и R_y – радиусы кривизны, образующейся при изгибе. В соответствии с гипотезами Кирхгофа при изгибе поперечное сечение остается плоским и перпендикулярным к срединной поверхности. Не учитывается также изменение толщины h. Запишем выражения для длины крайних волокон элемента

$$dx_{1,2} = (R_x \pm h/2)d\theta_x, \quad dy_{1,2} = (R_y \pm h/2)d\theta_y \tag{2.1}$$

Поперечная распределенная нагрузка q на пластину определяется по равенству

$$qdxdy = p_1 dx_1 dy_1 - p_2 dx_2 dy_2 - \gamma h dxdy \tag{2.2}$$

где γ – удельный вес пластины (собственный вес отнесен к срединной поверхности). Подставляя выражения (2.1) в (2.2) и отбрасывая член $(h/2)^2(R_xR_y)^{-1}$, малый по сравнению с единицей, и используя равенство суммы главных кривизн лапласиану от функции прогиба w в линейном приближении, получаем

$$q = p_e + p_m h\nabla^2 w; \quad p_e = p_1 - p_2 - \gamma h,$$
$$p_m = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.3}$$

Уравнение изгиба пластины [4–6]

$$D\nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q,$$

где N_x и N_y – сжимающие силы по направлениям осей x и y, с учетом выражения (2.3) приводим к виду

$$D\nabla^4 w - p_m h\nabla^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = p_e \tag{2.4}$$

Выражения (2.1) получены для случая, когда нейтральная поверхность пластины совпадает с ее срединной поверхностью, что не имеет места при действии продольных сил N_x и N_y. Однако учет этого фактора дает незначительную поправку, поэтому она не входит в выражения (2.1) и в линейное уравнение (2.4).

Итак, второй член в левой части уравнения (2.4) появился в результате учета разности площадей выпуклой и вогнутой сторон пластины в соответствии с выражениями (2.1)–(2.3). В этом состоит обобщение классического уравнения изгиба тонкой пластины, основанное на гипотезах Кирхгофа. Первый член в левой части уравнения (2.4), описывающий упругие силы, пропорционален Eh^3k^4, а второй член – величине $p_m hk^2$, где k – волновое число.

3. Вывод обобщенного уравнения изгиба исходя из соотношений теории упругости. Как указывалось во введении, в частном случае $L_y = \infty$, $\gamma = 0$, $p_1 = p_2 = p_m$ уравнение устойчивости полосы под всесторонним давлением ($N = p_m h$) выводилось из линейных [9] и нелинейных [14] соотношений теории упругости, причем сначала определялось обжатие упругого тела, затем рассматривались возмущения этого состояния. При этом не накладывалось ограничение на отношение толщины к длине волны вдоль полосы. Представляется целесообразным вывести обобщенное уравнение изгиба без использования соотношений (2.1) и (2.2) и связи суммы главных кривизн R_x^{-1} и R_y^{-1} с функцией прогиба $w(x, y)$, оставаясь в рамках гипотез Кирхгофа. Для простоты принимаем, что продольные силы в срединной поверхности пластины отсутствуют ($N_x = N_y = 0$).

В соответствии с гипотезами Кирхгофа деформации ε_x, ε_y, γ_{xy} выражаются через функции прогиба w формулами [5–7]

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (x \leftrightarrow y), \quad \gamma_{xy} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{3.1}$$

Вместо выражения (2.1) можно записать

$$dx_{1,2} = (1 + \varepsilon_x(\mp h/2))dx \quad (x \leftrightarrow y) \tag{3.2}$$

Исходя из физических соотношений

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad (x \leftrightarrow y), \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

и выражений (3.1) и интегрируя по z первые два уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0 \quad (x\leftrightarrow y)$$

получаем [7]

$$\tau_{xz}=\frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w+\varphi_x \quad (x\leftrightarrow y)$$

Определяя $\varphi_x(x,y)$, $\varphi_y(x,y)$ из условий $\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ ($z=\pm h/2$), имеем

$$\tau_{xz}=-\frac{E(h^2-4z^2)}{8(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \quad (x\leftrightarrow y) \tag{3.3}$$

Интегрируя по z третье уравнение равновесия

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0$$

с учетом равенств (3.3), получаем

$$\sigma_z=\frac{Ez(h^2-4z^2/3)}{8(1-\nu^2)}\nabla^4 w+\psi(x,y) \tag{3.4}$$

Давления p_1 и p_2 – силы, действующие на единичную площадку поверхностей пластины независимо от ее деформации. А напряжение σ_z и собственный вес γh определяются в системе координат, деформируемой вместе с пластиной. Иначе говоря, σ_z по определению приходится на площадку $(1+\varepsilon_x)\times(1+\varepsilon_y)$, в то время как p_1 и p_2 определены на площадке 1×1. Следовательно, на поверхностях пластины напряжение σ_z нужно приравнять давлениям p_1 и p_2, умноженным на соответствующую площадку $(1+\varepsilon_x)\times(1+\varepsilon_y)$ (отнесем вес γh поровну на обе поверхности), т.е.

$$\sigma_z(\mp h/2)=\pm\gamma h/2-p_{1,2}[1+\varepsilon_x(\mp h/2)][1+\varepsilon_y(\mp h/2)] \tag{3.5}$$

Как и выше, не учитывается изменение площадки за счет деформации сдвига γ_{xy}.

Подставим в равенства (3.5) выражения (3.1), (3.2) и (3.4). Затем вычитая равенства (3.5) одно от другого и складывая, получаем уравнения

$$D\nabla^4 w-p_m h\nabla^2 w=p_e,\quad \psi=-p_m-(h/4)(p_1-p_2)\nabla^2 w \tag{3.6}$$

Первое из них совпадает с уравнением (2.4) (когда $N_x=N_y=0$), а второе, согласно равенству (3.4), позволяет получить распределение напряжения σ_z по толщине пластины. В частности, на срединной поверхности ($z=0$)

$$\sigma_z=-p_m-(h/2)(p_1-p_2)\nabla^2 w$$

При равенстве давлений на поверхностях ($p_1=p_2$) имеем $\sigma_z(0)=-p_m$. В целом второй член мало влияет на распределение напряжения сжатия по толщине пластины. Отметим, что в теории упругости [1, 6, 7] вместо равенств (3.5) принимается $\sigma_z(\mp h/2)=\pm\gamma h/2-p_{1,2}$. Поэтому в первом уравнении (3.6) отсутствует второй член.

Возникает вопрос, насколько значим последний член в левой части уравнения (2.4) или первого уравнения (3.6) по сравнению с первым членом.

4. Изгиб прямоугольной пластины. Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим решение уравнения (2.4) для пластины размерами $L_x \times L_y$, свободно опертой по кромкам, т.е. при условиях

$$x = 0, \quad L_x: w = d^2w/dx^2 = 0; \quad y = 0, \quad L_y: w = d^2w/dy^2 = 0$$

Приближенное решение, удовлетворяющее этим условиям, имеет вид [3–6]

$$w = W \sin ax \sin by; \quad a = \pi/L_x, \quad b = \pi/L_y \tag{4.1}$$

Подставив выражение (4.1) в уравнение (2.4) и умножив на функцию (4.1), после интегрирования в пределах от 0 до L_x и от 0 до L_y получаем

$$W = \frac{16\pi^{-2} p_e}{Dc^4(1 + \alpha) - N_x a^2 - N_y b^2}; \quad \alpha = \frac{p_m h}{Dc^2}, \quad c^2 = a^2 + b^2 \tag{4.2}$$

Более подробно рассмотрим случай

$$L_x = L_y = L, \quad N_x = N_y = 0, \quad c^2 = 2(\pi/L)^2 \tag{4.3}$$

Учет значений D и c по формулам (1.1) и (4.3) и приближение $12\pi^{-2}(1 - \nu^2) \approx 1$ приводят к следующему значению безразмерного параметра:

$$\alpha \approx (p_m/E)(L/h)^2/2 \tag{4.4}$$

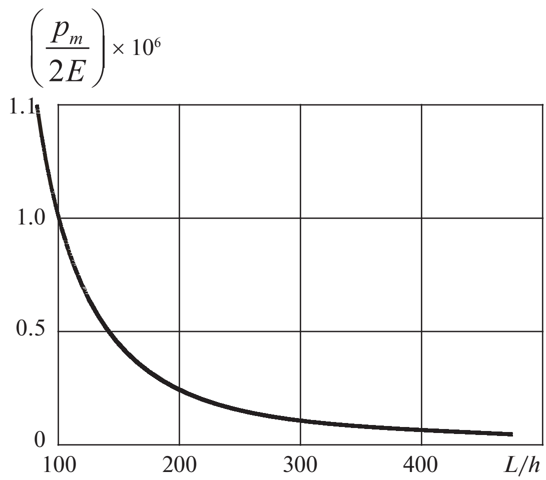
в два раза меньшему, чем в случае цилиндрического изгиба пластины, когда справедлива оценка (1.1).

Если стальная пластина ($E = 2 \times 10^5$ МПа) с отношением размеров $L/h = 10^2$ находится под избыточным средним давлением $p_m = 0.4$ МПа (4 атм), то по формуле (4.4) $\alpha = 10^{-2}$. Можно считать, что в этом случае изгиб пластины не зависит от среднего давления окружающей среды. При тех же данных, но отношении $L/h = 10^3$, параметр $\alpha = 1$. Приведенная жесткость $D(1 + \alpha)$ в два раза больше изгибной жесткости D и прогиб в два раза меньше, чем при пренебрежении влиянием среднего давления (при одинаковом перепаде $p_1 - p_2$). В случае пластикового материала с модулем упругости $E = 10^4$ МПа ($L/h = 10^3$) параметр $\alpha = 20$. Это означает, что основное сопротивление изгибу под действием поперечных сил (например, собственного веса, $p_1 = p_2$) оказывает среднее давление окружающей среды.

Итак, при $\alpha \ll 1$ изгиб пластины определяется собственной изгибной жесткостью и не зависит от среднего давления окружающей среды. При $\alpha \gg 1$ приведенная жесткость и амплитуда прогиба определяются выражениями

$$D(1 + \alpha) \approx \frac{p_m h L^2}{2\pi^2}, \quad W = \frac{8 p_e L^2}{\pi^4 p_m h} \tag{4.5}$$

Отношение прогиба в предельном случае (4.5) к прогибу в случае (4.2)–(4.4), когда в последнем принимаем $\alpha \ll 1$, приближенно равно $2(E/p_m)(h/L)^2$. При промежуточных значениях параметра α сопротивление изгибу пластины оказывает и ее собственная изгибная жесткость, и среднее давление окружающей среды. Фиг. 3 построена по формуле (4.4) для $\alpha = 10^{-2}$. При значениях параметров, дающих область выше кривой, влияние среднего давления p_m на изгиб нужно учитывать.



Фиг. 3

Линейное решение (4.2) неограниченно возрастает при приближении знаменателя к нулю. Из этого условия определяется критическая комбинация сжимающих сил

$$(N_x a^2 + N_y b^2)_{\text{cr}} = Dc^4 + p_m hc^2 = Dc^4(1 + \alpha) \tag{4.6}$$

Видно, что для пластины с заданными размерами и свойствами материала эта комбинация сил возрастает с увеличением среднего избыточного давления.

Эти результаты получены в предположении, что давление окружающей среды не действует на кромки пластины. Рассмотрим случай такого действия на кромки при условии равенства давлений $p_1 = p_2 = p_m$ и образования сжимающих сил $N_x = N_y = N$ за счет давления p_m. Тогда $N = p_m h$, $p_e = -\gamma h$, и согласно выражению (4.2) прогиб не зависит от давления p_m и равен

$$W = -16\pi^{-2}\gamma h/(D^2c^4) \tag{4.7}$$

Имеет место устойчивость изогнутой под собственным весом пластины по отношению к всестороннему давлению. В случае невесомой пластины ($\gamma = 0$) из равенства (4.7) следует $W \equiv 0$, т.е. результат, полученный в предыдущих работах для балки под всесторонним давлением.

5. Зависимость решения от граничных условий. Согласно выражению (2.3), поперечная сила q зависит также от кривизны, образующейся при изгибе. В случае свободного опирания краев пластины знак кривизны не меняется по всей площади, поэтому вклад последнего члена выражения (2.3) в решение является наибольшим. Для оценки этого вклада в случае изменения знака кривизны по площади рассмотрим задачу при условиях защемления краев. Для простоты оценку проведем для случая цилиндрического изгиба под действием давлений p_1 и p_2 на поверхности пластины и сжимающей силы $N_x = N$ $(N_y = 0)$. Условиям

$$x = 0, L: \quad w = \partial w/\partial x = 0$$

удовлетворяет функция

$$w = W\sin^2 ax; \quad a = \pi/L \tag{5.1}$$

приближенно описывающая прогиб [4–6]. Из уравнения (2.4) и решения (5.1) методом Бубнова–Галёркина получаем для амплитуды

$$W = \frac{\pi^{-5} p_e L^4}{D(1 + \alpha - N/N_E)}; \quad \alpha \approx \frac{p_m}{E}\left(\frac{L}{2h}\right)^2, \quad N_E = \frac{4\pi^2 D}{L^2} \tag{5.2}$$

Отметим, что в случае свободного опирания краев пластины

$$x = 0, L: \quad w = \partial^2 w/\partial x^2 = 0$$

принимая приближенно $w = W\sin ax$, получаем

$$W = \frac{4\pi^{-5} p_e L^4}{D(1 + \alpha - N/N_E)}; \quad \alpha \approx \frac{p_m}{E}\left(\frac{L}{h}\right)^2, \quad N_E = \frac{\pi^2 D}{L^2} \tag{5.3}$$

Здесь формула для α совпадает с представленными формулами (1.2), если в них принять $12\pi^{-2}(1 - \nu^2) \approx 1$. Из выражений (5.2) и (5.3) следует, что параметр α в случае цилиндрического изгиба пластины с защемленными краями в четыре раз меньше, чем в случае ее свободного опирания. Такое уменьшение влияния среднего давления в первом случае объясняется тем, что в центральной части пролета на длине $L/2$ кривизна положительна, а на прилегающих к опорам участках длиной $L/4$ – отрицательна (при $p_e < 0$).

Как видно из выражений (5.2) и (5.3), можно судить о продольно-поперечном изгибе как пластины с приведенной жесткостью $D(1 + \alpha)$ под нагрузками p_e и N, так и пластины с жесткостью D под поперечной нагрузкой p_e и приведенной сжимающей силой $N - \alpha N_E = N - p_m h$, причем критическое значение сжимающей силы

$$N_{\text{cr}} = N_E(1 + \alpha) \tag{5.4}$$

выражается через значения N_E и α, различающиеся в рассматриваемых случаях в четыре раза.

Если сжимающее усилие N обусловлено действием давления $p_1 = p_2 = p_m$ на кромки пластины, то $N = p_m h$. В обоих случаях закрепления краев пластины в решениях (5.2) и (5.3) исчезает зависимость прогиба от всестороннего давления (в выражениях для N_E необходимо принять приближенно $12\pi^{-2}(1 - \nu^2)$ за единицу, либо для α взять точное выражение). Прогиб за счет собственного веса сохраняется неизменным при любом давлении окружающей среды. Если начальное состояние пластины плоское, например, в результате отсутствия гравитационного ускорения, то сохраняется плоская форма пластины.

6. Заключение. Влияние на изгиб среднего избыточного давления $p_m = (p_1 + p_2)/2$ на поверхности тонкой пластины с изолированными от давления кромками определяется безразмерным параметром $\alpha \approx (\kappa p_m/E)(L/h)^2$, где E – модуль упругости материала, h и L – толщина и наименьший размер между опорными кромками, κ – коэффициент, зависящий от граничных условий и отношения размеров прямоугольной пластины (при свободном опирании удлиненной пластины $\kappa = 1$, квадратной пластины $\kappa = 1/2$, при защемлении удлиненной пластины $\kappa = 1/4$).

Среднее давление p_m окружающей среды приводит к увеличению приведенной изгибной жесткости $D(1 + \alpha)$, где D – собственная изгибная жесткость. Если пластина изогнута, например, под действием только собственного веса ($q = -\gamma h$, $p_1 = p_2$), то при подаче давления p_m прогиб ее уменьшается ввиду увеличения приведенной жесткости на величину $1 + \alpha$. Физически это объясняется тем, что площадь выпуклой поверхности пластины больше площади ее вогнутой поверхности, что приводит к появлению распределенной силы, которая стремится уменьшить прогиб. Эта сила пропорциональна образующейся при изгибе кривизне срединной поверхности.

При $\alpha \ll 1$ справедлива классическая теория изгиба тонких пластин, основанная на гипотезах Кирхгофа. В ней перепадом давлений и собственным весом определяется поперечная распределенная нагрузка ($q = p_1 - p_2 - \gamma h$).

При $\alpha \gg 1$ решение не зависит от модуля упругости материала (например, приведенная жесткость квадратной пластины равна $p_m h L^2/(2\pi^2)$). Это объясняется тем, что собственная жесткость D уменьшается пропорционально кубу толщины, а фактор среднего давления – первой степени толщины. В результате этот предельный случай реализуется в случае тонких пластин и пленок из материалов с малым модулем упругости и при большом среднем давлении окружающих сред. Например, равновесие микро- и нанопленок под собственным весом в газовой среде может быть удовлетворительно определено только с учетом фактора среднего давления.

Критические значения сжимающих сил $N_{\rm cr}$ в срединной поверхности пластины выше по сравнению с их классическими значениями N_E ввиду большей приведенной жесткости за счет среднего давления. Например, при сжатии только в одном направлении свободно опертой по всем кромкам квадратной пластины $N_{\rm cr} = N_E(1 + \alpha)$, где в выражении для α коэффициент $\kappa = 1/2$.

Если давление окружающей среды действует также на опорные кромки пластины, то ее равновесие отличается от изложенного выше. В случае, когда давления на нижнюю и верхнюю поверхности равны ($p_1 = p_2 = p_m$) и сжимающие силы в срединной поверхности обусловлены их действием на кромки ($N_x = N_y = p_m h$), изгиб пластины не зависит от давления окружающей среды. По отношению к действию всестороннего давления имеет место абсолютная устойчивость изогнутого состояния пластины под действием собственного веса и упругих сил в ней. В частном случае отсутствия собственного веса равновесное состояние является ненапряженным.

Приведенные оценки влияния среднего давления окружающей среды на изгиб указывают на необходимость внесения соответствующих добавлений в теорию изгиба и устойчивости формы тонких пластин и оболочек.

Работа выполнена в рамках государственного задания (проекты № 0120-1359-375, № 0246-2019-0088).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Love A.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927. 643 p. = *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
2. *Бубнов И.Г.* Труды по теории пластин. М.: Гостехиздат, 1953. 423 с.
3. *Галеркин Б.Г.* Упругие тонкие плиты. Соб. сочинений. Т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1953. 550 с.
4. *Timoshenko S.* Theory of Plates and Shells. N.Y.: McGraw–Hill, 1940. 399 p. = *Тимошенко С.П.* Пластины и оболочки. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 460 с.
5. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
6. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. Науч. ред. И.А. Биргер и Я.Г. Пановко. М.: Машиностр., 1968. Т. 1. 831 с.
7. *Безухов Н.И.* Теория упругости и пластичности. М.: Высшая шк., 1968. 512 с.
8. *Handelman G.H.* Buckling under locally hydrostatic pressure // J. Appl. Mech. 1946. V. 13. P. 198–200.
9. *Ишлинский А.Ю.* Исследование устойчивости упругих систем с точки зрения математической теории упругости // Укр. матем. ж. 1954. Т. 6. № 2. С. 140–146.
10. *Nagel F.E.* Column instability of pressurized tubes // J. Aerospace Sci. 1956. V. 23. P. 608–609.

11. *Mills B.D., Jr.* The fluid column // Am. J. Phys. 1960. V. 28. P. 353–356.
12. *Link H.* Über den geraden Druckstab in Flüssigkeit // Ing.-Archiv. 1962. B. 31. P. 149–167.
13. *Peterson J.P.* Axially loaded column subjected to lateral pressure // AIAA J. 1963. V. 1. № 6. P. 1458–1459.
14. *Kerr A.D., Tang S.* The of lateral hydrostatic pressure on the instability of elastic solids, particularly beams and plates // J. Appl. Mech. 1966. V. 33. P. 617–622.
15. *Newland D.E.* Research note: Deflection equation for the buckling of an elastic column subjected to surface pressure // J. Mech. Eng. Sci. 1973. V. 15. № 1. P. 73–75.
16. *Ilgamov M.A.* Static Problems of Hydroelasticity M.: Fizmatlit. 1998. 208 p.
17. *Ильгамов М.А.* Взаимодействие неустойчивостей в гидроупругой системе // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 5. С. 566–579.
18. *Ильгамов М.А.* Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405.