ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2019, том 83, № 1, с. 3–15

УДК 531.36

Памяти В.В. Белецкого посвящается

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА С ВНУТРЕННИМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

© 2019 г. Н. И. Амелькин*, В. В. Холощак**

Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия
** e-mail: namelkin@mail.ru*
*** e-mail: khoviktoriya@yandex.ru*

Поступила в редакцию 20.04.2018 г.

В рамках модели М.А. Лаврентьева изучается влияние внутренней диссипации на вращательное движение спутника в центральном гравитационном поле. Выведены эволюционные уравнения и представлены результаты анализа эволюции вращательного движения динамически симметричного спутника, движущегося по кеплеровой круговой орбите, в зависимости от значений параметров и начальных условий.

Ключевые слова: спутник, центральное поле, круговая орбита, стационарные вращения, устойчивость, эволюция вращательного движения

DOI: 10.1134/S0032823519010016

Задача о влиянии внутренних диссипативных сил на вращательное движение спутника рассматривалась в разных постановках многими авторами. В большинстве работ для моделирования внутренней диссипации использовалась одна из трех моделей спутника: 1) твердое тело с полостью, заполненной вязкой жидкостью [1–3], 2) твердое тело с шаровым демпфером (модель М.А. Лаврентьева) [4–6], 3) вязкоупругое тело [7, 8]. Для динамически симметричного спутника на круговой орбите эволюция вращательного движения исследовалась ранее [3] в рамках модели 1 для случая сильно вязкой жидкости и больших значений приведенной угловой скорости спутника. Ниже эволюция вращений спутника исследуется в рамках модели М.А. Лаврентьева, причем в существенно более широком по сравнению с предыдущим исследованием [3] диапазоне значений параметров и угловых скоростей спутника.

1. Анализ устойчивости стационарных вращений спутника, близкого к сферически симметричному. Вращательное движение спутника с шаровым демпфером в центральном гравитационном поле на круговой орбите может быть описано системой уравнений [6]

$$\begin{gathered}(\mathbf{J} - I\mathbf{E})\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{U}\times\mathbf{J}\mathbf{U} = 3\mathbf{r}\times\mathbf{J}\mathbf{r} + \mu I(\mathbf{V} - \mathbf{U}) \\ \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{U}\times\mathbf{V} = -\mu(\mathbf{V} - \mathbf{U}) \\ 2\dot{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda}\circ\mathbf{U}\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{J}$ – центральный тензор инерции всего спутника, I – момент инерции демпфера относительно его центральной оси, $\mathbf{E}$ – единичная матрица, $\mathbf{r} = \mathbf{R}/R$ – единичный вектор, сонаправленный с радиус-вектором центра масс спутника, $\mathbf{U} = \boldsymbol{\omega}/\omega_0$, $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega}/\omega_0$, где $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютная угловая скорость оболочки, $\boldsymbol{\Omega}$ – абсолютная угловая скорость демпфера, ω_0 – угловая скорость орбитального базиса, направленная по нормали $\mathbf{n}$ к плоскости орбиты, μ – безразмерный коэффициент демпфирования, $\boldsymbol{\Lambda}$ – кватернион единичной нормы, задающий положение связанного с оболочкой базиса главных осей инерции спутника $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ относительно базиса Кёнига $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$. Точкой обозначена производная по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$. В уравнениях (1.1) все векторы задаются своими компонентами в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Для динамически симметричного спутника движение относительно орбитального базиса, образованного векторами $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$, описывается следующей автономной системой уравнений [6]:

$$\begin{gathered}
\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{u} \times \mathbf{e} \\
(A - I)(\mathbf{n} \times \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}}) + (C - A)[((\mathbf{n} \times \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} + ((\mathbf{n} + \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e})(\mathbf{n} + \mathbf{u}) \times \mathbf{e}] = \\
= \mu I(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + 3(C - A)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{r} \times \mathbf{e}) \\
\mathbf{n} \times \mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}} = -\mu(\mathbf{v} - \mathbf{u})
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь через $\mathbf{u} = (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0)/\omega_0$ и $\mathbf{v} = (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}_0)/\omega_0$ обозначены приведенная угловая скорость несущего тела (оболочки) и приведенная угловая скорость демпфера относительно орбитального базиса, $\mathbf{e}$ – ось симметрии спутника, C и A – осевой и экваториальный моменты инерции спутника.

Было показано [6], что предельными движениями спутника являются только положения равновесия относительно орбитального базиса и стационарные вращения вокруг оси симметрии, сонаправленной с нормалью к плоскости орбиты (цилиндрические регулярные прецессии)

$$\mathbf{e}^* = \mathbf{n}, \quad \mathbf{v}^* = \mathbf{u}^* = u\mathbf{n}; \quad u \in (-\infty, +\infty) \tag{1.3}$$

Задача об устойчивости движений (1.3) сводится к исследованию устойчивости характеристического полинома системы, получаемой линеаризацией уравнений (1.2) в окрестности решений (1.3). Этот полином имеет вид [6]

$$P(\lambda) = a_0\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 \tag{1.4}$$

и его коэффициенты определяются выражениями

$$\begin{gathered}
a_0 = 1, \quad a_1 = 2m, \quad a_2 = [2 + k^2 + m^2] + 3\varepsilon \\
a_3 = 2m[1 + k^2] + \varepsilon[6m + \mu\gamma(2\beta(k + 1) - 3)] \\
a_4 = [k^2 + (m^2 + 1)(1 + k^2)] + \varepsilon[3(m^2 + 1) - 3k + \mu\gamma m(2\beta k - 3)] + \varepsilon^2\beta^2(\mu\gamma)^2 \\
a_5 = 2mk^2 + \varepsilon\{-6mk + \mu\gamma[2\beta(k + 1) + 3(2k + 1)]\} \\
a_6 = (m^2 + 1)k^2 - \varepsilon[3(m^2 + 1) - \mu\gamma m(2\beta + 3)]k + \varepsilon^2\mu\gamma[\beta^2\mu\gamma - 3\beta(m - \mu\gamma)]
\end{gathered} \tag{1.5}$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
\alpha = (C - I)/(A - I), \quad \gamma = I/(A - I), \quad \beta = u + 1 \\
m = \mu(1 + \gamma), \quad k = 1 - \beta(1 + \varepsilon), \quad \varepsilon = \alpha - 1; \quad \varepsilon \in [-1, 1]
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь $\alpha \in [0, 2]$ – коэффициент “сплюснутости” вспомогательного тела, образованного оболочкой и точечной массой, равной массе демпфера и расположенной в его центре, $\gamma \in [0, \infty)$ – отношение момента инерции демпфера к экваториальному моменту инерции вспомогательного тела, β – отношение абсолютной угловой скорости стационарного вращения спутника к угловой скорости орбитального базиса.

Заметим, что коэффициент сплюснутости всего спутника определяется выражением

$$\alpha^* = C/A = (\alpha + \gamma)/(1 + \gamma) \tag{1.7}$$

Если $\alpha > 1$, то и $\alpha^* > 1$ (сплюснутый спутник), причем $\alpha^* < \alpha$. Если $\alpha < 1$, то и $\alpha^* < 1$ (вытянутый спутник), причем $\alpha^* > \alpha$.

Аналитическое исследование условий устойчивости полинома (1.4) было проведено ранее [6] для значений $\mu \ll 1$ и $\mu \gg 1$. Для остальных значений параметра μ проводился численный анализ корней полинома (1.4) при значениях γ, сравнимых по величине с единицей.

В данном разделе проводится аналитическое исследование условий устойчивости стационарных вращений (1.3) во всем диапазоне значений параметров μ и γ для сплюснутого спутника, близкого к сферически симметричному:

$$\varepsilon > 0, \quad \varepsilon \ll 1 \tag{1.8}$$

По критерию Рауса—Гурвица в форме Льенара—Шипара условия устойчивости описываются системой неравенств

$$a_k > 0; \quad k = 1,\dots,6, \quad \Delta_3 > 0, \quad \Delta_5 > 0 \tag{1.9}$$

где Δ_3 и Δ_5 — миноры третьего и пятого порядка матрицы Гурвица. Из формул (1.5) и (1.6) следует, что для любых значений $m > 0$ и β при достаточно малых значениях ε коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4 будут положительными. Коэффициент a_5 при учете соотношений (1.6) записывается в виде полинома второй степени относительно k следующим образом:

$$a_5 = \mu[2(1 + \gamma + \varepsilon)k^2 - 6\varepsilon(1 + \varepsilon)k + \varepsilon\gamma(5 + 3\varepsilon)]/(1 + \varepsilon) \tag{1.10}$$

При $k = 0$ и $\varepsilon > 0$ имеем $a_5 > 0$, а при достаточно малых значениях ε полином, как нетрудно видеть, не имеет вещественных корней. Поэтому и $a_5 > 0$ при $\varepsilon \ll 1$.

Коэффициент a_6 тоже выражается полиномом второй степени относительно k. Оставляя в коэффициентах этого полинома только главные члены, получим

$$a_6 = (m^2 + 1)k^2 - \varepsilon(3 - 2m^2 + 5\mu m)k + \varepsilon^2(m - \mu)[(m - 4\mu)] \tag{1.11}$$

Дискриминант полинома записывается в виде

$$D = [3(1 + \mu m) + 4\mu\gamma)][3(1 + \mu m) - 4\mu\gamma]$$

Если выполняется условие

$$3(1 + \mu\, m) - 4\mu\,\gamma > 0, \tag{1.12}$$

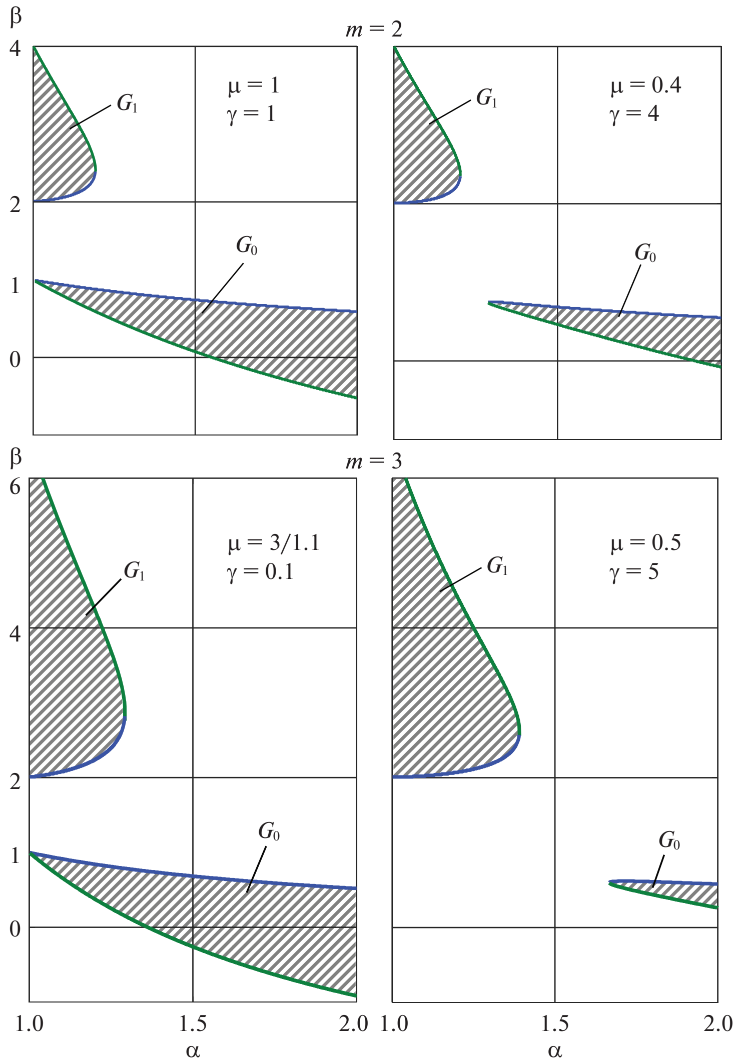
то полином имеет два вещественных корня

$$k_{1,2} = \varepsilon\frac{3 - 2m^2 + 5\mu m \pm \sqrt{D}}{2(m^2 + 1)},$$

которым соответствуют в плоскости ε, β две кривые

$$\beta_{1,2}(\varepsilon) = \frac{1 - k_{1,2}}{1 + \varepsilon} \approx 1 - \varepsilon\left(1 + \frac{3 - 2m^2 + 5\mu m \pm \sqrt{D}}{2(m^2 + 1)}\right)$$

пересекающиеся в точке (0, 1). В диапазоне $\beta_1 < \beta < \beta_2$ имеем $a_6 < 0$, т.е. стационарные вращения неустойчивы. Для значений $\beta < \beta_1$ и $\beta > \beta_2$ коэффициент $a_6 > 0$. Кривые $\beta_1(\varepsilon)$ и $\beta_2(\varepsilon)$ ограничивают изображенную на фиг. 1 слева область неустойчивости G_0 в плоскости параметров α, β.



Фиг. 1

Если неравенство (1.12) имеет обратный знак, что имеет место при одновременном выполнении условий

$$\mu < \frac{4}{3}, \quad \gamma > \frac{3(1+\mu^2)}{(4-3\mu)\mu}, \tag{1.13}$$

то $a_6 > 0$ при $\varepsilon \ll 1$. В этом случае область неустойчивости G_0 “отрывается” от оси $\varepsilon = 0$ и имеет вид, изображенный на фиг. 1 справа.

Минор Δ_3 определяется выражением

$$\Delta_3 = 2\mu\gamma m[3 + 2(1-k)^2][(1+k)^2 + m^2]\varepsilon + O(\varepsilon^2) \tag{1.14}$$

и принимает положительные значения при $\mu\gamma > 0$ и $\varepsilon \ll 1$.

Минор Δ_5 записывается в виде

$$\Delta_5 = 18\mu^3\gamma^2[3 + 2(1-k)^2][(1+k)^2 + m^2](m^2 + 2 + 2k)(1+k)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \quad (1.15)$$

При $\varepsilon \ll 1$ он принимает положительные значения, если $\beta < 2$, или $\beta > (m^2+4)/2$. В диапазоне

$$2 < \beta < (m^2+4)/2 = \beta^* \quad (1.16)$$

стационарные вращения неустойчивы. Точки (1, 2) и (1, β^*) принадлежат кривой, ограничивающей область неустойчивости G_1 в плоскости параметров α, β (фиг. 1).

Таким образом, для сплюснутого динамически симметричного спутника, близкого к сферически симметричному, условия устойчивости стационарных вращений определяются значением одного параметра $m = \mu(\gamma+1)$. Исключение составляет только узкий диапазон вращений с угловой скоростью, близкой к угловой скорости орбитального базиса, для которых характер устойчивости определяется конкретной комбинаций двух параметров μ и γ.

На фиг. 1 представлены полученные численным исследованием корней характеристического уравнения системы диаграммы областей асимптотической устойчивости (не заштрихованы) и неустойчивости (заштрихованы) на интервале $1 < \alpha < 2$ в плоскости параметров α, β при $m = 2$ и $m = 3$, где каждому из указанных значений m соответствуют две разные комбинации параметров μ и γ. Эти диаграммы, а также результаты других расчетов [6], полностью подтверждают сделанные выше выводы о характере устойчивости стационарных вращений спутника, близкого к сферически симметричному. Линейные размеры области G_1 пропорциональны m^2, причем, как следует из диаграмм, размер области G_1 по оси α слабо зависит от конкретной комбинации параметров μ и γ. Установлено также, что при $\mu < 4/3$ (1.13) существует такое значение γ^*, что при $\gamma > \gamma^*$ область неустойчивости G_0 совсем исчезает из интервала $1 < \alpha < 2$.

2. Эволюционные уравнения. Для целей аналитического исследования эволюции вращательного движения динамически симметричного спутника запишем уравнения движения в проекциях на оси базиса Резаля $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_3$ — ось симметрии спутника), задаваемого углами ψ и θ (фиг. 2). Обозначив через $\mathbf{W} = \mathbf{V} - \mathbf{U}$ вектор относительной угловой скорости демпфера, получим уравнения

$$\begin{gathered}(\mathbf{J} - I\mathbf{E})\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{u}' \times (\mathbf{J} - I\mathbf{E})\mathbf{U} = 3\mathbf{r} \times \mathbf{J}\mathbf{r} + \mu I\mathbf{W} \\ \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{u}' \times (\mathbf{U} + \mathbf{W}) = -\mu\mathbf{W},\end{gathered} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{u}' = \boldsymbol{\omega}'/\omega_0$ — приведенная угловая скорость базиса Резаля, а все векторы заданы своими компонентами в базисе Резаля. Учитывая равенства

$$\mathbf{u}' = \mathbf{e}_1'\dot{\theta} + \dot{\psi}(\mathbf{e}_2' \sin\theta + \mathbf{e}_3\cos\theta) = \mathbf{U} - \dot{\phi}\mathbf{e}_3, \quad (2.2)$$

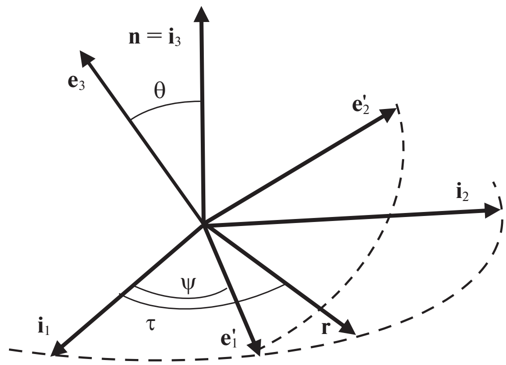
где ϕ — угол собственного вращения, получим

$$\dot{\theta} = U_1, \quad \dot{\psi}\sin\theta = U_2, \quad \dot{\phi} = U_3 - U_2\operatorname{ctg}\theta \quad (2.3)$$

$$\mathbf{u}' = U_1\mathbf{e}_1' + U_2\mathbf{e}_2' + U_2\operatorname{ctg}\theta\,\mathbf{e}_3 \quad (2.4)$$

Действующий на спутник гравитационный момент определяется выражением

$$\mathbf{m}_g = 3\mathbf{r} \times \mathbf{J}\mathbf{r} = \frac{3}{2}(C - A)\sin\theta[\mathbf{e}_2' \sin 2(\tau - \psi) + \mathbf{e}_1'\cos\theta(\cos 2(\tau-\psi) - 1)] \quad (2.5)$$



Фиг. 2

Проецируя уравнения (2.1) на оси базиса Резаля, получим при учете соотношений (2.3), (2.4) и (1.6) следующую замкнутую систему из восьми уравнений:

$$\dot{U}_1 = -(1+\varepsilon)U_3U_2 + U_2^2 \operatorname{ctg}\theta + \mu\gamma W_1 + F_1[\cos 2(\tau-\psi) - 1]$$

$$\dot{U}_2 = (1+\varepsilon)U_3U_1 - U_2U_1 \operatorname{ctg}\theta + \mu\gamma W_2 + F_2 \sin 2(\tau-\psi)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_1 &= \varepsilon U_2U_3 + U_2W_2 \operatorname{ctg}\theta - U_2W_3 - \mu(1+\gamma)W_1 - F_1[\cos 2(\tau-\psi) - 1] \\ \dot{W}_2 &= -\varepsilon U_1U_3 + U_1W_3 - U_2W_1 \operatorname{ctg}\theta - \mu(1+\gamma)W_2 - F_2 \sin 2(\tau-\psi) \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\dot{W}_3 = U_2W_1 - U_1W_2 - \frac{\mu(1+\gamma+\varepsilon)}{1+\varepsilon}W_3$$

$$\dot{U} = \frac{\mu\gamma W_3}{1+\varepsilon}, \quad \dot{\theta} = U_1, \quad \dot{\psi}\sin\theta = U_2$$

Функции F_1 и F_2 определяются формулами

$$F_1 = \frac{3\varepsilon\sin 2\theta}{4}, \quad F_2 = \frac{3\varepsilon\sin\theta}{2} = \frac{F_1}{\cos\theta} \tag{2.7}$$

Далее будем рассматривать сплюснутый спутник ($\alpha > 1$), близкий к сферически симметричному, т.е. полагать, что $\varepsilon \ll 1$ (малый параметр). Анализ уравнений (2.6) и результаты численного интегрирования уравнений (1.1) показали, что при $m = \mu(1+\gamma) \geq \sqrt{\varepsilon}$ для разных начальных значений угловой скорости оболочки и демпфера наблюдается сравнительно быстрый переходный процесс (быстрая эволюция), в конце которого устанавливается движение, близкое к вращению спутника, как единого твердого тела, вокруг оси симметрии, сонаправленной с начальным значением вектора кинетического момента спутника. Затем происходит медленная эволюция за счет действия гравитационного и диссипативного моментов. При этом переменные U_k, W_k и θ в режиме медленной эволюции в среднем меняются медленно и имеют гармонические составляющие, частота которых близка к значению 2, причем средние значения переменных U_1, U_2, W_1, W_2, W_3 и их гармонические составляющие являются ограниченными функциями ε.

В задаче об эволюции вращательного движения спутника основной интерес представляет поведение оси вращения спутника и величины угловой скорости. В предположении, что в режиме медленной эволюции движение сплюснутого спутника близко к вращению вокруг оси симметрии, анализ эволюции сводится к изучению поведения фазовых переменных U_3, θ и ψ.

Наличие малого параметра в уравнениях (2.6) дает основания применить для получения эволюционных уравнений метод осреднения. Но "классическая" схема метода осреднения [9, 10] для системы (2.6) не может быть непосредственно использована, поскольку приведение системы (2.6) к стандартной форме проблематично. Ниже для рассматриваемой задачи применяется вариант метода осреднения без приведения системы (2.6) к стандартной форме.

Введем следующие обозначения для фазовых переменных:

$$\mathbf{x}\colon \mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (U_1, U_2, W_1, W_2, U_3, W_3, \theta, \psi) \tag{2.8}$$

Систему (2.6) перепишем в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \tau), \tag{2.9}$$

где через $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ обозначены линейные члены по переменным U_1, U_2, W_1, W_2, W_3, $\tilde{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \tau)$ – слагаемое, явно зависящее от времени (в рассматриваемой задаче это гармоническая функция времени), $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ – остальные члены в правой части системы (2.6).

Решение будем искать в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{S}(\mathbf{y}, \tau), \tag{2.10}$$

где компоненты функции $\mathbf{S}(\mathbf{y}, \tau)$ выбираются из следующих условий: если $\tilde{X}_j = 0$, то $S_j = 0$, а если $\tilde{X}_k \neq 0$, то S_k удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S_k}{\partial \tau} = L_k(\mathbf{S}) + \tilde{X}_k(\mathbf{y}, \tau) \tag{2.11}$$

при учете которого после подстановки выражения (2.10) в систему (2.6) получим уравнения

$$\begin{gathered} \dot{y}_k + \frac{\partial S_k}{\partial \mathbf{y}^T}\dot{\mathbf{y}} = L_k(\mathbf{y}) + G_k(\mathbf{y} + \mathbf{S}) + \tilde{X}_k(\mathbf{y} + \mathbf{S}, \tau) - \tilde{X}_k(\mathbf{y}, \tau); \quad k = 1, 2, 3, 4 \\ \dot{y}_j = \dot{x}_j = X_j(\mathbf{y} + \mathbf{S}); \quad j = 5, 6, 7, 8 \end{gathered} \tag{2.12}$$

Найдем компоненты функции $\mathbf{S}(\mathbf{y}, \tau)$. Имеем

$$S_5 = S_6 = S_7 = S_8 = 0 \Rightarrow y_5 = U_3, \quad y_6 = W_3, \quad y_7 = \theta, \quad y_8 = \psi \tag{2.13}$$

Остальные компоненты находятся из системы (здесь и далее $U = U_3$, $m = \mu(1+\gamma)$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial \tau} &= -(1+\varepsilon)US_2 + \mu\gamma S_3 + F_1 \cos 2(\tau - \psi) \\ \frac{\partial S_2}{\partial \tau} &= (1+\varepsilon)US_1 + \mu\gamma S_4 + F_2 \sin 2(\tau - \psi) \\ \frac{\partial S_3}{\partial \tau} &= \varepsilon US_2 - mS_3 - F_1 \cos 2(\tau - \psi) \\ \frac{\partial S_4}{\partial \tau} &= -\varepsilon US_1 - mS_4 - F_2 \sin 2(\tau - \psi) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Решение этой системы записывается через гармонические по времени функции

$$S_k = p_k \sin 2(\tau - \psi) + q_k \cos 2(\tau - \psi); \quad k = 1, 2, 3, 4 \tag{2.15}$$

Коэффициенты определяются с точностью до $O(\varepsilon^2)$ формулами

$$p_1 = (4 + \mu m)f_{12}, \quad q_1 = 2\mu\gamma f_{12}, \quad p_2 = 2\mu\gamma f_{21}, \quad q_2 = -(4 + \mu m)f_{21};$$
$$f_{ij} = \frac{2F_i + UF_j}{(4 + m^2)(4 - U^2)} \tag{2.16}$$
$$p_3 = \frac{-2F_1}{4 + m^2}, \quad q_3 = \frac{-mF_1}{4 + m^2}, \quad p_4 = \frac{-mF_2}{4 + m^2}, \quad q_4 = \frac{2F_2}{4 + m^2}$$

Функция $\mathbf{S}$ зависит только от переменных ψ, θ и U, поэтому уравнения (2.12) принимают вид

$$\dot{y}_k = -\frac{\partial S_k}{\partial\theta}(y_1 + S_1) - \frac{\partial S_k}{\partial\psi}\frac{y_2 + S_2}{\sin\theta} - \frac{\partial S_k}{\partial U}\frac{\mu\gamma}{(1 + \varepsilon)}W_3 + L_k(\mathbf{y}) + G_k(\mathbf{y} + \mathbf{S}); \quad k = 1, 2, 3, 4$$
$$\dot{W}_3 = (y_2 + S_2)(y_3 + S_3) - (y_1 + S_1)(y_4 + S_4) - \frac{\mu(1 + \gamma + \varepsilon)}{1 + \varepsilon}W_3 \tag{2.17}$$
$$\dot{U} = \frac{\mu\gamma}{1 + \varepsilon}W_3, \quad \dot{\theta} = y_1 + S_1, \quad \dot{\psi} = \frac{y_2 + S_2}{\sin\theta}$$

Подробный анализ полученной системы показал, что в режиме медленной эволюции переменные y_2 и y_3 — ограниченные функции ε, а переменные y_1, y_4 и W_3 — ограниченные функции ε^2. При этом для первых пяти уравнений средние значения правых частей, вычисленные в силу уравнений движения, с точностью до $O(\varepsilon^3)$ совпадают со средними по явно входящему времени. Учитывая это, а также вытекающие из выражений (2.15) формулы (среднее по времени обозначается угловыми скобками, штрихом — производные по переменной θ)

$$\left\langle\frac{\partial S_k}{\partial\theta}S_1\right\rangle = \frac{p_k' p_1 + k_k' q_1}{2} + O(\varepsilon^3), \quad \left\langle\frac{\partial S_k}{\partial\psi}S_2\right\rangle = p_2 q_k - q_2 p_k + O(\varepsilon^3) \tag{2.18}$$

получим для средних значений $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4$, $\bar{W}_3$ переменных y_1, y_2, y_3, y_4, W_3 следующие уравнения:

$$\dot{\bar{y}}_1 = -(1 + \varepsilon)U\bar{y}_2 + \mu\gamma\bar{y}_3 - F_1 + O(\varepsilon^2), \quad \dot{\bar{y}}_3 = \varepsilon U\bar{y}_2 - m\bar{y}_3 + F_1 + O(\varepsilon^2)$$
$$\dot{\bar{y}}_2 = U\bar{y}_1 + \mu\gamma\bar{y}_4 - \operatorname{ctg}\theta(p_2p_1 + q_2q_1)/2 - (p_2'p_1 + q_2'q_1)/2$$
$$\dot{\bar{y}}_4 = -m\bar{y}_4 - \operatorname{ctg}\theta(2\bar{y}_2\bar{y}_3 + p_2p_3 + q_2q_3)/2 - (p_4'p_1 + q_4'q_1)/2 - (p_2q_4 - q_2p_4)/\sin\theta \tag{2.19}$$
$$\dot{\bar{W}}_3 = -m\bar{W}_3 + \bar{y}_2\bar{y}_3 + (p_2p_3 + q_2q_3 - p_1p_4 - q_1q_4)/2$$

В последних трех уравнениях системы (2.19) правые части выписаны с точностью до $O(\varepsilon^3)$.

Из уравнений (2.19) найдем значения переменных $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4$, $\bar{W}_3$ в режиме медленной эволюции, полагая производные по времени от этих переменных равными нулю. При учете соотношений (2.7), (2.15) и (2.16) средние значения переменных y_2, y_3 определятся с точностью до $O(\varepsilon^2)$ из первых двух уравнений системы следующими формулами:

$$\bar{y}_2 = \frac{-F_1}{(1 + \gamma + \varepsilon)U} + O(\varepsilon^2), \quad \bar{y}_3 = \frac{F_1}{\mu(1 + \gamma + \varepsilon)} + O(\varepsilon^2) \tag{2.20}$$

Средние значения переменных y_1 и y_4 находятся из третьего и четвертого уравнений системы (2.19). На основании формул (2.16) и (2.20) с точностью до $O(\varepsilon^3)$ получим

$$\begin{gathered} p_2' p_1 + q_2' q_1 = 0, \quad p_2 p_1 + q_2 q_1 = 0, \quad \bar{y}_2 \bar{y}_3 = -\mu F_1^2/(m^2 U), \quad p_2 p_3 + q_2 q_3 = \mu f_{21} F_1 \\ p_4' p_1 + q_4' q_1 = -\mu f_{12} F_2 \operatorname{ctg}\theta, \quad p_1 p_4 + q_1 q_4 = -\mu f_{12} F_2, \quad p_2 q_4 - q_2 p_4 = -\mu f_{21} F_2 \end{gathered} \tag{2.21}$$

При учете соотношений (2.21) и (2.7) среднее значение переменной y_1 выражается в виде

$$\bar{y}_1 = \frac{\mu\gamma F_2^2}{2(1+\gamma)U\sin\theta}\left(\frac{U(\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2(2 + U\cos\theta)}{(4+m^2)(4-U^2)} - \frac{2\cos^3\theta}{m^2 U}\right) + O(\varepsilon^3) \tag{2.22}$$

и представляет собой ограниченную функцию ε^2. Выражение для $\bar{y}_4$ ниже не понадобится, поэтому его не выписываем. Отметим только, что оно также является ограниченной функцией ε^2.

Значение $\bar{W}_3$ находится из пятого уравнения системы (2.19). Учитывая формулы (2.20), (2.21), (2.22) и (2.7), получим

$$\bar{W}_3 = \frac{F_2^2}{2(1+\gamma)}\left(\frac{U(1+\cos^2\theta) + 4\cos\theta}{(4+m^2)(4-U^2)} - \frac{2\cos^2\theta}{m^2 U}\right) + O(\varepsilon^3) \tag{2.23}$$

Из восьмого уравнения системы (2.17) при учете соотношений (2.20) определяется с точностью до $O(\varepsilon^2)$ значение средней скорости прецессии спутника формулой

$$\dot{\bar{\psi}} = \frac{\bar{y}_2}{\sin\theta} = -\frac{F_1}{(\alpha+\gamma)U\sin\theta} = -\frac{3\varepsilon\cos\theta}{2(\alpha+\gamma)U} = \frac{3(A-C)\cos\theta}{2CU}, \tag{2.24}$$

которая полностью совпадает с выражением для скорости прецессии спутника, моделируемого одним твердым телом [11].

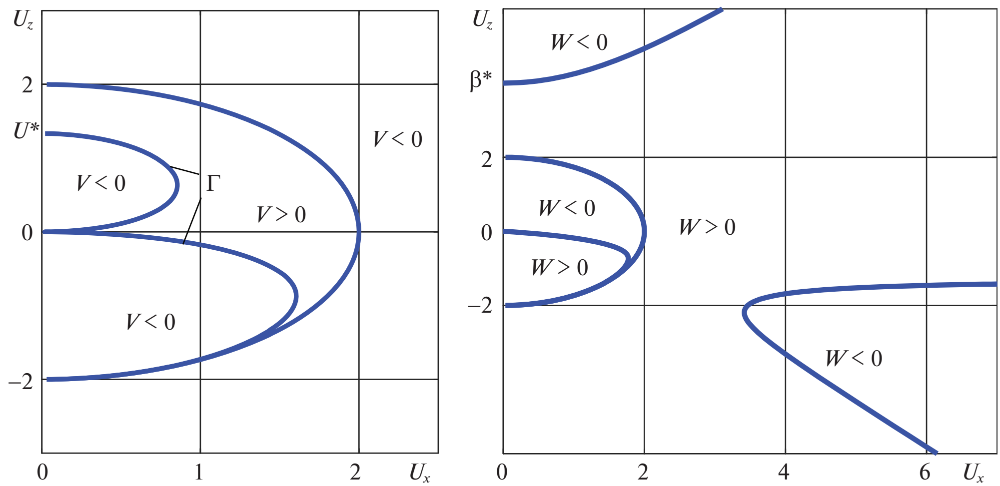
Из шестого и седьмого уравнений системы (2.17) определяются средние значения производных по времени от угла нутации и величины угловой скорости спутника формулами

$$\dot{\theta} = \bar{y}_1 + \bar{S}_1, \quad \dot{U} = \mu\gamma\bar{W}_3/(1+\varepsilon)$$

Можно показать (соответствующие выкладки ввиду громоздкости не приводятся), что вычисленное в силу уравнений движения среднее значение функции S_1 на периоде выражается членами третьего порядка относительно ε, т.е. $\bar{S}_1 = O(\varepsilon^3)$. Поэтому при учете соотношений (2.22) и (2.23) получим с точностью до $O(\varepsilon^3)$ следующие выражения для средних значений $\dot{\theta}$ и $\dot{U}$:

$$\begin{gathered} \dot{\theta} = \frac{\mu\gamma F_2^2}{2(1+\gamma)U\sin\theta}\left(\frac{U(\cos^2\theta - 3)\cos\theta - 4}{(4+m^2)(4-U^2)} - \frac{2\cos^3\theta}{m^2 U}\right) \\ \dot{U} = \frac{\mu\gamma F_2^2}{2(1+\gamma)}\left(\frac{U(1+\cos^2\theta) + 4\cos\theta}{(4+m^2)(4-U^2)} - \frac{2\cos^2\theta}{m^2 U}\right) \end{gathered} \tag{2.25}$$

Полученные уравнения образуют замкнутую систему эволюционных уравнений вращательного движения спутника относительно переменных θ и U. Из этих уравнений следует, что скорость эволюции по переменным θ и U пропорциональна ε^2, в то время как скорость прецессии спутника (2.24) пропорциональна ε.



Фиг. 3

Из второго уравнения (2.25) следует, что производная $\dot{U}$ меняет знак в точках $U = 2$ и точках, удовлетворяющих уравнению

$$U^2[(2 + M)\cos^2\theta + M] + 4MU\cos\theta - 8\cos^2\theta = 0; \quad M = m^2\big/(4 + m^2) \tag{2.26}$$

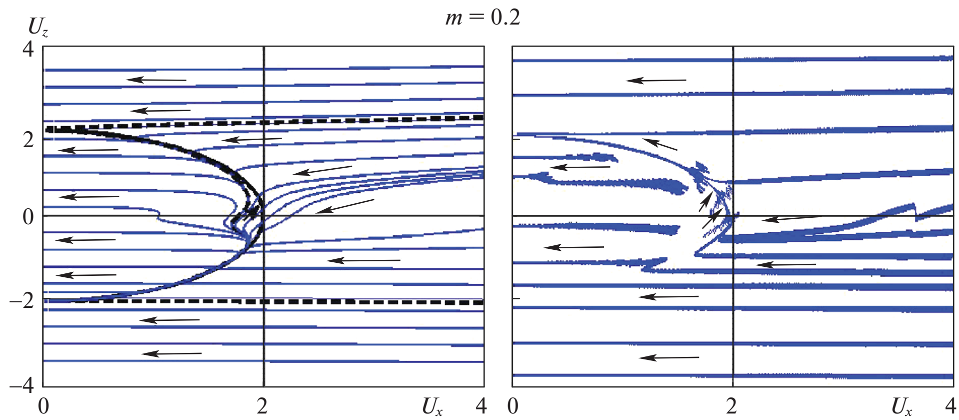
На фиг. 3 слева изображена кривая Г, определяемая этим уравнением и показаны области положительных и отрицательных значений производной $V = \dot{U}$ в плоскости переменных U_x, U_z, где $U_x = U\sin\theta$ и $U_z = U\cos\theta$ – проекции угловой скорости на плоскость орбиты и на нормаль к плоскости орбиты. При $U > 2$, а также внутри круга $U < 2$ в двух областях, ограниченных кривой Г, угловая скорость спутника уменьшается, а в остальной области увеличивается. Значение U^* определяется формулой

$$U^* = \frac{2}{1 + M} = \frac{4 + m^2}{2 + m^2} \tag{2.27}$$

На фиг. 3 справа показаны определяемые из первого уравнения (2.25) области положительных и отрицательных значений производной $W = \dot{\theta}$. Здесь

$$\beta^* = \frac{2}{1 - M} = \frac{4 + m^2}{2} \tag{2.28}$$

Эволюционные уравнения (2.25) имеют те же стационарные решения $\theta = 0,\ \pi$, $U = \beta = \mathrm{const}$, что и точные уравнения (1.2). Условия устойчивости/неустойчивости этих решений для эволюционных уравнений определяются знаком производной $\dot{\theta}$ в окрестности "прямых" ($\theta = 0$) и "обратных" ($\theta = \pi$) стационарных вращений. Как следует из представленных на фиг. 3 результатов анализа этой производной, "прямые" стационарные вращения ($U_x = 0, U_z > 0$) асимптотически устойчивы в диапазонах $U \in (0, 2)$ и $U \in (\beta^*, \infty)$, и неустойчивы в диапазоне $U \in (2, \beta^*)$. Все "обратные" стационарные вращения ($U_x = 0, U_z < 0$) кроме, быть может, точки $U = 2$, асимптотически устойчивы. Эти выводы полностью совпадают с полученными в разд. 1 результатами анализа устойчивости стационарных вращений спутника, близкого к сферически симметричному.



Фиг. 4

Из уравнений (2.25) можно исключить время и получить одно уравнение

$$\frac{d\theta}{dU} = \frac{U^2\cos\theta[(2+M)\cos^2\theta - 3M] - 4MU - 8\cos^3\theta}{\{U^2[(2+M)\cos^2\theta + M] + 4MU\cos\theta - 8\cos^2\theta\}U\sin\theta}, \tag{2.29}$$

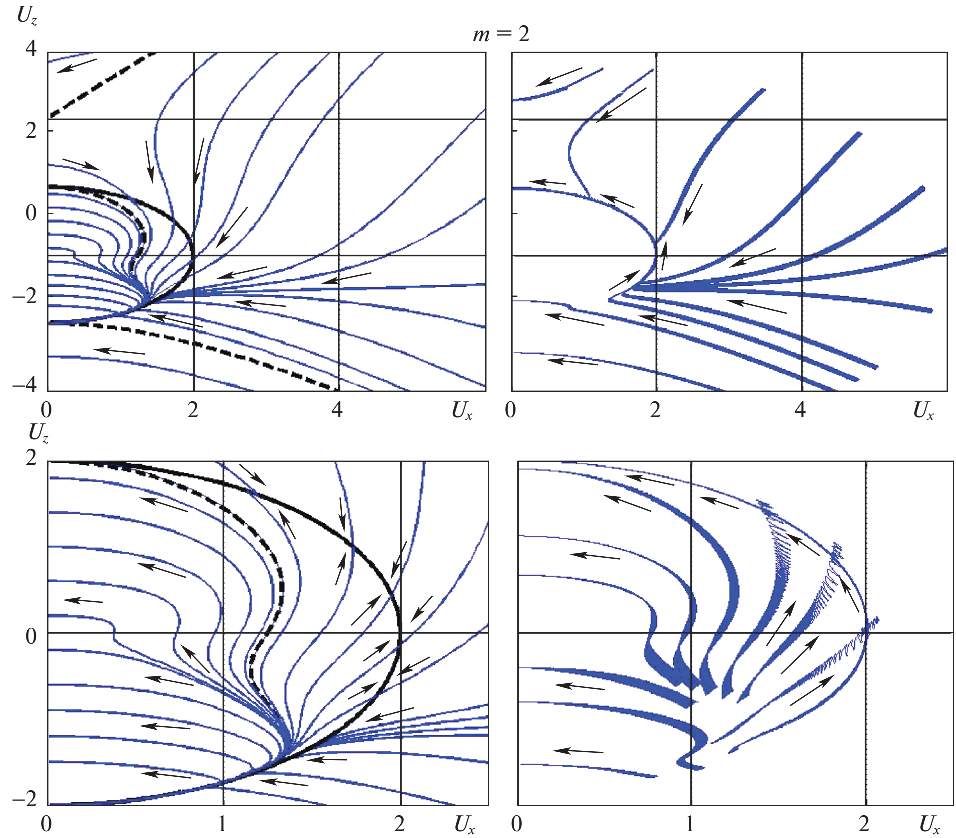
описывающее траектории эволюции вращательного движения спутника в переменных U, θ.

Ниже приведены результаты анализа фазовых траекторий (ФТ) эволюции вращательного движения спутника в переменных U_x, U_z для разных значений параметра m и разных начальных условий. В левых частях фиг. 4 и 5 изображены ФТ, получаемые из эволюционного уравнения (2.29), а в правых частях – ФТ, полученные численным интегрированием точных уравнений (1.1) для динамически симметричного спутника со значением параметра $\alpha = 1.1$. Стрелками показано направление эволюции. Штриховые линии – сепаратрисы, отделяющие ФТ, попадающие на окружность $U = 2$, от других ФТ. Верхняя сепаратриса начинается в точке $U_x = 0$, $U_z = \beta^*$, где величина β^* определяется формулой (2.28), а нижняя сепаратриса – в точке $U_x = 0$, $U_z = -2$.

Представленные фазовые портреты свидетельствуют о полном совпадении ФТ эволюции спутника, полученных из эволюционного уравнения (2.29), с одной стороны, и точных уравнений (1.1), с другой стороны.

Как видно из представленных фигур, имеется ограниченная сепаратрисами область начальных условий (обозначим ее через G_2), для которой любая ФТ со временем попадает на окружность $U = 2$. При этом для большинства таких ФТ дальнейший (финальный) этап эволюции представляет собой движение по дуге окружности $U = 2$ против часовой стрелки – резонансное вращение 2 : 1 (угловая скорость спутника в два раза больше угловой скорости орбитального базиса), при котором угловая скорость спутника по величине остается постоянной, а ось вращения поворачивается в сторону нормали к плоскости орбиты. В финале таких движений устанавливается стационарное вращение вокруг нормали к плоскости орбиты с угловой скоростью, равной удвоенной угловой скорости орбитального базиса.

При малых по сравнению с единицей значениях m (фиг. 4) асимптоты сепаратрис расположены под малым углом к оси U_x и область G_2 занимает сравнительно небольшую часть полуплоскости возможных начальных данных. Поэтому только для небольшой доли начальных данных на финальном этапе реализуется резонансный режим 2 : 1.



Фиг. 5

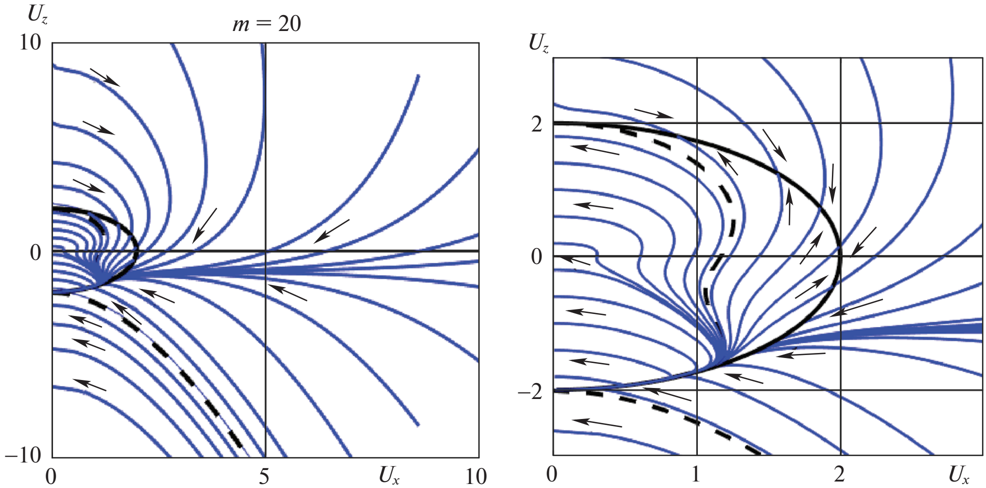
Для остальных начальных данных ФТ близки к горизонтальным прямым (U_z убывает гораздо медленнее, чем U_x).

Для значений m, сравнимых по величине с единицей (фиг. 5), размеры области G_2 сопоставимы с размерами области остальных начальных данных и доля ФТ, финальный этап которых – резонансный режим 2 : 1, сопоставима с долей всех остальных ФТ.

При $m \gg 1$ (фиг. 6) для подавляющего большинства начальных данных из области $U > 2$ финальным этапом будет резонансный режим 2 : 1.

ФТ, стартующие выше верхней сепаратрисы, характеризуются монотонным уменьшением угла θ до нуля, а ФТ ниже нижней сепаратрисы – монотонным увеличением угла θ до π. Такое поведение ФТ подтверждает сделанные ранее выводы о характере устойчивости соответствующих "прямых" и "обратных" стационарных вращений спутника.

На ФТ из области G_2 угол θ меняется немонотонно. При этом часть ФТ, начинающихся в верхней полуплоскости ($U_z(0) > 0$), пересекают ось $U_z = 0$, но все они заканчиваются дугой окружности $U = 2$ (резонансным режимом 2 : 1). Таким образом, финалом эволюционного процесса с начальными ФТ из верхней полуплоскости области G_2 являются "прямые" стационарные вращения с угловой скоростью, равной удвоенной угловой скорости орбитального базиса. Таким же финалом характеризуется и большая



Фиг. 6

часть ФТ из нижней полуплоскости области G_2. В резонансный режим 2 : 1 не захватываются только ФТ, близкие к нижней сепаратрисе; они “прошивают” резонансную окружность $U = 2$ и заканчиваются “обратными” стационарными вращениями с угловой скоростью $U < 2$.

Отметим, что область G_2 включает и часть круга $U < 2$. На ФТ из этой части круга угловая скорость спутника увеличивается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
2. *Черноусько Ф.Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: Вычисл. центр АН СССР, 1968. 232 с.
3. *Сидоренко В.В.* Эволюция вращательного движения планеты с жидким ядром // Астроном. вестник. 1993. Т. 27. № 2. С. 119–127.
4. *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела, содержащего сферический демпфер // ПМТФ. 1968. № 1. С. 73–79.
5. *Амелькин Н.И.* Об асимптотических свойствах движений спутников в центральном поле, обусловленных внутренней диссипацией // ПММ. 2011. Т. 75. № 2. С. 204–223.
6. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Об устойчивости стационарных вращений спутника с внутренним демпфированием в центральном гравитационном поле // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 123–136.
7. *Вильке В.Г., Копылов С.А., Марков Ю.Г.* Эволюция вращательного движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // ПММ. 1985. Т. 49. № 1. С 25–34.
8. *Маркеев А.П.* К динамике упругого тела в гравитационном поле // Космич. исследования. 1989. Т. 27. Вып. 2. С. 163–175.
9. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
10. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
11. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.