
**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

УДК 534.26

**ВТОРИЧНОЕ ПОЛЕ КОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ В ЖИДКОСТИ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ**

© 2022 г. О. И. Косарев

*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия**e-mail: kosarevoi@yandex.ru*

Поступила в редакцию 16.02.2021 г.

Принята к публикации 20.10.2021 г.

Предложен новый метод решения задачи вторичного гидроакустического поля конечной упругой цилиндрической оболочки в дальней зоне. Метод включает: определение корней дисперсионного уравнения собственных колебаний оболочки в жидкости, расчет вынужденных колебаний составной оболочечной конструкции под действием падающего поля, использование точного импеданса излучения конечной оболочки в жидкости, расчет вторичного поля, включающего поле, рассеянное на упругой оболочке, и поле, отраженное от абсолютно твердой оболочки.

Ключевые слова: точное решение, излучение, звуковое давление, импеданс, цилиндрическая оболочка, волновое уравнение, волновое число

DOI: 10.31857/S0235711922030087

Статья посвящена методу расчета вторичного гидроакустического поля конечной упругой цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость, в дальней зоне. Первичное поле это звуковое поле, излучаемое колеблющейся оболочкой под действием внутренних источников возбуждения, дискретных сил приложенных к оболочке. Вторичное поле (дифрагированное) это поле, которое возникает в результате действия на оболочку внешнего падающего звукового поля, создаваемого зондирующим источником. В результате этого возбуждаются вынужденные колебания оболочки, и возникает излученное рассеянное (дифрагированное) гидроакустическое поле. Рассеянное поле включает две составляющие: 1) поле излученное, создаваемое вынужденными колебаниями оболочки; 2) поле, отраженное от оболочки, как от абсолютно твердого тела. Процессы излучения и дифракции могут рассматриваться как в ближнем, так и в дальнем поле. Рассматривается конечная оболочка со свободными концами.

Исследованиям колебаний, излучения и дифракции цилиндрических оболочек посвящено большое количество работ [1–20]. Эти работы регулярно появляются, начиная с середины прошлого века, что свидетельствует о незавершенности и, следовательно, актуальности исследований. Импеданс излучения цилиндрической оболочки используется при расчетах вынужденных колебаний и излучения оболочек в ближнем и дальнем поле.

Проведем анализ современного состояния решения задач, связанных с импедансом, колебаниями и вторичным полем конечных упругих цилиндрических оболочек на основе наиболее известных работ.

В широко известной книге [1] приведено решение волнового уравнения для расходящейся цилиндрической волны в виде

$$p = A_0 H_n^{(1)}(rk) e^{ik_z z} \cos(n\varphi) e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

где $H_n^{(1)}(arg)$ – функция Ганкеля; $k = \omega/c$ – волновое число; $\omega = 2\pi f$ – частота колебаний; c – скорость звука в среде (жидкости); k_z – осевое волновое число; n – окружная гармоника по углу φ ; t – время; r – радиальная координата.

Решение (1) не верное, т.к. в вместо k должно быть k_r , и частота ω

$$\omega = kc = c\sqrt{k^2 + k_z^2}.$$

При $k_z \neq 0$ определена не верно. В [1] рассматривалась только плоская задача.

В работе [2] со ссылкой на [1] приведено решение задачи излучения колеблющейся бесконечной цилиндрической оболочки, на поверхности которой задана деформация в виде

$$w(z) = w_0 \cos\left(\frac{2\pi m}{\lambda} z\right), \quad (2)$$

где λ – длина волны деформации; m – продольная гармоника; z – осевая координата. Формула звукового давления в ближнем поле приведена в виде

$$p = \frac{i\rho\omega H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2 - (2\pi m/\lambda)^2}\right)w(z)}{\sqrt{k^2 - (2\pi m/\lambda)^2} H_n^{(2)}\left(a\sqrt{k^2 - (2\pi m/\lambda)^2}\right)}, \quad (3)$$

где ρ – плотность среды. В формуле (3) принято $k_z = 2\pi m/\lambda$. Но в формуле (3) k_z должно быть осевым волновым числом звуковой волны, распространяющееся в жидкости, а не изгибной формой колебаний (деформаций) оболочки – $2\pi m/\lambda$ (2). Эти параметры являются разнородными по физической природе и, следовательно, не могут быть взаимозаменяемыми. Поэтому формулу (3) нельзя признать обоснованной.

Задачи дифракции звука на упругих цилиндрических оболочках в ближнем поле впервые были рассмотрены в работах [3, 4]. Работа [3] посвящена дифракции на ограниченной оболочке с граничными условиями Навье. В работе [4] рассмотрена дифракция на бесконечной оболочке. Уравнения колебаний оболочки в перемещениях взяты из [5]. Звуковое давление на поверхности оболочек, обусловленное деформацией ограниченной и бесконечной оболочек, представлено формулой, в которой осевое волновое число k_z является неизвестной переменной интегрирования в пределах $(-\infty, \infty)$. Формула звукового давления такая же, как (5), о которой сказано ниже. В работах [6, 7] рассмотрены задачи дифракции звука на бесконечном абсолютно твердом цилиндре.

В фундаментальной монографии по акустике [8] приведена формула импеданса излучения колеблющейся цилиндрической оболочки (по мнению многих авторов бесконечной оболочки)

$$\frac{p}{w} = \frac{\rho\omega^2 H_n^{(2)}\left(a\sqrt{k^2 - k_z^2}\right)}{\sqrt{k^2 - k_z^2} H_n^{(2)}\left(a\sqrt{k^2 - k_z^2}\right)}, \quad k_r = \sqrt{k^2 - k_z^2}. \quad (4)$$

Недостатком формулы (4) является то, что она не доведена до конца, т.к. в ней осевое волновое число k_z не определено, не указано как его определять.

О волновом числе k_z из [8] известно следующее: 1) дана ссылка на [2], где $k_z = 2\pi m/\lambda$; 2) в результате некорректного определения скорости фронта бегущей волны постоянной фазы получено $k_z/k_r = \text{tg}\theta$. На основе этого принято $k_z = k\sin\theta$, где θ угол

распространения волны, который якобы зависит от частоты (от k). При высоких частотах, таких, что $k^2 \gg k_z^2$, излучаемые волны распространяются перпендикулярно к поверхности цилиндра, по мере уменьшения частоты (k) угол θ увеличивается и при $k = k_z$ происходит акустическое короткое замыкание; 3) в случае $k < k_z$ и $k_r^2 = k^2 - k_z^2 < 0$, когда величина k_r становится мнимой, рекомендуется функцию Ганкеля заменять на функцию Макдональда. Возможность превышения $k_z > k$ допускали многие авторы [3, 4, 8, 9, 12]. В итоге, ссылаясь на значения $k_z = 2\pi m/\lambda$, не критикуя возможность изменения k_z – как переменной интегрирования в пределах $-\infty < k_z < \infty$ [3, 4] и признавая возможность $k_z > k$, автор [8] не смог дать формулу определения осевого волнового числа k_z .

В работе [9] для конечной упругой цилиндрической оболочки виброперемещение представлено в виде интеграла Фурье, а решение волнового уравнения принято в виде

$$p^*(r, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(2)} \left(r \sqrt{k^2 - k_z^2} \right) e^{ik_z z} dk_z.$$

Излучаемое ближнее поле, вызванное вибрациями конечной упругой оболочки, представлено (без суммирования гармоник) в виде

$$p_{sw} = \frac{i\rho\omega}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_n \left(a \sqrt{k^2 - k_z^2} \right) w(z') e^{i\xi(z-z')}}{\sqrt{k^2 - k_z^2} H_n' \left(\sqrt{k^2 - k_z^2} \right)} dz' dk_z. \quad (5)$$

Формулы звукового давления излучаемого ближнего поля, вызванного вибрациями оболочек, в работах [3, 4, 9] (при интегрировании в пределах $-\infty < k_z < \infty$), совпадают, но из-за их необоснованности доверия не вызывают.

Например, в [9] при рассмотрении излучения пульсирующего цилиндра при интегрировании по k_z в пределах $(-\infty < k_z < \infty)$ выполнялась замена переменных $k_z = k \sin(\alpha_1 + i\alpha_2)$ с последующим определением α_1 и α_2 .

В работах [4, 9] также решалась задача дифракции звука на бесконечной импедансной оболочке в ближнем поле. Без обоснования принято $k_z = k \sin \psi$, где ψ – угол падения звуковой волны.

В работе [10] впервые решена задача излучения колеблющейся конечной цилиндрической оболочки в дальнем поле с использованием формулы Кирхгофа. Задача вынужденных колебаний оболочки не решалась. Перемещения задавались в виде гармонической функции. В качестве импеданса использован импеданс излучения бесконечной цилиндрической оболочки (3), в котором параметр $2\pi/\lambda$ без обоснований заменен на $\xi = -k \cos \theta$. Замена объяснена тем, что в формулу Кирхгофа входят интегралы с экспонентами $\exp(ikz \cos \theta)$ (12). Эти интегралы необоснованно названы преобразованиями Фурье и их отношение гипотетически принято в качестве импеданса излучения конечной оболочки. Такой выбор импеданса нельзя признать теоретически обоснованным.

Импеданс излучения ограниченной цилиндрической оболочки приведен в [11]. Колебательная скорость оболочки задана в таком же виде, как (2) только $\lambda = L$, где L – длина оболочки. Авторы представили давление излучаемого поля в виде

$$p = \frac{V_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_1 e^{i(z-\xi)\gamma} d\gamma, \quad (6)$$

где в качестве Z_1 взяли формулу для бесконечной цилиндрической оболочки (4). Импеданс излучения ограниченной оболочки в конечном виде можно представить формулой

$$Z_3 = \frac{\rho\omega^2 H_n^{(2)} \left(r\sqrt{k^2 - (2\pi m/L)^2} \right)}{\sqrt{k^2 - (2\pi m/L)^2} H_n^{(2)} \left(a\sqrt{k^2 - (2\pi m/L)^2} \right)}. \quad (7)$$

Формула (7) точно такая же, как (3), с учетом $\lambda = L$. Отметим, что ссылка на [2] отсутствует. Замечания, высказанные по поводу (3), относятся и к данному случаю. Здесь причиной получения ошибочного результата является формула (6). В [11] ошибочно сказано, что при стремлении $L \rightarrow \infty$ импеданс ограниченной оболочки стремится к импедансу бесконечной оболочки.

В работе [12] рассмотрена задача дифракции звука на конечном абсолютно твердом цилиндре в дальнем поле с использованием формулы Кирхгофа

$$P_{\text{rad}} = P_0 \frac{e^{ikR}}{R\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n\varphi \int_{-L}^L \frac{J_n'(ak \sin \psi)}{H_n'(ak \sin \psi)} dz, \quad (8)$$

где ψ – угол падения звуковой волны. В формуле Кирхгофа в качестве импеданса взята импеданс для бесконечного цилиндра. Вместо полного давления взято только давление рассеянного поля и производная полного давления, вопреки граничному условию, не приравнена к нулю. В результате формула (8) ошибочная.

Задача дифракции звука на твердом цилиндре, ограниченном по торцам полусферами, рассмотрена в [13] в дальнем поле. В ней также как в [12] в формуле Кирхгофа вместо суммарного полного поля ошибочно взята только часть его, т.е. рассеянное поле.

В ряде работ предложены численные методы расчета [8, 14, 15], но они по сложности и трудоемкости значительно превосходят аналитические методы. Современным численным методом является метод конечных элементов (МКЭ) на базе программного комплекса ANSYS. В работе [15] проведено моделирование рассеянного поля методом МКЭ на модели цилиндрической оболочки длиной 10 м и диаметром 0.9 м. В этой же работе сказано о невозможности расчета дальнего гидроакустического поля реальных подводных объектов методом МКЭ, поскольку количество элементов расчетной модели возрастает пропорционально кубу дистанции. В принятой модели оболочка была представлена 20000, а жидкость – 180000 элементами.

Проведенный анализ показал, что рассматриваемая задача до сих пор полностью не решена, аналитические формулы, позволяющие рассчитать суммарное вторичное поле конечной цилиндрической оболочки в дальней зоне при произвольных углах падения и наблюдения, отсутствуют.

Сказанное является обоснованием актуальности рассматриваемой задачи.

Настоящая статья является продолжением и развитием работы [16], в которой приведено решение задачи дифракции звука на конечной абсолютно твердой цилиндрической оболочке в дальнем поле.

Целью исследований является разработка теоретических основ аналитического метода расчета полного дифрагированного поля конечной упругой цилиндрической оболочки в дальней зоне при произвольных углах наблюдения. Новизна заключается в том, что предложенный метод является полным, т.е. включает расчет вынужденных колебаний цилиндрической оболочки, возбуждаемых падающим полем, и рассеяние на оболочке как упругого, так и твердого тела. Метод предложен впервые. В расчеты вынужденных колебаний оболочки и вторичного поля входит импеданс излучения цилиндрической оболочки, который по-разному проявляется в дисперсионном уравнении и в формуле Кирхгофа. Впервые в дисперсионном уравнении и в расчете звукового давления вторичного поля использован точный импеданс излучения, в котором осевое волновое число k_z определено на основе решения волнового уравнения.

Полезность метода заключается в том, что его можно использовать при решении различных прикладных задач гидроакустики, в том числе при акустическом проектировании оболочечных конструкций.

Рассматривается задача дифракции звука на конечной упругой цилиндрической оболочке, погруженной в жидкость, в дальнем поле. Рассеяние звуковых волн рассматривается на цилиндрической поверхности оболочки без учета концевых заглушек (сферических и др.). В ряде прикладных задач заглушки отсутствуют, и учитывать их не требуется. При необходимости рассеяние на заглушках можно рассматривать отдельно [8, 12]. Оно имеет смысл при малых углах падения ($\psi \approx 0^\circ - 5^\circ$) и учете продольных колебаний цилиндрической оболочки.

Обозначения параметров оболочки: a – радиус; L – длина; h – толщина. Источником излучения звука является монополь с объемной скоростью V , находящийся на большом расстоянии H от оболочки. Вынужденные колебания оболочки возбуждаются падающим на поверхность оболочки звуковым полем.

Звуковое давление поля, падающего на оболочку под углом ψ к оси z оболочки [16]

$$p_0 = A_0 e^{ikz \cos \psi} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr \sin \psi) \cos n\varphi, \quad A_0 = \frac{i\rho\omega V e^{-ikH}}{4\pi H}. \quad (9)$$

Излучаемое поле, определяемое решением волнового уравнения в цилиндрических координатах (без суммирования гармоник), представим в виде

$$p_s = B_n H_n^{(2)} \left(r \sqrt{k^2 - k_z^2} \right) e^{ik_z z} \cos n\varphi, \quad (10)$$

где B_n – искомая функция, определяемая из граничных условий; $H_n^{(2)}(arg)$ – функция Ганкеля второго рода (далее индекс (2) опускаем); k_z – искомый коэффициент. Этот коэффициент определим из решения волнового уравнения, которое можно представить в виде $k^2 = k_r^2 + k_z^2$. Математическим решением этого уравнения является $k_r k \sin \theta$, $k_z = k \cos \theta$. Физический смысл угла θ – это угол между направлением распространения излучаемой цилиндрической волны с волновым числом k и осью z в цилиндрической системе координат. Новизна этого решения заключается в определении осевого волнового числа k_z в явном виде. Полезность заключается в однозначном определении импеданса излучения цилиндрической оболочки (4), безотносительно к ее длине, т.е. конечной или бесконечной. Формула импеданса (4) с $k_z = k \cos \theta$ устраняет имевшиеся разногласия и различные ее трактовки и становится основой для решения всех задач гидроакустики любых цилиндрических оболочек в жидкости.

С использованием граничных условий на поверхности цилиндрической оболочки $\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right| = \rho \omega^2 w(z) \cos n\varphi$, найдем функцию B_n

$$B_n = \frac{\rho \omega^2 w(z) - k \sin A_0 e^{ikz \cos \psi} \epsilon_n i^n J_n'(ak \sin \psi)}{\sqrt{k^2 - k_z^2} H_n' \left(a \sqrt{k^2 - k_z^2} \right) e^{i\gamma z}}.$$

Давление звукового поля, рассеянного вблизи оболочки

$$p_s = \left[\frac{\rho \omega^2 w(z) - k \sin A_0 e^{ikz \cos \psi} \epsilon_n i^n J_n'(ak \sin \psi)}{\sqrt{k^2 - k_z^2} H_n' \left(a \sqrt{k^2 - k_z^2} \right)} \right] H_n \left(r \sqrt{k^2 - k_z^2} \right) \cos n\varphi. \quad (11)$$

Рассеянное звуковое поле в дальней зоне определим с использованием формулы Кирхгофа [10]

$$p_N = \frac{1}{4\pi} \iint \left[p \frac{\partial G(N, A)}{\partial n} - \frac{\partial p}{\partial n} G(N, A) \right] ds,$$

$$G(N, A) = \frac{\exp(-ikR_1)}{R_1}, \quad R_1 = |N, A|.$$

В результате проведенных преобразований этого выражения, для краткости опущенных, формула рассеянного поля в дальней зоне имеет вид

$$P_N = - \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right) \frac{e^{\frac{i\pi n}{2}}}{2} \left[-\mu J'_n(\mu) \int_0^L p e^{ikz \cos \theta} dz + a J_n(\mu) \int_0^L \frac{\partial p}{\partial r} e^{ikz \cos \theta} dz \right], \quad (12)$$

где $\mu = ak \sin \theta$. Следует отметить, что формула (12) является развитием формулы, приведенной в [10]. Отметим, что полный вывод формулы в [10] не был приведен и в окончательной формуле и в промежуточных выкладках имелись описки и ошибки, которые здесь исправлены.

Полное поле на поверхности оболочки $p = p_0 + p_s$. Подставим в (12) выражения p_0 (9) и p_s (11), заменим $\exp(i\pi n/2) = i^n$ и получим давление вторичного поля, рассеянного конечной цилиндрической оболочкой в дальней зоне

$$p_N = -E i^n \left\{ -\mu J'_n(\mu) \left[A_0 \varepsilon_n i^{2n} T_n \int_0^L e^{ik\beta z} dz + \int_0^L \frac{a \rho \omega^2 H_n(\mu^*) w(z) e^{ikz \cos \theta}}{\mu^* H'_n(\mu^*)} dz \right] + Y_n \right\},$$

$$T_n = J_n(\eta) - \frac{\eta J'_n(\eta) H_n(\mu^*)}{\mu^* H'_n(\mu^*)}, \quad Y_n = a J_n(\mu) \int_0^L \rho \omega^2 w(z) e^{ikz \cos \theta} dz,$$

где $\mu^* = a\sqrt{k^2 - k_z^2}$; $\eta = ak \sin \psi$; $E = \frac{e^{-ikR}}{R}$; $\beta = \cos \psi + \cos \theta$.

Полное дальнее поле p_N состоит из суммы двух частей, одна из которых p_t соответствует отраженному полю как от абсолютно твердого тела, и вторая p_w – вызванная вибрациями упругой оболочки $p_N = p_t + p_w$.

С учетом суммирования гармоник дальнее поле, отраженное абсолютно твердой цилиндрической оболочкой имеет вид

$$p_t = \frac{e^{-ikR}}{R} \frac{A_0 \mu}{2\mu^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n i^{2n} J'_n(\mu)}{H'_n(\mu^*)} [T_n] \int_0^L e^{ikz\beta} dz, \quad (13)$$

где $T_n = \mu^* H'_n(\mu^*) J_n(\eta) - \eta J'_n(\eta) H_n(\mu^*)$, $\beta = \cos \psi + \cos \theta$.

Рассеянное дальнее поле, вызванное вибрациями упругой цилиндрической оболочкой

$$p_w = - \frac{e^{-ikR} a \rho \omega^2}{2R} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \left[J_n(\mu) - \frac{\mu J'_n(\mu) H_n(\mu^*)}{\mu^* H'_n(\mu^*)} \right] \int_0^L w(z) e^{ikz \cos \theta} dz. \quad (14)$$

Для расчета диаграммы направленности в дальнем поле в общем случае нужны обе формулы (13) и (14). Формулы можно упростить, если ограничиться определением давления только в направлениях зеркального отражения $\theta_1 = \pi - \psi$ и теневого луча $\theta_2 = \pi + \psi$.

Для расчета по формуле (14) нужно знать деформации $w(z)$ оболочки, которые должны определяться из расчета вынужденных колебаний оболочки в жидкости, возбуждаемых падающим полем. Считаем, что внешнее звуковое давление на оболочку,

возбуждающее ее колебания, происходит в радиальном направлении по координате w [17–20].

Для каждой окружной гармоники n с учетом опущенной временной зависимости $e^{i\omega t}$ уравнение вынужденных колебаний оболочки в жидкости можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} L_{11} + \omega_*^2 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & L_{22} + \omega_*^2 & L_{23} \\ -L_{13} & L_{23} & L_{33} + \omega_*^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \frac{a}{q} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_0 + p_s \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

Полное решение уравнения (15) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения, содержащего восемь постоянных, и частного решения вынужденных колебаний, возбуждаемых суммарным давлением $p = p_0 + p_s$

$$\begin{aligned} u &= U \cos(n\varphi) + u_p, & v &= V \sin(n\varphi) + v_p, & w &= W \cos(n\varphi) + w_p, \\ U &= \sum_{j=1}^8 C_{jn} \frac{\Delta_{jn}^{(2)}}{\Delta_{jn}^{(1)}} e^{i\alpha_{jn}\xi}, & V &= \sum_{j=1}^8 C_{jn} \frac{\Delta_{jn}^{(3)}}{\Delta_{jn}^{(1)}} e^{i\alpha_{jn}\xi}, & W &= \sum_{j=1}^8 C_{jn} e^{i\alpha_{jn}\xi}, \end{aligned} \quad (16)$$

где n – окружные гармоники ряда Фурье, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, α_{jn} – корни дисперсионного уравнения, $j = 1-8$ – порядковые номера корней; C_{jn} – искомые коэффициенты; Δ_{jn} – миноры матрицы уравнения колебаний оболочки (15); $\omega = 2\pi f$ – угловая частота колебаний; f – частота колебаний; $\xi = z/a$. В решение (16) входят подлежащие определению корни дисперсионного уравнения α_{jn} и коэффициенты C_{jn} . Для получения дисперсионного уравнения решение (16) представим в виде

$$u = U e^{i\alpha\xi} \cos n\varphi; \quad v = V e^{i\alpha\xi} \sin n\varphi; \quad w = W e^{i\alpha\xi} \cos n\varphi; \quad \xi = z/a.$$

В результате подстановки этих решений в уравнение (15) при $p_0 = 0$ получим уравнение свободных колебаний оболочки

$$\begin{bmatrix} L_{11} + \omega_*^2 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & L_{22} + \omega_*^2 & L_{23} \\ -L_{13} & L_{23} & L_{33} + \omega_*^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \frac{a}{q} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{s0} \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

где p_{s0} – звуковое давление в жидкости, вызываемое свободными колебаниями оболочки, учитывающее влияние присоединенной массы жидкости. Считая, что излучение происходит в радиальном направлении по координате w , т.е. нормально к поверхности оболочки, принимаем $r = a$, $\theta = 90^\circ$ и, следовательно, в (4) получаем $k_z = 0$

$$p_{s0} = \frac{\rho_0 \omega^2 w H_n^{(2)}(ak)}{k H_n^{(2)'}(ak)}.$$

Входящие в решение показатели экспонент α являются корнями дисперсионного уравнения свободных колебаний. После соответствующих преобразований дисперсионное уравнение колебаний цилиндрической оболочки в жидкости получим в виде [21]

$$\frac{\Delta_0(\alpha)}{\Delta_1(\alpha)} - \frac{\rho_0 \omega^2 a H_n^{(2)}(ka)}{q k H_n^{(2)'}(ka)} = 0. \quad (18)$$

Однако отличие полученного результата заключается в том, что ранее в [21] это уравнение было получено не обосновано, исходя из ошибочных предпосылок определения p_{s0} [9]. Определение корней проводится так же, как в [21].

Определим частное решение уравнения (15), приняв его в виде $(u_p \cos n\phi, v_p \sin n\phi, w_p \cos n\phi)e^{i\chi z}$, где $\gamma = k\alpha \cos \psi$ фаза падающего поля.

При подстановке решений в уравнение (17) элементами матрицы будут

$$\begin{aligned} L_{11} &= \gamma^2 - \frac{1-\nu}{2}n^2 + b_1\gamma^2, & L_{12} &= \frac{1+\nu}{2}\gamma n = -L_{21}, & L_{13} &= \gamma\nu - \frac{z_1 b_1}{r}\gamma^3, \\ L_{22} &= \frac{1-\nu}{2}(1+4\delta^2)\gamma^2 - n^2\left(1+b_2+2\frac{z_2 b_2}{p}+\delta^2+\frac{a_2}{r^2}\right), \\ L_{23} &= L_{32} = -n\left[1+b_2+\frac{z_2 b_2}{r}-(2-\nu)\delta^2\gamma^2+n^2\left(\delta^2+\frac{z_2 b_2}{r}+\frac{a_2}{r^2}\right)\right], & (19) \\ L_{31} &= -L_{13}, & L_{33} &= -1-b_2-n^4\frac{a_2}{r^2}-\delta^2(\gamma^2-n^2)^2-2\frac{z_2 b_2}{r}-\gamma^4\frac{a_1}{r^2}, \\ \delta^2 &= \frac{h^2}{12a^2}, & \omega_*^2 &= \frac{\omega^2 a^2 \rho_* (1-\nu^2)}{E}, & q &= \frac{E_1 h}{(1-\nu^2)a}, & i &= \sqrt{-1}, \end{aligned}$$

где a_1, b_1 – параметры стрингеров; a_2, b_2, z_2 – параметры шпангоутов; $E_1 = E_0(1 + i\chi)$ – комплексный модуль упругости; χ – потери в материале оболочки; $r = a$; ν – коэффициент Пуассона; ρ_* – плотность материала оболочки.

Обозначив матрицу в (15)

$$L_{i,j} = \begin{bmatrix} L_{11} + \omega_*^2 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & L_{22} + \omega_*^2 & L_{23} \\ -L_{13} & L_{23} & L_{33} + \omega_*^2 \end{bmatrix},$$

определим вектор частного решения уравнения (15)

$$\begin{Bmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{Bmatrix} = \frac{a}{q} [L_{i,j}]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_0 + p_s \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

Из (20) получим радиальное перемещение

$$w_p = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} a (p_0 + p_s), \quad (21)$$

где Δ_1 – минор и Δ_0 – определитель матрицы $L_{i,j}$, с учетом (19)

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (L_{11} + \omega_*^2)(L_{22} + \omega_*^2) + L_{12}^2, \\ \Delta_0 &= (L_{11} + \omega_*^2)(L_{22} + \omega_*^2)(L_{33} + \omega_*^2) - L_{12}L_{23}L_{13} - L_{13}L_{12}L_{23} + \\ &+ L_{13}(L_{22} + \omega_*^2)L_{13} - (L_{11} + \omega_*^2)L_{23}^2 + L_{12}^2L_{33}. \end{aligned}$$

После подстановки выражений давления падающего поля p_0 и рассеянного поля p_s в формулу (21) и проведения соответствующих преобразований получим

$$w_p = \frac{A_0 \varepsilon_n i^n \left[J_n(\eta) - \frac{\eta J_n'(\eta) H_n(\mu^*)}{\mu^* H_n'(\mu^*)} \right] e^{ikz \cos \psi}}{\frac{q}{a} Z_M - \frac{a \rho \omega^2 H_n(\mu^*)}{\mu^* H_n'(\mu^*)}}, \quad (22)$$

где $Z_M = \Delta_0/\Delta_1$ – механический импеданс оболочки. Подставим $w(z) = w_p$ из (22) в (14) и с учетом (13) и (14), определим окончательное выражение p_N .

Методика составления уравнений вынужденных колебаний для составной оболочечной конструкции, включающей набор цилиндрических оболочек, соединенных между собой кольцами, для вторичного поля аналогична методике, изложенной в [21] для первичного поля, но отличается от нее выражениями правых частей уравнений вынужденных колебаний, обусловленных падающим полем.

В результате получается система матричных уравнений вынужденных колебаний относительно перемещений колец z_k

$$\begin{aligned} & \left[M_0 - H_0^4 G_1^1(0) C_1^1 H_0^2 \right] z_0 - H_0^4 G_1^1(0) C_1^2 H_1^1 z_1 = \\ & = H_0^4 \sum_{s=1}^{S_v} \left\{ \Phi_{s1} F_{s1} - G_1^1(0) \left[C_1^1 f_{s1} + C_1^2 f_{s1} e^{i\theta_{sk} \ell_k} \right] \right\}, \\ & \quad H_k^3 G_k^1(\ell_k) C_k^1 H_{k-1}^2 z_{k-1} + \\ & + \left[M_k + H_k^3 G_k^1(\ell_k) C_k^2 H_k^1 - H_k^4 G_{k+1}^1(0) C_{k+1}^1 H_k^2 \right] z_k - H_k^4 G_{k+1}^1(0) C_{k+1}^2 H_{k+1}^1 z_{k+1} = \\ & = \sum_{s=1}^{S_v} \left\{ H_k^4 \Phi_{s,k+1} F_{s,k+1} - H_k^3 \Phi_{sk} F_{sk} e^{i\theta_{sk} \ell_k} + H_k^3 G_k^1(\ell_k) \left[C_k^1 f_{sk} + C_k^2 f_{sk} e^{i\theta_{sk} \ell_k} \right] - \right. \\ & \quad \left. - H_k^4 G_{k+1}^1(0) \left[C_{k+1}^1 f_{s,k+1} + C_{k+1}^2 f_{s,k+1} e^{i\theta_{sk} \ell_k} \right] \right\}, \\ & \quad k = 1, 2 \dots n-1; \\ & H_n^3 G_n^1(\ell_n) C_n^1 H_{n-1}^2 z_{n-1} + \left[M_n + H_n^3 G_n^1(\ell_n) C_n^2 H_n^1 \right] z_n = \\ & = H_n^3 \sum_{s=1}^{S_v} \left\{ \Phi_{sn} F_{sn} e^{i\theta_{sn} \ell_n} - G_n^1(\ell_n) \left[C_n^1 f_{sn} + C_n^2 f_{sn} e^{i\theta_{sn} \ell_n} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Общее матричное уравнение для оболочечной конструкции, состоящей из набора отсеков и колец, имеет ленточную диагональную структуру расположения блок-матриц размером 4×4 и в сумме может иметь порядок нескольких сотен. В результате решения этой системы определяются искомые векторы перемещений колец z_q .

После определения векторов перемещений z_q на кольцах q из уравнения (23) можно построить АЧХ колебаний в заданных сечениях (кольцах) оболочечной конструкции, а также формы вынужденных колебаний для каждой оболочки и всей оболочечной конструкции в целом.

Форма колебаний для каждой оболочки определяется выражением [21]

$$\zeta_q(y) = G_q^1(y) \left[C_q^1 \left(H_{q-1}^2 Z_{q-1} \right) + C_q^2 \left(H_q^1 Z_q \right) \right] + W_p, \quad 0 \leq y \leq \ell_q.$$

Формулы (13), (14), (22), (23) и метод в целом по сути новые, не имеют аналогов. Метод точный, т.к. основан на точной теории. Никаких допущений, предположений

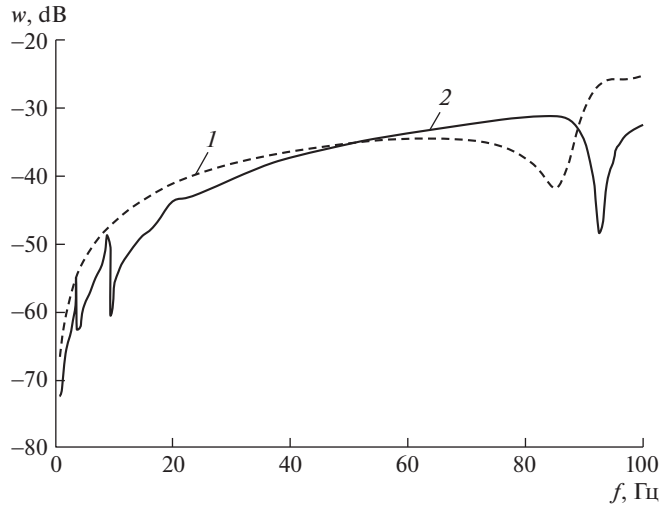


Рис. 1. АЧХ колебаний оболочки: 1 – $\psi = 80^\circ$; 2 – $\psi = 30^\circ$.

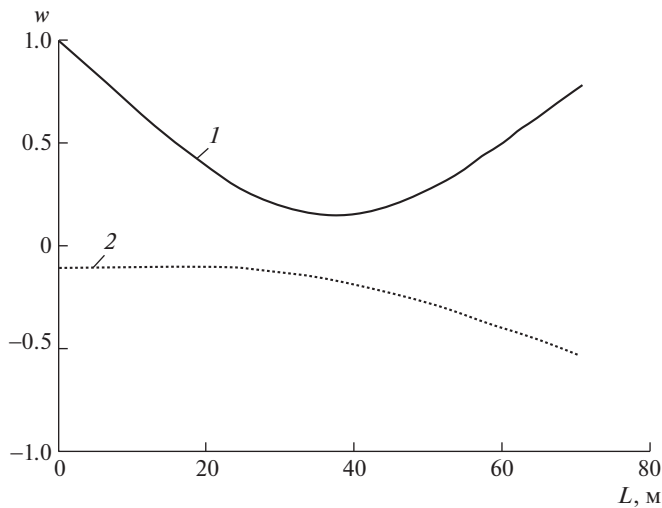


Рис. 2. Форма колебаний оболочки.

и условий, ограничивающих точность решения, принято не было. Разработаны алгоритмы и компьютерные программы на *Fortran*. По ним проведены расчеты.

На рис. 1 в качестве примера показана АЧХ изгибных колебаний цилиндрической оболочки при двух углах падения для $n = 1$. Параметры оболочки: $a = 4$ м, $L = 70$ м, $h = 0.04$ м. Шаг вычисления по частоте 0.25 Гц. По осям координат отложены радиальные ускорения w в dB и частота в Гц.

Сравнивая АЧХ на рис. 1 с аналогичными АЧХ, полученными при возбуждении колебаний оболочки дискретными силами [21] видим, что резонансные пики мало выра-

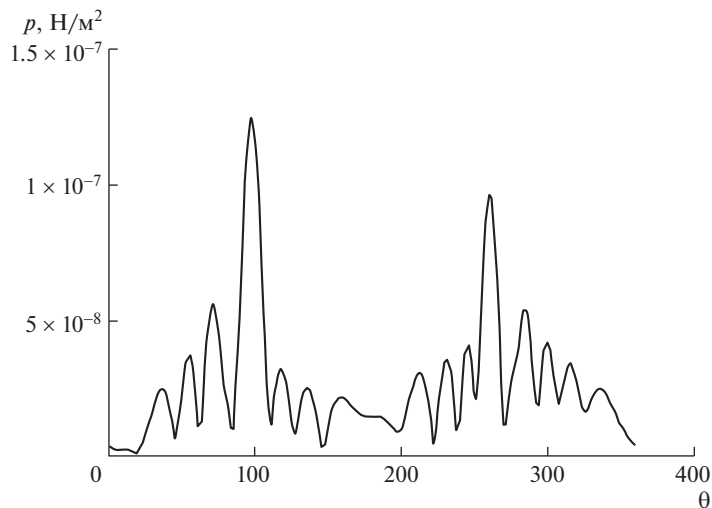


Рис. 3. Диаграмма направленности.

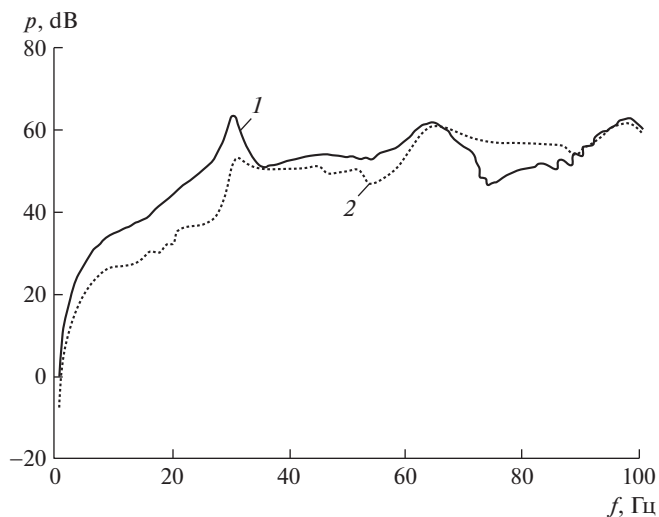


Рис. 4. АЧХ максимального звукового давления: 1 – $\psi = 30^\circ$; 2 – $\psi = 80^\circ$.

зительны, и при больших углах падения ψ вовсе пропадают, т.е. вид АЧХ зависит от угла падения.

На рис. 2 показана форма изгибных колебаний оболочки в области первого резонанса изгибных колебаний $f = 3.75$ Гц при $n = 1$, $\psi = 30^\circ$, сплошная линия – мнимая (Im) и пунктирная линия действительная (Re) – составляющие.

На рис. 3 показана диаграмма направленности вторичного поля при угле падения $\psi = 80^\circ$ на частоте $f = 100$ Гц. По осям отложены приведенное звуковое давление в долях 10^5 в размерности H/M^2 и угол наблюдения ψ в градусах. На рис. 4 показано изме-

нение максимального давления диаграммы направленности по частоте колебаний при двух углах падения по сумме восьми гармоник $n = 0-7$.

Таким образом, получено новое аналитическое решение задачи дифракции, позволяющее определить полное вторичное (дифрагированное) дальнее поле конечной упругой цилиндрической оболочки в жидкости.

Полученное решение является строго теоретически обоснованным (основанном на теории колебаний оболочек, волновом уравнении, формуле Кирхгофа), полученном без каких-либо допущений, ограничений и условий. Метод является теоретической основой практических расчетов при акустическом проектировании оболочечных конструкций в жидкости.

Новизна решения определяется следующим. При расчете колебаний и вторичного поля использован теоретически обоснованный точный импеданс излучения конечной цилиндрической оболочки в жидкости. Определены корни дисперсионного уравнения колебаний оболочки в жидкости. Определены АЧХ и формы вынужденных колебаний конечной упругой цилиндрической оболочки в жидкости, возбуждаемые падающим полем. Аналогов у предложенного метода нет. Экспериментальная проверка метода является самостоятельной задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морз Ф. Колебания и звук. М. -Л.: ГИТТЛ, 1946. 497 с.
2. Miguel C. Junger. The physical interpretation of the expression for an outgoing wave in cylindrical coordinates // Journ. Acoust. Soc. Amer. 1953. № 1. P. 40.
3. Лямшев Л.М. Дифракция звука на тонкой ограниченной упругой цилиндрической оболочке. Доклады АН СССР. 1957. Т. 115. № 2. С. 271.
4. Лямшев Л.М. Дифракция звука на безграничной тонкой упругой цилиндрической оболочке // Акустический журнал. 1958. Т. 4. № 2. С. 161.
5. Kennard E.H. A new approach in theory of shells // J. Appl. Mech. 1953. V. 20. P. 33.
6. Winner F.M. Sound diffraction by rigid spheres and circular cylinders // Journ. Acoust. Soc. Amer. 1947. V. 19. P. 444.
7. Хенл Х., Мауэ А., Вестифаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
8. Скучик Е. Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 542 с. (Skudrzyk E. The foundations of acoustics. Springer-Verlag. Wien, New York. 1971).
9. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 349 с.
10. Авербух А.З., Вейцман Р.И., Генкин М.Д. Колебания элементов конструкций в жидкости. М.: Наука, 1987. 158 с.
11. Музыченко В.В., Рыбак С.А. Импеданс излучения ограниченной цилиндрической оболочки // Акустический журнал. 1990. № 5. С. 898.
12. Музыченко В.В. Дифракция звука на упругих оболочках. М.: Наука, 1993. 336 с.
13. Ильменков С.Л., Клещев А.А., Клименков А.С., Легуша Ф.Ф., Майоров В.С., Чижов В.Ю., Чижов Г.В. Метод функций Грина в задаче дифракции звука на телах неаналитической формы // XXVII сессия РАО. СПб. 2014. С. 1.
14. Williams W.E. Diffraction by a cylinder of finite length. Math. Proceed. Camb. Phil. Soc. 1956. V. 52. P. 322.
15. Коротин П.И., Салин Б.М., Суворов А.С. Вопросы численного моделирования рассеяния акустических волн на телах сложной формы с использованием метода конечных элементов / Сб. трудов. XX сессии РАО. Т. 1. М.: ГЕОС, 2008. С. 169.
16. Косарев О.И. К расчету вторичного поля конечной твердой цилиндрической оболочки // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 3. С. 98.

17. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Гос. изд. физ.-мат. литер., 1961. С. 222.
18. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т. 3. Справочник / Под ред. И. А. Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. С. 423.
19. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. С. 260.
20. *Love A.E.H.* A Treatise on the mathematical theory of elasticity / Ляв. А. Математическая теория упругости. Пер. с англ. Изд. НКТП СССР. М.-Л. 1935. 674 с.
21. *Косарев О.И., Пузакина А.К., Нахатакян Д.Ф.* Вынужденные колебания конечной цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2020. № 2. С. 16.