
**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

УДК 539.214;539.374;621.9.011

**КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ СЛОЕ:
ТЕОРИЯ, АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**© 2022 г. В. А. Кадымов^{1,*}, Е. Н. Сосенушкин², Е. А. Яновская²¹*Российский технологический университет – МИРЭА, Москва, Россия*²*Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”, Москва, Россия***e-mail: vkadymov@yandex.ru*

Поступила в редакцию 11.05.2021 г.

После доработки 04.02.2022 г.

Принята к публикации 11.02.2022 г.

Высокий уровень механических характеристик изготавливаемых машиностроительных деталей, связанный с увеличением их эксплуатационного ресурса, закладывается на этапе формообразования обработкой металлов давлением. В статье рассматриваются краевые задачи современной теории пластичности применительно к тонкому слою, постановка которых основана на составлении статически определимой системы, включающей дифференциальные уравнения квазистатического равновесия в частных производных, условие полной пластичности и уравнения Коши для деформаций. Допущения и ограничения базируются на сформулированных А.А. Ильюшиным следствиях из известного решения Л. Прандтля. Задача дополнена несимметричными граничными условиями на торцевых поверхностях. С помощью варьирования актуальной постановкой задачи пластического течения тонкого слоя найдены решения, включая контактное давление и силовые параметры, различных обобщений задачи Л. Прандтля о свободном растекании полосы, занимающей линейную область и осаживаемой плоскими штампами, совершающими встречное движение.

Ключевые слова: вязкопластическое течение, тонкий слой, свободное растекание полосы, давление на контакте

DOI: 10.31857/S0235711922030063

Обзор состояния и актуальность проблемы. В технологии обработки давлением основной многих базовых операций являются задачи пластического течения в тонком слое материала, деформируемого валками (продольная прокатка, вальцовка) или штампами (объемная и листовая штамповка), описываемые пространственными математическими моделями с разнообразием параметров, определяющих реологию материала. На поверхностях контакта материала обработки с инструментом создаются давления, на порядок превышающие сдвиговые характеристики материала так, что в начальном приближении для описания свойств материала пластического слоя можно использовать модель гидродинамической жидкости [1–3]. Практически вдоль всей контактной поверхности наблюдается проскальзывание, при котором поверхности контакта совпадают с поверхностями скольжения, а удельные силы трения на них максимальны [4] и равны пределу текучести материала на сдвиг [5, 6]. Следует отметить другую особенность протекания указанных процессов, определяющую требования к точности конечной детали. Понятно, что большие контактные давления вызывают нормальные упругие перемещения рабочих поверхностей инструмента, соизмеримые с толщиной

текущего слоя [7, 8]. А значит, пренебрежение упругими деформациями поверхностей инструмента становится неоправданным. В высокоскоростных процессах обработки давлением существенную роль играют силы вязкости и инерции [9], значительно затрудняющие физическое моделирование, где важную роль играют процессы дополнительного разогрева деформируемого металла за счет теплового эффекта деформации, с одной стороны, и охлаждения тонкого слоя, связанного с интенсивным теплообменом со штамповым инструментом, с другой стороны, не исключена и диссипация механической энергии. В некоторых случаях не оправдано пренебрежение влияния давления на реологию материала [10], грубым оказывается предположение об объемной несжимаемости [11]. Все это усугубляется тем, что в рассматриваемых процессах нет определенности в граничных условиях и сами границы заранее неизвестны.

На основе анализа решения плоской задачи Л. Прандтля об осадке полосы А.А. Ильюшин [1] сформулировал базовые гипотезы кинематического характера и относительно сил трения на контакте, с помощью которых разработал весьма эффективную, двумерную модель течения в тонком пластическом слое. А.А. Ильюшин предложил постановку краевой задачи течения в тонком пластическом слое общего вида (модель “вязкой жидкости”), и упрощенную постановку (модель “идеальной жидкости”), описываемую нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка, в которой пренебрегают касательными напряжениями. В рамках упрощенной постановки исследована кинематика процессов течения пластического слоя и выведено эволюционное уравнение, определяющее свободную границу растекающейся области. В работе [14] получены другие формы представления эволюционного уравнения растекания, а также установлено, что полученное уравнение сводится к частному случаю нелинейного уравнения теплопроводности.

Однако не все процессы течения в тонком пластическом слое могут быть описаны в рамках упрощенной модели “идеальной жидкости”, что подтверждается экспериментальными исследованиями [12], поэтому для корректного описания задач, учитывающих наличие касательных напряжений, анизотропию в процессах течения [13], упругое деформирование инструмента [8] и другие факторы, необходимо использовать более общую модель “вязкой жидкости”. В рамках математической модели “вязкой жидкости” сформулирована краевая задача течения пластического слоя в области с подвижной границей, описываемая нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка в частных производных относительно трех неизвестных функций – контактного давления и двух компонент скорости течения [1, 2].

Краевая задача течения в тонком слое: математические постановки и варианты решения. Выпишем основные уравнения краевой задачи течения пластического слоя на плоскости [1, 2, 6, 12–14]

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta u - \frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta v - \frac{2\tau_s}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (3)$$

где p, u, v – контактное давление и компоненты скорости течения; $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$ – напряжения течения пластического материала в рассматриваемой области; $h = h(t)$ – заданный закон изменения толщины слоя; $\lambda(t) = \ln \frac{h_0}{h(t)}$ – степень деформации; t_0 – начальный момент времени.

На заранее неизвестной свободной границе $\Gamma_\sigma : F(x, y, t) = 0$ задаются следующие краевые условия:

два скалярных динамических (4)

$$\bar{\sigma}^{(n)} = \bar{\sigma}\bar{n} = (\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y; \sigma_{yy}n_y + \sigma_{xy}n_x) = \bar{0}, \quad (4)$$

и одно кинематическое (5)

$$v_n \equiv \bar{v} \cdot \bar{n} = -\frac{\partial F/\partial t}{|\text{grad } F|}, \quad (5)$$

из которого определяется сама граница Γ_σ . На поверхности контакта с инструментом $\Gamma_c : G(x, y, t) = 0$, как правило, известной, задаются следующие два условия: одно динамическое относительно касательного напряжения (6)

$$\left| \bar{\sigma}^{(n)} \cdot \bar{\tau} \right| = \left| \sigma_{xx}n_xn_y + \sigma_{xy}(n_y^2 - n_x^2) - \sigma_{yy}n_xn_y \right| = \mu\tau_s, \quad (0 \leq \mu \leq 1), \quad (6)$$

и одно кинематическое в виде условия непроницаемости (7)

$$v_n \equiv \bar{v} \cdot \bar{n} = -\frac{\partial G/\partial t}{|\text{grad } G|}, \quad (7)$$

где $\bar{\tau}$ и \bar{n} – единичные векторы касательной и нормали к границе Γ_c .

В частности, на неподвижной границе нормальная скорость равна нулю.

Пусть σ_s , p_0 , L_0 , h_0 , $\frac{dh(t_0)}{dt}$ – характерные значения предела текучести материала, контактного давления, линейного размера и толщины слоя, а также скорости сближения деформирующих инструментов. Относительную толщину пластического слоя $\varepsilon = \frac{h_0}{L_0} \ll 1$ примем за малый параметр. При оценке порядка слагаемых в уравнении

несплоимости (3) получаем, что $t_0 = \frac{L_0}{v_0}$; $v_0 = -\frac{dh(t_0)}{dt} \frac{1}{\varepsilon}$, а из квазистатических урав-

нений равновесия (1) и (2), что $p_0 = \frac{\sigma_s}{\varepsilon}$. Поэтому приходим к очевидным выводам, что

характерная величина скорости течения вдоль слоя намного больше скорости сближения инструментов и что характерная величина контактного давления намного превышает предел текучести материала слоя. Полагая, что толщина слоя h , в отличие от других линейных размеров (координат), при делении на $h(t_0)$ становится безразмерной, перепишем в безразмерном виде систему уравнений (8)–(10)

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \varepsilon \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} u - \frac{2}{\sqrt{3h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \varepsilon \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} v - \frac{2}{\sqrt{3h}} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0, \quad (10)$$

где безразмерные величины отмечены чертой сверху (заметим, что в уравнениях равновесия при слагаемых со старшими производными-лаплассианами появился малый параметр ε).

Обезразмерим условия на свободной границе $\Gamma_\sigma : F(x, y, t) = 0$

$$\left[-\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{f}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) \varepsilon \right] n_x + \left[\frac{1}{3} \frac{d\bar{f}}{d\lambda} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \varepsilon \right] n_y = 0; \quad (11)$$

$$\left[\frac{1}{3} \frac{d\bar{f}}{d\lambda} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \varepsilon \right] n_x + \left[-\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{f}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \varepsilon \right] n_y = 0; \quad (12)$$

$$\bar{v}_n = - \frac{\partial \bar{F} / \partial \bar{f}}{|\text{grad } \bar{F}|}, \quad (13)$$

и на границе контакта с инструментом Γ_c

$$\begin{aligned} & \left[-\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{f}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) \varepsilon \right] n_x n_y + \left[\frac{1}{3} \frac{d\bar{f}}{d\lambda} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \varepsilon \right] (n_y^2 - n_x^2) - \\ & - \left[-\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{f}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \varepsilon \right] n_x n_y = \pm \frac{\mu}{\sqrt{3}} \varepsilon; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\bar{v}_n = - \frac{\partial \bar{G} / \partial \bar{f}}{|\text{grad } \bar{G}|}. \quad (15)$$

Полученная система дифференциальных уравнений в частных производных (8)–(10) вместе с граничными условиями (11)–(15) составляют общую краевую задачу растекания слоя в модели “вязкой жидкости”.

В главном приближении ($\varepsilon = 0$) исходные уравнения упрощаются с понижением порядка системы (15)

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = - \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}; \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = - \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{dt} = 0.$$

Понятно, что количество граничных условий для упрощенной задачи в рамках “идеальной жидкости” уменьшается.

Краевая задача течения пластического слоя в новой постановке. Введем функцию тока $\psi = \psi(x, y)$, такую чтобы выполнялось условие несжимаемости (3)

$$u = \frac{d\lambda}{dt} \left(\psi'_y + \frac{x}{2} \right); \quad v = - \frac{d\lambda}{dt} \left(\psi'_x - \frac{y}{2} \right). \quad (16)$$

Компоненты скоростей (16) подставим в квазистатические уравнения равновесия и в результате получим систему из двух дифференциальных уравнений (17) и (18) относительно p и ψ

$$\frac{p'_x - \left(\frac{\sigma_s}{3} \right) \Delta \psi'_y}{p'_y + \left(\frac{\sigma_s}{3} \right) \Delta \psi'_x} = - \frac{2\tau_s}{h} \frac{\psi'_y + \frac{x}{2}}{\psi'_x - \frac{y}{2}}; \quad (17)$$

$$\left(p'_x - \left(\frac{\sigma_s}{3} \right) \Delta \psi'_y \right)^2 + \left(p'_y - \left(\frac{\sigma_s}{3} \right) \Delta \psi'_x \right)^2 = \frac{4\sigma_s^2}{3h^2}. \quad (18)$$

В качестве примера рассмотрим в натуральных величинах задачу течения пластического слоя, имеющего в начальный момент деформирования форму прямоугольника в плане (рис. 1).

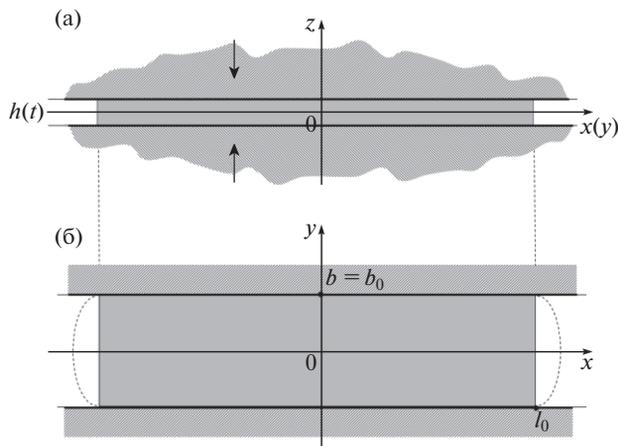


Рис. 1. Схема течения осаживаемого пластического слоя с ограничением по боковым поверхностям: (а) – в поперечном сечении (плоскость xz); (б) – в сечении (плоскость xy).

Используя симметрию пластической области, ограничимся рассмотрением элемента слоя, расположенного в первом квадранте выбранной системы координат. У неподвижной стенки инструмента при $(G(x, y) : y - b_0 = 0)$

$$v = 0 \Rightarrow \psi'_x - \frac{b_0}{2} = 0; \quad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\sqrt{3}\lambda'\mu \Rightarrow \psi''_{yy} - \psi''_{xx} = -\sqrt{3}\lambda'\mu. \quad (20)$$

Краевые условия

$$y = 0: v = 0 \Rightarrow \psi'_x = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \psi''_{yy} = 0; \quad (21)$$

$$x = 0: u = 0 \Rightarrow \psi'_y = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \psi''_{xx} = 0. \quad (22)$$

На неизвестной свободной границе $F(x, y, t) = 0$, в начальный момент имеющей параметры $x = l_0$ ($n_x = 1, n_y = 0$), краевые условия определяются как

$$\sigma_{xx} = 0 \Rightarrow -p + \sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s\psi''_{xy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \psi''_{yy} - \psi''_{xx} = 0. \quad (23)$$

Во избежание влияния краевых эффектов найдем аналитическое решение задачи вдали от оси $x = 0$ и свободной границы $x = 0.5l_0$, поскольку протяженность области течения в направлении x позволяет это сделать. Для рассматриваемого участка области течения $v(x, y) = 0$. После интегрирования уравнения несжимаемости (3) получаем

$$u(x, y) = \lambda'[x + g(y)],$$

где функцию $g(y)$ можно определить из других уравнений системы: (2) дает $p = p(x)$ и тогда из (1) следует (24)

$$p'(x) = \frac{\sigma_s}{3}g''(y) - \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}h}, \quad (24)$$

где в левой части стоит функция аргумента x , а в правой – функция u и параметра $h(t)$, другими словами, имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. В итоге получаем систему с произвольной постоянной (функцией времени) k

$$g''(y) = k = \text{const}; \quad p'(x) = \frac{\sigma_s k}{3} - \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}h}. \quad (25)$$

Интегрирование первого из уравнений (25) с учетом граничных условий (19), (20) дает

$$g(y) = c - \frac{\sqrt{3}\mu}{2b_0} y^2, \quad k = -\frac{\sqrt{3}\mu}{b_0}; \quad (26)$$

$$u(x, y) = \lambda' \left[x - \frac{\sqrt{3}\mu}{2b_0} y^2 + c \right], \quad (27)$$

где c – постоянная интегрирования.

Заметим, что первое слагаемое в правой части уравнения (27) соответствует скорости течения в модели “идеальной жидкости”, в рамках которой касательное напряжение на неподвижной границе, равно как и на других границах, отсутствует. Положим, что сечение $x = x_f$ представляет собой условную свободную границу ($x_f h = x_0 h_0$). Тогда из интегрального условия сохранения объема несжимаемого материала

$$-x_f(t) \frac{dh}{dt} b_0 = \int_0^{b_0} h u(x_f, y) dy,$$

определяем входящую в решение произвольную постоянную $c = \frac{\sqrt{3}}{6} \mu b_0$, что дает возможность получить окончательную формулу для скорости течения

$$u(x, y) = \lambda' \left[x + \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (\mu b_0^2 - 3y^2) \right]. \quad (28)$$

Сопоставлением найденной скорости (28) и граничного условия (22) при значении $x = 0$ убеждаемся, что оно выполняется в интегральном виде

$$\int_0^{b_0} u(0, y) dy = \frac{\lambda' \sqrt{3}}{6b_0} \int_0^{b_0} (b_0^2 - 3y^2) dy = 0.$$

Интегрирование второго уравнения системы (25) дает (29)

$$p(x) = p_0 - \frac{\sigma_s x}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0} \right), \quad (29)$$

с постоянной интегрирования p_0 , не зависящей от координаты y . Полагая, что на свободной границе нормальное напряжение равно нулю $\sigma_{xx} = -p + \frac{4\sigma_s}{3} = 0$, находим

$p_0(t) = \frac{2\sigma_s x_f}{\sqrt{3}h} + \left(\frac{x_f}{\sqrt{3}b_0} + \frac{4}{3} \right) \sigma_s$. При достаточно большом x_f , третьим слагаемым в пра-

вой части можно пренебречь, тогда $p_0(t) = \frac{\sigma_s x_f}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0} \right)$, и искомое давление будет иметь более простой вид (30)

$$p \approx \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0} \right) (x_f - x). \quad (30)$$

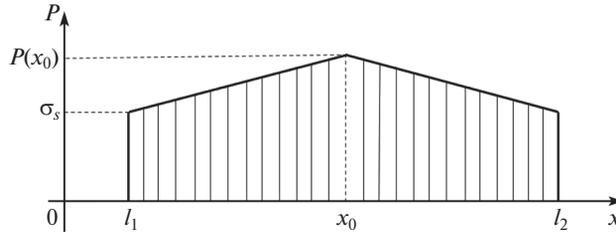


Рис. 2. Эпюра распределения контактного давления в полосе.

В завершение выпишем функцию тока

$$\psi'_x = \frac{y}{2}; \quad \psi'_y = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (\mu b_0^2 - 3y^2) \Rightarrow \psi(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (\mu b_0^2 y - 3y^3) + c_1.$$

Таким образом, в рамках общей модели “вязкой жидкости” получено приближенное аналитическое решение. На границе $x = 0$, а также на свободной границе $x = x_f(t)$ оно удовлетворяет краевым условиям в интегральной форме. Следовательно, согласно принципу Сен-Венана, решение справедливо в центральной части области течения. Характер течения в слое не является одномерным, поэтому прямые линии ($x = \text{const}$) с течением временем искривляются, причем наблюдается заметное отставание продольного перемещения частиц вблизи неподвижной границы. Этот факт подтверждается результатами проведенных экспериментов [13]. Полученные закономерности невозможно описать с помощью модели “идеальной жидкости”, в которой не учитываются касательные напряжения.

Различные обобщения задачи Л. Прандтля и их решения. Тонкая полоса, занимающая область $S(x, y) \{ (x, y) | l_1(t) < x < l_2(t); 0 \leq y \leq h(t) \}$ свободно растекается под действием деформирующего инструмента, при этом дифференциальные уравнения квазистатического равновесия имеют вид [1]

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{|u|}; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (31)$$

где $h = h(t)$ – известный закон изменения толщины осаживаемой пластической полосы; $\lambda(t) = \ln \frac{h_0}{h(t)} \geq 0$ – степень деформации по А.А. Ильюшину (аналог меры накопленной в частице деформации); $u = u(x, t)$; $p = p(x, t)$ – соответственно скорость течения вдоль слоя и контактное давление в полосе.

Краевые условия на свободных границах

$$x = l_1; \quad p = \sigma_s; \quad x = l_2; \quad p = \sigma_s. \quad (32)$$

Существует неизвестная линия ветвления течения $x = x_0 \in (l_1, l_2)$, на которой $u(x_0, t) = 0$. Интегрируя первое уравнение (31) с учетом краевых условий (32), определяем контактное давление в полосе (рис. 2)

$$p(x, t) = \begin{cases} \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h} (l_2 - x), & x \in (x_0, l_2), \\ \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h} (x - l_1), & x \in (l_1, x_0). \end{cases} \quad (33)$$

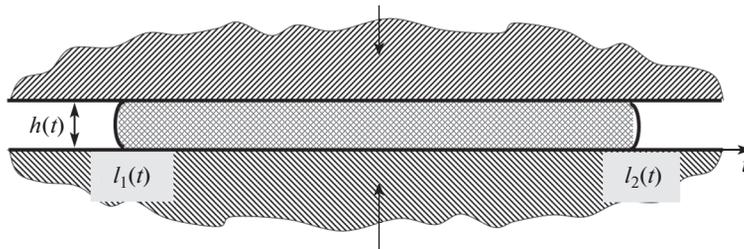


Рис. 3. Свободное растекание материала полосы с подвижными концами.

Интегрируя уравнение несжимаемости из (31) с учетом условия на линии ветвления, находим

$$u(x, t) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} (x - x_0) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \left(x - \frac{l_1 + l_2}{2} \right), \quad (34)$$

при этом линия ветвления течения $x = x_0(t)$ определяется из условия непрерывности контактного давления. Удельная сила для осуществления пластической осадки полосы равна площади эпюры (рис. 2)

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_{l_1}^{l_2} p(x, t) dx = \int_{l_1}^{x_0} \left[\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h} (x - l_1) \right] dx + \int_{x_0}^{l_2} \left[\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h} (l_2 - x) \right] dx = \\ &= \left[\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h} \left(\frac{x^2}{2} - l_1 x \right) \right]_{l_1}^{x_0} + \left[\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h} \left(l_2 x - \frac{x^2}{2} \right) \right]_{x_0}^{l_2} = \sigma_s (l_2 - l_1) + \frac{2\tau_s}{h} \frac{(l_2 - l_1)^2}{4}. \end{aligned} \quad (35)$$

Остановимся отдельно на различных обобщениях задачи о свободном растекании полосы.

1. Материал полосы свободно растекается в обе стороны так, что область контакта инструмента с пластической полосой, расширяясь в обе стороны, образует отрезок $[l_1(t), l_2(t)]$ с подвижными концами (рис. 3).

В этом случае положения свободно перемещающихся концов полосы находятся из решения задачи Коши, описанной системой линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dl_2}{dt} &= u(l_2, t) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \left(\frac{l_2 - l_1}{2} \right), \\ \frac{dl_1}{dt} &= u(l_1, t) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \left(\frac{l_1 - l_2}{2} \right) = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \left(\frac{l_2 - l_1}{2} \right), \\ t = t_0: & l_1(t) = l_{10}, \quad l_2(t) = l_{20}. \end{aligned} \quad (36)$$

Ниже выписано решение задачи (36)

$$l_2(t) = \frac{1}{2} \left[(l_{20} + l_{10}) + \frac{h_0}{h(t)} (l_{20} - l_{10}) \right]; \quad l_1(t) = \frac{1}{2} \left[(l_{20} + l_{10}) - \frac{h_0}{h(t)} (l_{20} - l_{10}) \right]. \quad (37)$$

Осаживаемая пластическая полоса, занимает область контакта с неподвижным левым концом так, что она может свободно перемещаться в противоположную от зафиксированного конца (правую) сторону, и представляется отрезком $[l_{10}, l_2(t)]$ с одним подвижным концом (рис. 4). При этом допускаем, что пластический материал течет по всей области контакта.

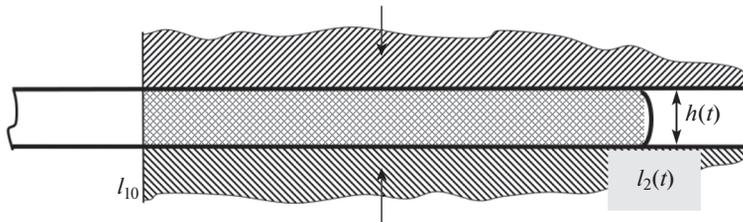


Рис. 4. Пластическая осадка полосы с подвижным правым концом.

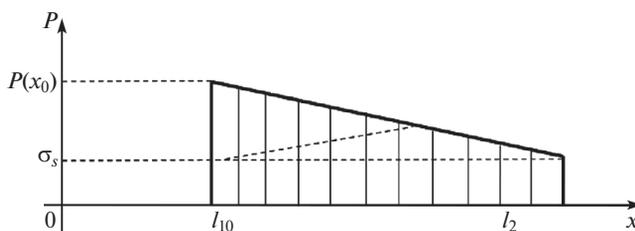


Рис. 5. Распределение контактного давления в задаче о растекании пластической полосы с зашлепленным левым концом.

В этом случае выписанное выше решение остается в силе, а изменяется лишь дифференциальное уравнение для определения $l_2(t)$

$$l_1(t) = l_{10}; \quad \frac{dl_2}{dt} = u(l_2, t) - \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \left(\frac{l_2 - l_{10}}{2} \right), \quad (38)$$

$$t = t_0; \quad l_2(t) = l_{20},$$

решение которого, имеет вид

$$l_1(t) = l_{10} + (l_{20} - l_{10}) \sqrt{\frac{h_0}{h(t)}}. \quad (39)$$

2. Левый неподвижный конец области контакта зашлеплен так, что пластическое течение в области $[l_1(t), l_2(t)]$ происходит в одном направлении, причем $x_0 \equiv l_{10}$. В этом случае решение краевой задачи

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h}; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{d\bar{h}}{d\bar{t}} = 0,$$

при граничных условиях $x = l_1(t); u(l_1(t), t) = 0; x = l_2(t); p = \sigma$ имеет вид

$$p(x, t) = \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(l_2 - x); \quad u(x, t) = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}(x - l_1); \quad l_2(t) = l_{10} + \frac{h_0}{h}(l_{20} - l_{10}). \quad (40)$$

Величина удельной силы для осуществления пластической осадки в этом случае, безусловно, зависит от условия на левом конце (рис. 5), и в данном случае принимает вид

$$p(t) \equiv p_3(t) = \int_{l_{10}}^{l_2} \left[\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(l_2 - x) \right] dx = \sigma_s(l_2 - l_{10}) + \frac{2\tau_s(l_2 - l_{10})^2}{2}. \quad (41)$$

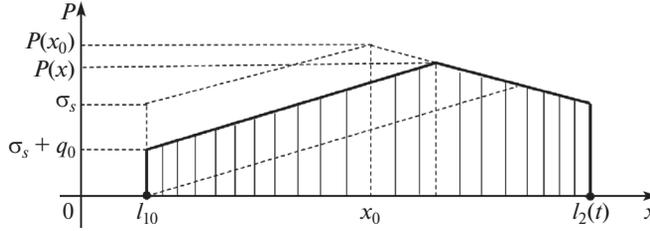


Рис. 6. Эпюра контактного давления в пластической полосе, на левом конце которой приложено растягивающее напряжение $\sigma_{xx} = -q_0 > 0$.

3. К левому неподвижному концу области контакта приложено растягивающее напряжение: $x = l_{10}$; $\sigma_{xx} = -q_0 > 0$, такое, что $-\sigma_s < q_0 < 0$. Согласно условию полной пластичности [1], для контактного давления на левом конце $p = q_0 + \sigma_s$ справедливо условие $0 < p < \sigma_s$.

Выделим отдельно предельный случай $q_0 = -\sigma_s$, который моделирует процесс пластического растяжения тонкой полосы с одновременной пластической осадкой “зажатых” концевых ее частей. Решение краевой задачи в этом случае определяется системой (42)

$$p(x, t) = \begin{cases} \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(l_2 - x), & x \in (x_0, l_2); \\ \sigma_s + q_0 + \frac{2\tau_s}{h}(x - l_{10}), & x \in (l_{10}, x_0); \end{cases} \quad u(x, t) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt}(x - x_0), \quad (42)$$

где $x_0 = \frac{l_{10} + l_2}{2} - \frac{q_0 \cdot h}{4\tau_s} \geq \frac{l_{10} + l_2}{2}$.

Величина удельной силы для осуществления пластической осадки в этом случае равна площади заштрихованной эпюры, изображенной на рис. 6.

При этом давление определяется уравнением (43)

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_{l_{10}}^{l_2} p(x, t) dx = \left[(\sigma_s + q_0)x + \frac{2\tau_s}{h} \left(\frac{x^2}{2} - l_{10}x \right) \right]_{l_{10}}^{x_0} + \left[\sigma_s x + \frac{2\tau_s}{h} \left(l_2 x - \frac{x^2}{2} \right) \right]_{x_0}^{l_2} = \\ &= \sigma_s (l_2 - l_{10}) + \frac{2\tau_s (l_2 - l_{10})^2}{h} + q_0 \left(\frac{l_2 + l_{10}}{2} - \frac{q_0}{2\tau_s} h \right) \leq P_1(t), \end{aligned} \quad (43)$$

где $p_1(t) = \sigma_s (l_2 - l_{10}) + \frac{2\tau_s (l_2 - l_{10})^2}{h}$ — удельная сила для осуществления пластической осадки полосы со свободными концами.

Заключение и выводы. В рамках общей математической модели “вязкой жидкости” получено приближенное аналитическое решение. Приведенные в статье различные обобщения классической задачи Л. Прандтля представляют интерес не только для анализа сжатия тонкого слоя, но и при исследовании задач о правке плоских заготовок с наложением одноосного растяжения за пределом упругости, выравнивание которых другими способами не дает удовлетворительных результатов, а также при решении плоских задач гибки с растяжением, крупногабаритных облицовочных деталей.

Отметим, что решения универсальны, подтверждены результатами экспериментов, и их можно распространить на пространственные контактные задачи течения в тонком пластическом слое между сближающимися поверхностями инструмента.

Дальнейшие исследования будут направлены на учет упругой деформации инструмента; объемной сжимаемости обрабатываемого материала; использование многослойных материалов с разными пластическими характеристиками слоев; использование штамповых инструментов с рельефными поверхностями контакта; моделирование сложного нагружения и эффекта сверхпластичности, используемых в технологических процессах.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность. М.: Физматлит, 2004. 480 с.
2. *Белов Н.А., Кадымов В.А.* О краевой задаче течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 46.
3. *Георгиевский Д.В.* Одна оценка эволюции возмущений в нестационарных плоскопараллельных течениях Сен-Венана // Прикладная математика и математическая физика. 2015. Т. 1. № 1. С. 147.
4. *Мамаев В.Б., Первов М.Л.* Учет сил контактного трения при объемной штамповке // Вестник машиностроения. 2016. № 3. С. 74.
5. *Георгиевский Д.В.* Задача Прандтля для слабонеоднородного по пределу текучести пластического слоя // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 1. С. 47.
6. *Кийко И.А.* Теория пластического течения. М.: МГУ, 1978. 75 с.
7. *Мартынов А.А.* Осадка образцов в поле сверхвысокого давления. Обзор // Заготовительные производства в машиностроении. 2016. № 1. С. 44.
8. *Воронцов А.Л.* Учет упругих деформаций инструмента для повышения точности теории обработки давлением // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка металлов давлением. 2014. № 9. С. 3.
9. *Воробьев В.М.* Построение теоретических решеток каналов многоразъемных штампов и расчет действующих в них сил // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка металлов давлением. 2011. № 1. С. 25.
10. *Грешнов В.М.* Физико-математическая теория больших необратимых деформаций. М.: Физматлит, 2018. 232 с.
11. *Кийко И.А.* Обобщение задачи Л. Прандтля о сжатии полосы на случай сжимаемого материала // Вестник Московского университета. 2002. № 4. С. 47.
12. *Белов Н.А., Кадымов В.А., Сосенушкин Е.Н.* Эксперимент и теория растекания тонкого пластического слоя в штампе прямоугольного сечения / Препринт № 1100. Институт Проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. 2015. 23 с.
13. *Кийко И.А.* Анизотропия в процессах течения тонкого пластического слоя // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 2. С. 344.
14. *Kadymov V.A., Sosenushkin E.N., Yanovskaya E.A.* Exact Solutions to an Evolution Equation of Plastic Layer Flow on a Plane // Moscow University Mechanics Bulletin. Allerton Press. Inc. 2016. V. 71. № 3. P. 69.