

---

---

**МЕХАНИКА МАШИН**

---

---

УДК 531

**АВТОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ЗАПАЗДЫВАНИЯХ  
В СИЛАХ УПРУГОСТИ И ТРЕНИЯ**

© 2021 г. А. А. Алифов

*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия**e-mail: alishir@mail.ru*

Поступила в редакцию 21.05.2020 г.

После доработки 16.11.2020 г.

Принята к публикации 18.12.2020 г.

Рассмотрены смешанные параметрические колебания и автоколебания в системе с неидеальным источником энергии при запаздываниях в силах упругости и трения. Для решения нелинейных уравнений использован метод прямой линеаризации. Выведены условия устойчивости стационарных колебаний. Проведены расчеты и оказалось, что запаздывание приводит к некоторым интересным эффектам. Из-за запаздывания кривые могут вести себя так, как при наличии нелинейной силы упругости, а также при определенных значениях запаздывания верхняя (устойчивая при отсутствии запаздывания) и нижняя ветви амплитудных кривых могут оказаться неустойчивыми.

*Ключевые слова:* смешанные колебания, параметрические колебания, автоколебания, источник энергии, запаздывание, метод, прямая линеаризация

**DOI:** 10.31857/S0235711921020024

Во многих современных технических устройствах и технологических процессах при определенных условиях могут возникать различные виды смешанных колебаний (“смесь” или взаимодействие двух и более типов колебаний). Функционирование этих систем поддерживается источниками энергии, имеющими ограниченную мощность. Вопросы энергии и ее потребления связаны не только с поддержанием работы различных технических систем. Они имеют прямое отношение к проблемам экологии, которые остро стоят в настоящее время перед человечеством. Уменьшение потребления энергии даже на несколько процентов может внести немалый вклад в экологическую обстановку на планете. В этом контексте выходит на переднюю позицию с большей значимостью, чем ранее, фундаментальная теория колебательных систем с источниками энергии ограниченной мощности, созданная В.О. Кононенко [1, 2]. Он систематически изучил и обосновал эффект Зоммерфельда, обнаруженный в ходе экспериментов в 1902 г. В связи с экологическими проблемами приведем из [3] следующее: “Деятельность цивилизации привела к тому, что Земля (геосфера, атмосфера, аквасфера, биосфера) пропитана огромным количеством отходов (промышленными, бытовыми, химическими). Однако нельзя забывать, что *любым многоэлементным образованиям материи*, в том числе экологии Земли, свойственен **предел**, при достижении которого наступают необратимые изменения [4]. Проблемы экологии (атмосферные, парниковый эффект, разрушение озонового слоя, водные, биологические, глобальное потепление) затрагивают всю природу на Земле и приняли глобальные масштабы. Это со временем может привести к катастрофическим последствиям, как

для человека, так и для всего остального живого мира...”. Грамотное использование теории колебательных систем с источниками энергии ограниченной мощности и разработка на ее основе математических моделей различных систем, позволяет рассчитать и подобрать на стадии проектирования машин, механизмов и т.д. источник энергии так, чтобы обеспечить их работу минимальным потреблением энергоресурсов и уровнем нежелательных колебательных процессов [3].

В устройствах различного рода широко распространены запаздывание, которое [5] в механических системах обуславливается внутренним трением в материалах, несовершенством их упругих свойств и др. Как отмечено в работе [6], “звенья с чистым запаздыванием часто встречаются в различных технологических процессах, когда материал перемещается из одной точки в другую с помощью ленточных транспортеров; в системах регулирования толщины листа при прокатке; в системах магнитной записи и воспроизведения и т. д.”. Под действием запаздывания возникают различные колебательные процессы (полезные/вредные). Имеется достаточно большое число работ [7–12], посвященных изучению колебаний в различных системах с запаздыванием. Однако чаще взаимодействие колебательной системы и источника энергии не учитывается.

Одной из основных проблем нелинейной динамики систем является большая затрата труда для анализа осцилляторных сетей, играющая важную роль в физике, электронике, нейронных сетях, химии и др. [13–16]. Аналитическое исследование нелинейных колебательных систем проводится с помощью трудоемких приближенных методов нелинейной механики [7, 17–21]. От них существенно отличаются методы прямой линеаризации, обладающие на несколько порядков меньшей трудоемкостью и достаточно простые для применения [22–25]. Эти особенности метода весьма существенны при расчете технических устройств на стадии их проектирования. С применением методов прямой линеаризации рассмотрим автоколебательную систему с неидеальным источником энергии, параметрическим возбуждением, запаздыванием в силах упругости и трения. Целью статьи является изучение на основе методов прямой линеаризации совместного влияния различных запаздываний на динамику автопараметрических колебаний при неидеальном источнике энергии.

1. В основу положим широко используемую динамическую модель автоколебательной системы [1, 2, 21, 26–28]. Нелинейные дифференциальные уравнения движения системы с учетом параметрического возбуждения представим в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k_0\dot{x} + c_0x &= T(U) - bx \cos vt, \\ I\ddot{\phi} &= M(\phi) - r_0T(U), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k_0 = \text{const}$  – коэффициент демпфирования;  $c_0 = \text{const}$ ;  $bx \cos vt$  – параметрическое возбуждение;  $b = \text{const}$ ;  $T(U)$  – вызывающая автоколебания нелинейная сила трения;  $U = r_0\dot{\phi} - \dot{x}$ ;  $r_0 = \text{const}$  – радиус точки приложения силы трения  $T(U)$ ;  $\dot{\phi}$  – скорость вращения двигателя;  $I$  – суммарный момент инерции вращающихся частей;  $M(\phi)$  – разность вращающего момента источника энергии и момента сил сопротивления вращению.

Характеристика силы трения на практике широко распространена в форме

$$T(U) = R(\text{sgn } U - \alpha_1 U + \alpha_3 U^3), \quad (2)$$

где  $R$  – нормальная сила реакции;  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  – положительные постоянные;  $\text{sgn } U = 1$  при  $U > 0$  и  $\text{sgn } U = -1$  при  $U < 0$ .

Характеристика (2) наблюдалась также в условиях космического эксперимента [29]. Для большей общности представим характеристику трения в форме

$$T(U) = R[\text{sgn } U + f(\dot{x})], \quad f(\dot{x}) = \sum_i \alpha_i U^i = \sum_{n=0}^5 \delta_n \dot{x}^n,$$

$$\begin{aligned}\delta_0 &= \alpha_1 V + \alpha_2 V^2 + \alpha_3 V^3 + \alpha_4 V^4 + \alpha_5 V^5, \\ \delta_1 &= -(\alpha_1 + 2\alpha_2 V + 3\alpha_3 V^2 + 4\alpha_4 V^3 + 5\alpha_5 V^4), \\ \delta_2 &= \alpha_2 + 3\alpha_3 V + 6\alpha_4 V^2 + 10\alpha_5 V^3, \quad \delta_3 = -(\alpha_3 + 4\alpha_4 V + 10\alpha_5 V^2), \\ \delta_4 &= \alpha_4 + 5\alpha_5 V, \quad \delta_5 = -\alpha_5.\end{aligned}$$

Нелинейную функцию  $f(\dot{x})$ , используя метод прямой линеаризации [22, 23], можно заменить линейной функцией

$$f_*(\dot{x}) = B_f + k_f \dot{x}, \quad (3)$$

где  $B_f$ ,  $k_f$  являются коэффициентами линеаризации, которые определяются выражениями

$$\begin{aligned}B_f &= \sum_n N_n \alpha_n V^n, \quad n = 0, 2, 4 \quad (n - \text{четное}), \\ k_f &= \sum_n \alpha_n \bar{N}_n V^{n-1}, \quad n = 1, 3, 5 \quad (n - \text{нечетное}), \\ N_n &= (2r + 1)/(2r + 1 + n), \quad \bar{N}_n = (2r + 3)/(2r + 2 + n), \quad v = \max|\dot{x}|.\end{aligned}$$

Отметим, что в выражениях  $N_n$  и  $\bar{N}_n$  символ  $r$  является *параметром точности линеаризации*. Независимо от его величины имеют место  $N_n = 1$  для  $n = 0$  и  $\bar{N}_n = 1$  для  $n = 1$ . Интервал выбора этого параметра не ограничен [22, 23], но достаточен выбор в пределах (0–2).

Представим силу трения  $T(U)$  зависящей от запаздывания  $\Delta$ , т.е. в форме  $T(U_\Delta)$ , в которой  $U_\Delta = r_0 \dot{\phi} - \dot{x}_\Delta$ ,  $\dot{x}_\Delta = \dot{x}(t - \Delta)$ . Примем, что сила упругости также зависит от запаздывания, учитываемого посредством слагаемого  $c_1 x_\tau$ ,  $x_\tau = x(t - \tau)$ ,  $\tau$  – временной фактор запаздывания,  $c_1 = \text{const}$ . Тогда уравнения (1) в связи с (3) примут вид

$$\begin{aligned}m\ddot{x} + k_0 \dot{x} + c_0 x &= R(\text{sgn } U_\Delta + B_f + k_f \dot{x}_\Delta) - c_1 x_\tau - bx \cos vt, \\ I\ddot{\phi} &= M(\dot{\phi}) - r_0 R(\text{sgn } U_\Delta + B_f + k_f \dot{x}_\Delta).\end{aligned} \quad (4)$$

**2.** Решение (4) можно выполнить с помощью *метода замены переменных с усреднением* [22] и описанной в [25] процедуры для колебательных систем с ограниченным возбуждением. Метод позволяет рассмотреть нестационарные и стационарные процессы. В этом методе для нелинейного уравнения с линеаризованными нелинейными функциями на основе формы решения

$$x = a \cos \psi, \quad \dot{x} = -v \sin \psi, \quad \psi = pt + \xi, \quad (5)$$

выведены *стандартной формы уравнения* для определения нестационарных значений  $v$  и  $\xi$ .

Используя эту стандартную форму и процедуру с учетом  $v = ap$ ,  $p = v/2$ ,  $x_\tau = a \cos(\psi - p\tau)$ ,  $\dot{x}_\Delta = -v \sin(\psi - p\Delta)$ , получим из (4) следующие уравнения для нестационарных значений амплитуды  $a$ , фазы  $\xi$  и скорости  $u$ :

а)  $u \geq ap$

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -\frac{a(k_0 - T_0 k_f \cos p\Delta)}{2m} + \frac{c_1 a}{2pm} \sin p\tau + \frac{ba}{4pm} \sin 2\xi, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\omega_0^2 - p^2}{2p} + \frac{c_1}{2pm} \cos p\tau - \frac{T_0 k_f}{2m} \sin p\Delta + \frac{b}{4pm} \cos 2\xi,\end{aligned} \quad (6a)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{r_0}{I} \left[ M\left(\frac{u}{r}\right) - r_0 T_0 (1 + B_f) \right];$$

б)  $u < ap$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{a}{2m} \left[ (k_0 - T_0 k_f \cos p\Delta) + \frac{4T_0}{\pi a^2 p^2} \sqrt{a^2 p^2 - u^2} \right] + \frac{c_1 a}{2pm} \sin p\tau + \frac{ba}{4pm} \sin 2\xi, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\omega_0^2 - p^2}{2p} + \frac{c_1}{2pm} \cos p\tau - \frac{T_0 k_f}{2m} \sin p\Delta + \frac{b}{4pm} \cos 2\xi, \\ \frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{I} \left[ M\left(\frac{u}{r}\right) - r_0 T_0 (1 + B_f) - \frac{r_0 T_0}{\pi} (3\pi - 2\Psi_*) \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

Здесь  $u = r_0 \Omega$ ,  $\Psi_* = 2\pi - \arcsin(u/ap)$ ,  $\omega_0^2 = c_0/m$ . Отметим, что при выводе (66) использован прием, описанный в [26].

Из (6а) при  $\dot{a} = 0$ ,  $\dot{\xi} = 0$ ,  $\dot{u} = 0$  следуют уравнения для стационарных движений в случае  $u \geq ap$ , откуда имеем соотношения для определения амплитуды и фазы

$$A^2 + E^2 = 0.25b^2, \quad \operatorname{tg} 2\xi = -A/E, \quad (7)$$

где  $A = p(k_0 - T_0 k_f \cos p\Delta) - c_1 \sin p\tau$ ,  $E = m(\omega_0^2 - p^2) - pT_0 k_f \sin p\Delta + c_1 \cos p\tau$ .

В случае  $u < ap$  для амплитуды имеем приближенную формулу  $ap \approx u$ . Заметим, что в выражениях  $\alpha_0, \dots, \alpha_5$ , которые входят в  $k_f$ , в результате усреднения осуществляется замена  $V = r_0 \dot{\phi}$  на  $u = r_0 \Omega$ .

Из условия  $\dot{u} = 0$  получим уравнение для определения стационарных значений скорости

$$M(u/r_0) - S(u) = 0, \quad (8)$$

где

$$\text{а) } u \geq ap \quad S(u) = r_0 R(1 + B_f),$$

$$\text{б) } u < ap \quad S(u) = r_0 R[(1 - B_f) + \pi^{-1}(3\pi - 2\Psi_*)].$$

С учетом приближенного равенства  $ap \approx u$  для амплитуды выражение нагрузки  $S(u)$  на источник энергии упрощается в случае  $u < ap$ . Стационарные значения скорости  $u$  можно определить точкой пересечения графиков  $M(u/r_0)$  и  $S(u)$ .

**3.** Для вывода условий устойчивости стационарного движения составляем уравнения в вариациях для (6) и пользуемся критериями Рауса–Гурвица. В результате имеем условия устойчивости

$$D_1 > 0, \quad D_3 > 0, \quad D_1 D_2 - D_3 > 0, \quad (9)$$

где  $D_1 = -(b_{11} + b_{22} + b_{33})$ ,  $D_2 = b_{11} b_{33} + b_{11} b_{22} + b_{22} b_{33} - b_{23} b_{32} - b_{12} b_{21} - b_{13} b_{31}$ ,  $D_3 = b_{11} b_{23} b_{32} + b_{12} b_{21} b_{33} - b_{11} b_{22} b_{33} - b_{12} b_{23} b_{31} - b_{13} b_{21} b_{32}$ .

Для случая  $u \geq ap$  имеем

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{r_0}{J} \left( Q - r_0 R \frac{\partial B_f}{\partial u} \right), \quad b_{12} = -\frac{r_0^2 R}{J} \frac{\partial B_f}{\partial a}, \quad b_{13} = 0, \\ b_{21} &= \frac{aR}{2m} \frac{\partial k_f}{\partial u} \cos p\Delta, \quad b_{22} = -\frac{1}{2m} \left( k_0 - Rk_f \cos p\Delta - aR \frac{\partial k_f}{\partial a} \cos p\Delta \right), \end{aligned}$$

$$b_{23} = 0, \quad b_{31} = \frac{R}{2m} \frac{\partial k_f}{\partial u} \sin p\Delta, \quad b_{32} = \frac{R}{2m} \frac{\partial k_f}{\partial a} \sin p\Delta, \quad b_{33} = 0,$$

$$\text{где } Q = \frac{d}{du} M\left(\frac{u}{r}\right).$$

В случае скоростей  $u < ap$  коэффициенты  $b_{13}$ ,  $b_{23}$ ,  $b_{31}$ ,  $b_{33}$  остаются такими же, изменяются (с добавлением одного слагаемого, содержащего  $\sqrt{a^2 p^2 - u^2}$ ) следующие:

$$b_{11} = \frac{r_0}{J} \left[ Q - r_0 R \frac{\partial B_f}{\partial u} - \frac{2r_0 R}{\pi \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right], \quad b_{12} = -\frac{r_0^2 R}{J} \left[ \frac{\partial B_f}{\partial a} + \frac{2u}{\pi a \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right],$$

$$b_{21} = \frac{a}{2m} \left[ R \frac{\partial k_f}{\partial u} \cos p\Delta + \frac{4uR}{\pi a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right],$$

$$b_{22} = -\frac{1}{2m} \left[ k_0 - Rk_f \cos p\Delta - aR \frac{\partial k_f}{\partial a} \cos p\Delta + \frac{4Ru^2}{\pi a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right].$$

С учетом  $\dot{\phi} = \Omega$ ,  $u = r\Omega$  при усреднении, имеем

$$\frac{\partial B_f}{\partial u} = \frac{\partial \delta_0}{\partial u} + N_2(ap)^2 \frac{\partial \delta_2}{\partial u} + N_4(ap)^4 \frac{\partial \delta_4}{\partial u},$$

$$\frac{\partial k_f}{\partial u} = \bar{N}_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial u} + \bar{N}_3(ap)^2 \frac{\partial \delta_3}{\partial u} + \bar{N}_5(ap)^4 \frac{\partial \delta_5}{\partial u},$$

$$\frac{\partial B_f}{\partial a} = 2ap^2(N_2\delta_2 + 2N_4\delta_4a^2p^2), \quad \frac{\partial k_f}{\partial a} = 2ap^2(\bar{N}_3\delta_3 + 2\bar{N}_5\delta_5a^2p^2),$$

$$\delta_0 = \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4 + \alpha_5 u^5, \quad \delta_1 = -(\alpha_1 + 2\alpha_2 u + 3\alpha_3 u^2 + 4\alpha_4 u^3 + 5\alpha_5 u^4),$$

$$\delta_2 = \alpha_2 + 3\alpha_3 u + 6\alpha_4 u^2 + 10\alpha_5 u^3, \quad \delta_3 = -(\alpha_3 + 4\alpha_4 u + 10\alpha_5 u^2),$$

$$\delta_4 = \alpha_4 + 5\alpha_5 u, \quad \delta_5 = -\alpha_5,$$

$$\frac{\partial \delta_0}{\partial u} = \alpha_1 + 2\alpha_2 u + 3\alpha_3 u^2 + 4\alpha_4 u^3 + 5\alpha_5 u^4, \quad \frac{\partial \delta_1}{\partial u} = -2(\alpha_2 + 3\alpha_3 u + 6\alpha_4 u^2 + 10\alpha_5 u^3),$$

$$\frac{\partial \delta_2}{\partial u} = 3(\alpha_3 + 4\alpha_4 u + 10\alpha_5 u^2), \quad \frac{\partial \delta_3}{\partial u} = -4(\alpha_4 + 5\alpha_5 u), \quad \frac{\partial \delta_4}{\partial u} = 5\alpha_5, \quad \frac{\partial \delta_5}{\partial u} = 0.$$

Учитываются лишь четные степени  $n$  и соответственно  $\delta_0$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_4$  при вычислении  $\partial B_f / \partial u$ ,  $\partial B_f / \partial a$ . А при вычислении  $\partial k_f / \partial u$ ,  $\partial k_f / \partial a$  используются нечетные степени  $n$  и соответственно  $\delta_1$ ,  $\delta_3$ ,  $\delta_5$ .

**4.** Были проведены расчеты для получения информации о влиянии запаздывания на динамику системы, а также сравнительной оценки результатов по методу прямой линеаризации и асимптотического метода усреднения нелинейной механики. При расчетах использованы характеристика трения в форме (2) и параметры:  $\omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}$ ;  $m = 1 \text{ кгс с см}^{-1}$ ;  $b = 0.07 \text{ кгс см}^{-1}$ ;  $c_1 = 0.05 \text{ кгс см}^{-1}$ ;  $k = 0.02 \text{ кгс с см}^{-1}$ ;  $R = 0.5 \text{ кгс}$ ;  $\alpha_1 = 0.84 \text{ с см}^{-1}$ ;  $\alpha_3 = 0.18 \text{ с}^3 \text{ см}^{-3}$ ,  $r_0 = 1 \text{ см}$ ,  $I = 1 \text{ кгс с см}^2$ . Для запаздываний использованы величины  $p\Delta$  и  $pt$  из интервала  $(0, 3\pi/2)$ .

Зависимости амплитуды от частоты  $a(p)$  получены при  $u = 1.2$  (рис. 1–3). На всех кривых колебания с амплитудами устойчивы в пределах заштрихованных секторов

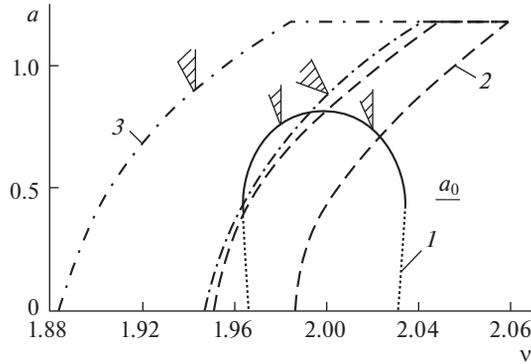


Рис. 1. Амплитудно-частотные кривые при  $\Delta = \pi/2$ : кривая 1 –  $\tau = 0$ ; кривая 2 –  $\tau = \pi/2$ ; кривая 3 –  $\tau = \pi$ .

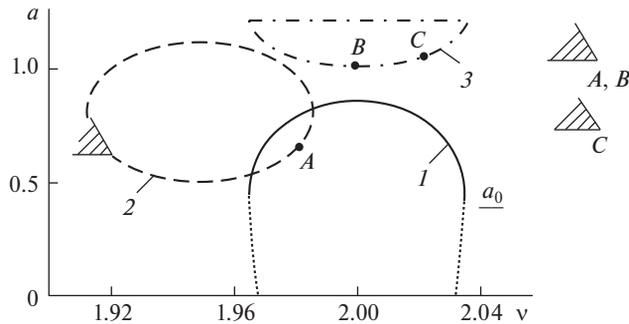


Рис. 2. Амплитудно-частотные кривые при  $\Delta = \pi$ : кривая 1 –  $\tau = 0$ ; кривая 2 –  $\tau = \pi/2$ ; кривая 3 –  $\tau = \pi$ .

для крутизны  $Q = \frac{d}{du} M(u/r_0)$  характеристики источника энергии. Все кривые получены при параметре точности линеаризации  $r = 1.5 (\bar{N}_n$  для  $k_f$ ) и полностью совпадают с результатами на основе асимптотического метода усреднения.

Кривые 1 на всех рисунках соответствуют отсутствию запаздывания ( $c_1 = 0$ ,  $\Delta = 0$ ,  $\tau = 0$ ), приведены для сравнения и  $a_0$  указывает амплитуду автоколебаний. Сплошная часть кривой 1 отражает устойчивые колебания, пунктирная – неустойчивые при идеальном источнике энергии. В случае неидеального источника энергии реализуемость сплошной части кривой 1 зависит от крутизны характеристики источника, а пунктирная часть 1 неустойчива в любом случае.

Влияние запаздываний приводит к интересным эффектам. При  $\Delta = \pi/2$ ,  $\Delta = 3\pi/2$  как верхняя (устойчивая при отсутствии запаздывания в соответствии с кривой 1), так и нижняя ветви кривых 2 оказываются неустойчивыми. Однако при  $\Delta = \pi$  наблюдается особенность: верхняя ветвь оказывается неустойчивой при любой крутизне характеристики источника энергии, вплоть до идеального, а нижняя ветвь – устойчивой в зависимости от крутизны. Верхние и нижние ветви кривых 3 также могут оказаться устойчивыми, что тоже зависит от крутизны характеристики источника энергии. Кривые 2 и 3 при  $\Delta = \pi/2$  и  $\Delta = 3\pi/2$  ведут себя несколько аналогично тому, что получается при нелинейной силе упругости. Для пояснения примем, что упругая сила представ-

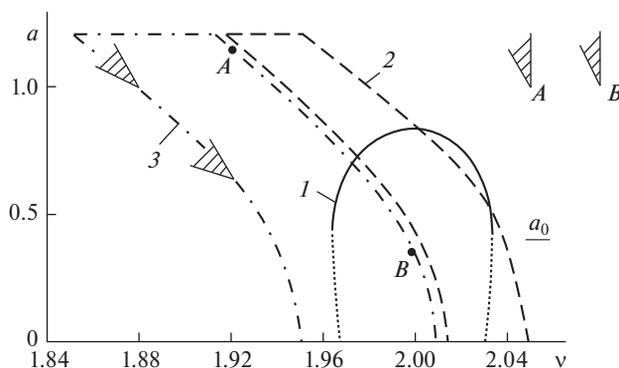


Рис. 3. Амплитудно-частотные кривые при  $\Delta = 3\pi/2$ : кривая 1 –  $\tau = 0$ ; кривая 2 –  $\tau = \pi/2$ ; кривая 3 –  $\tau = \pi$ .

лена в первом уравнении (1) характеристикой  $f(x) = c_0x + \gamma x^3$ . В случае  $\gamma > 0$  имеет место жесткая характеристика, а при  $\gamma < 0$  – мягкая. Как известно, при отсутствии запаздываний и  $\gamma > 0$  амплитудные кривые наклоняются вправо, а при  $\gamma < 0$  – влево [26]. Аналогичное поведение кривых 2 и 3 видно при  $\Delta = \pi/2$  и  $\Delta = 3\pi/2$ , они наклонены вправо при  $\Delta = \pi/2$  и влево – при  $\Delta = 3\pi/2$ . Такой эффект обусловлен влиянием запаздывания по трению. При наличии запаздывания по упругости и его отсутствии по трению нет такого эффекта. Запаздывание по упругости лишь сдвигает резонансную зону вправо или влево относительно случая его отсутствия.

5. Наличие запаздываний приводит к некоторым эффектам. При определенных значениях запаздывания по трению амплитудно-частотные кривые наклоняются вправо и влево соответственно как при жесткой и мягкой характеристиках нелинейной силы упругости. В связи с такой аналогией кривых, обусловленных нелинейной упругостью и запаздыванием в трении, возникает вопрос: как по форме кривых в реальных устройствах определить источник колебаний (нелинейная упругость или запаздывание в трении). Чтобы ответить на него необходимо многостороннее изучение устройства.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 236 с.
2. Kononenko V.O. Vibrating Systems with Limited Power-Supply. London: Iliffe. 1969.
3. Alifov A.A. About calculation of self-oscillatory system delayed and limited excitation // “Ölçmə və keufiyuət: problemlər, perspektivlər” mövzusunda Beynəlxalq Elmi-texniki konfransın materialları, 21–23 noyabr 2018: AzTU. Bakı. Azərbaycan. 2018. P. 289.
4. Алифов А.А. Фундаментальный принцип, управляющий Вселенной. М. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2012. 408 с.
5. Энциклопедия по машиностроению. <https://mash-xxl.info/info/174754/>
6. Теория автоматического управления. Теория линейных систем автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1986. Ч. I. 367 с.
7. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
8. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 256 с.
9. Жирнов Б.М. Об автоколебаниях механической системы с двумя степенями свободы при наличии запаздывания // Прикладная механика. 1973. Т. 9. № 10. С. 83.

10. *Жирнов Б.М.* Одночастотные резонансные колебания фрикционной автоколебательной системы с запаздыванием при внешнем возмущении // Прикладная механика. 1978. Т. 14. № 9. С. 102.
11. *Асташев В.К., Герц М.Е.* Автоколебания вязко-упругого стержня с ограничителями при действии запаздывающей силы // Машиноведение. 1973. № 5. С. 3.
12. *Абдиев Ф.К.* Автоколебания системы с запаздыванием и с неидеальным источником энергии // Изв. АН АзССР. Серия физико-технических и математических наук. 1983. № 4. С. 134.
13. *Gourary M.M., Rusakov S.G.* Analysis of Oscillator Ensemble with Dynamic Couplings // AIMEE 2018. The Second International Conference of Artificial Intelligence, Medical Engineering, Education. 2018. P. 150.
14. *Acebrón J.A. et al.* The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // Reviews of Modern Physics. 2005. V. 77. № 1. P. 137.
15. *Bhansali P., Roychowdhury J.* Injection Locking Analysis and Simulation of Weakly Coupled Oscillator Networks // In: Li P. (eds.) Simulation and Verification of Electronic and Biological Systems. Springer Science+Business Media B.V. 2011. P. 71.
16. *Ashwin P., Coombes S., Nicks R.J.* Mathematical Frameworks for Oscillatory Network Dynamics in Neuroscience // Journal of Mathematical Neuroscience. 2016. V. 6. № 2. P. 1.
17. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
18. *Tondl A.* On the interaction between self-excited and parametric vibrations // National Research Institute for Machine Design Bechovice. Series: Monographs and Memoranda, 1978. № 25. 127 p.
19. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.
20. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
21. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: *В.Н. Челомей* (пред.). Т. 5. Колебания нелинейных механических систем / Под ред. *И.И. Блехмана*. М.: Машиностроение, 1979. 351 с.
22. *Алифов А.А.* Методы прямой линеаризации для расчета нелинейных систем. М. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2015. 74 с.
23. *Alifov A.A.* Method of the Direct Linearization of Mixed Nonlinearities // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. V. 46. № 2. P. 128.
24. *Alifov A.A., Farzaliyev M.G., Jafarov E.N.* Dynamics of a Self-Oscillatory System with an Energy Source // Russian Engineering Research. 2018. V. 38. № 4. P. 260.
25. *Alifov A.A.* Calculating Mixed Forced and Self-Oscillations for Delayed Elastic Constraint and a Limited Power Energy Source // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2020. V. 49. № 2. P. 105.  
<https://doi.org/10.3103/S1052618820020053>
26. *Alifov A.A., Frolov K.V.* Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources. New York: Hemisphere Pub. Corp. Taylor & Francis Group. 1990. P. 327.
27. *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
28. *Климов Д.М.* Об одном виде автоколебаний в системе с сухим трением // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 3. С. 6.
29. *Броновец М.А., Журавлёв В.Ф.* Об автоколебаниях в системах измерения сил трения // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 3. С. 3.