ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2021, № 1, с. 64–71

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В КРАЕВОЙ ЗОНЕ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПО УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ

© 2021 г. В. В. Фирсанов[1], В. Т. Фам[1,*]

[1] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Москва, Россия*

**e-mail: pvthien88@gmail.com*

Поступила в редакцию 03.12.2019 г.
Принята к публикации 22.10.2020 г.

В статье исследуется напряженное состояние типа “погранслой” конической оболочки на основе уточненной теории. Искомые перемещения оболочки аппроксимируются полиномами по нормальной к срединной поверхности координате на две степени выше по отношению к классической теории. На основании уравнений трехмерной теории упругости и вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях с переменными коэффициентами. Решение сформулированной краевой задачи осуществляется применением методов конечных разностей и матричной прогонки. Результаты можно использовать при оценке прочности и долговечности оболочечных конструкций.

Ключевые слова: коническая оболочка, вариационный принцип Лагранжа, уточненная математическая модель, напряженное состояние “погранслой”, поперечные нормальные напряжения

DOI: 10.31857/S0235711921010090

В настоящее время конические оболочки широко применяются в самолетостроении, ракетостроении, судостроении, автомобилестроении и строительстве. Инженерные расчеты конических оболочек базируются на классической теории типа Кирхгофа–Лява. Принятые в этой теории гипотезы не позволяют учитывать поперечные деформации, что приводит к погрешностям при определении напряженного состояния пластин и оболочек, особенно в зонах вблизи соединений, локального нагружения, а также быстро изменяющихся нагрузок.

При построении приближенной теории оболочек, свободной от гипотез Кирхгофа–Лява, получил распространение метод прямого асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений трехмерной теории упругости. Задача определения напряженно-деформированного состояния (НДС) пластинок и оболочек сводилась к построению трех НДС, соответствующих в первом приближении внутреннему НДС, определяемому по классической теории, и двум дополнительным состояниям типа “погранслой” [2]. Имеется библиография работ по асимптотическому интегрированию уравнений теории упругости для тонкостенных систем [1]. В работе [3] с помощью вариационно-асимптотического метода и специально построенной аппроксимирующей полиномиальной функции была решена задача о дополнительном по отношению к классической теории НДС вблизи защемленного края для пластин.

С помощью модифицированного полуобратного метода Сен-Венана Е.М. Зверяевым [6–8] получено приближенное решение пространственной задачи теории упругости. Построены двумерные разрешающие уравнения для определения основового НДС,

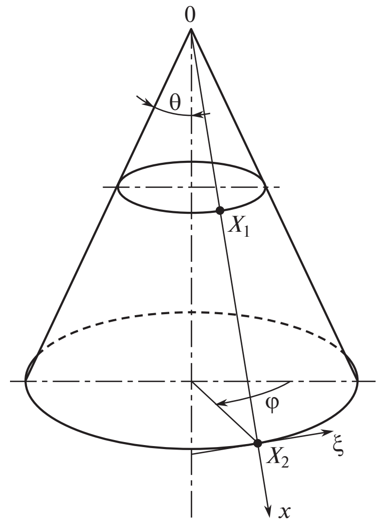

Рис. 1. Коническая оболочка.

совпадающие с уравнениями равновесия классической теории, а также дополнительные уравнения для расчета НДС типа "погранслой", учитывающие сдвиговые поправки.

Другой подход к построению уточненной теории основан на аппроксимации искомых перемещений оболочки полиномами по нормальной к срединной поверхности координате [4]. В рамках этого подхода в работе [5] построена уточненная теория расчета НДС для цилиндрических оболочек, согласно которой имеют место значительные дополнительные локальные напряжения.

В настоящей статье в рамках подхода, представленного в [4, 5] исследуется НДС конической оболочки под действием осесиметричной нагрузки. Искомые перемещения разлагаются по нормальной к срединой плоскости оболочки координате в полиномы на две степени выше, чем в классической теории типа Кирхгофа–Лява.

Основные уравнения конической оболочки. Рассматривается коническая оболочка постоянной толщины $2h$ из изотропного материала, отнесенная к системе координат x, φ, ξ (рис. 1). Коэффициенты Ламе определяются формулами

$$H_i = A_i a_i, \quad H_3 = 1, \quad a_i = 1 + \frac{\xi}{R_i}, \quad i = 1, 2,$$

где A_1, A_2 и R_1, R_2 обозначают коэффициенты первой квадратичной формы и главные кривизны оболочки. Для данной системы координат имеем

$$A_1 = 1, \quad A_2 = x\sin\theta, \quad R_1 = \infty, \quad R_2 = \frac{x}{\operatorname{ctg}\theta}.$$

Считаем, что на боковой и торцевых поверхностях оболочки заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{i3}(\pm h) = q_{i3}^{\pm}, \quad \sigma_{ji} = q_{ji}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2.$$

Представим искомые упругие перемещения в виде

$$U_1(x,\varphi,\xi) = u_0(x,\varphi) + u_1(x,\varphi)\xi + u_2(x,\varphi)\frac{\xi^2}{2!} + u_3(x,\varphi)\frac{\xi^3}{3!},$$
$$U_2(x,\varphi,\xi) = v_0(x,\varphi) + v_1(x,\varphi)\xi + v_2(x,\varphi)\frac{\xi^2}{2!} + v_3(x,\varphi)\frac{\xi^3}{3!}, \tag{1}$$
$$U_3(x,\varphi,\xi) = w_0(x,\varphi) + w_1(x,\varphi)\xi + w_2(x,\varphi)\frac{\xi^2}{2!}.$$

Подставляя разложения (1) в геометрические уравнения трехмерной теории упругости, получим выражения для деформаций оболочки

$$e_{11} = \sum_{k=0}^{3}\frac{1}{A_1a_1}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial\varphi}\frac{v_k}{A_2}\right)\frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^{2}\frac{w_k}{R_1a_1}\frac{\xi^k}{k!},$$
$$e_{22} = \sum_{k=0}^{3}\frac{1}{A_2a_2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_2}{\partial x}\frac{u_k}{A_1}\right)\frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^{2}\frac{w_k}{R_2a_2}\frac{\xi^k}{k!}, \quad e_{33} = \sum_{k=1}^{2}w_k\frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!},$$
$$e_{12} = \sum_{k=0}^{3}\frac{1}{A_2a_2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial\varphi} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial x}v_k\right)\frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^{3}\frac{1}{A_1a_1}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\varphi}u_k\right)\frac{\xi^k}{k!}, \tag{2}$$
$$e_{13} = \sum_{k=0}^{2}\frac{1}{A_1a_1}\frac{\partial w_k}{\partial x}\frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^{3}u_k\frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{3}\frac{u_k}{R_1a_1}\frac{\xi^k}{k!},$$
$$e_{23} = \sum_{k=0}^{2}\frac{1}{A_2a_2}\frac{\partial w_k}{\partial\varphi}\frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=1}^{3}v_k\frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{3}\frac{v_k}{R_2a_2}\frac{\xi^k}{k!}.$$

Уравнения равновесия для конической оболочки находим из условия минимума энергетического функционала Лагранжа

$$\begin{aligned}\delta L = \iiint[(&\sigma_{11}\delta e_{11} + \sigma_{22}\delta e_{22} + \sigma_{33}\delta e_{33} + \sigma_{12}\delta e_{12} + \sigma_{13}\delta e_{13} + \sigma_{23}\delta e_{23}) + \\ &- (G_1\delta U_1 + G_2\delta U_2 + G_3\delta U_3)]\,A_1A_2a_1a_2dxd\varphi d\xi - \\ &- \iint(q_{11}\delta U_1 + q_{12}\delta U_2 + q_{13}\delta U_3)\,A_2a_2d\varphi d\xi - \\ &- \iint(q_{21}\delta U_1 + q_{22}\delta U_2 + q_{23}\delta U_3)\,A_1a_1dxd\xi - \\ &- \iint\Big\{\overset{+}{q}_{13}\,[a_1a_2\delta U_1]_{(\xi=+h)} - \overset{-}{q}_{13}\,[a_1a_2\delta U_1]_{(\xi=-h)} + \\ &+ \overset{+}{q}_{23}\,[a_1a_2\delta U_2]_{(\xi=+h)} - \overset{-}{q}_{23}\,[a_1a_2\delta U_2]_{(\xi=-h)} + \\ &+ \overset{+}{q}_{33}\,[a_1a_2\delta U_3]_{(\xi=+h)} - \overset{-}{q}_{33}\,[a_1a_2\delta U_3]_{(\xi=-h)}\Big\}\,A_1A_2a_1a_2dxd\varphi = 0,\end{aligned} \tag{3}$$

где G_i, $i = \overline{1,3}$ – объемные силы. Поставляя выражения (2) в (3), после преобразований получим систему уравнений

$$\frac{\partial(A_2M_1^{(k)})}{\partial x} + \frac{\partial(A_1M_{12}^{(k)})}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_2}{\partial x}M_2^{(k)} + \frac{\partial A_1}{\partial\varphi}M_{21}^{(k)} + A_1A_2\left(\frac{Q_1^{(k)}}{R_1} - T_1^{(k)} + P_1^{(k)} + X_1^{(k)}\right) = 0,$$
$$k = \overline{0,3};$$
$$\frac{\partial(A_1M_2^{(k)})}{\partial\varphi} + \frac{\partial(A_2M_{21}^{(k)})}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial\varphi}M_1^{(k)} + \frac{\partial A_2}{\partial x}M_{12}^{(k)} + A_1A_2\left(\frac{Q_2^{(k)}}{R_2} - T_2^{(k)} + P_2^{(k)} + X_2^{(k)}\right) = 0, \tag{4}$$

$$k = \overline{0,3};$$

$$\frac{\partial(A_2 Q_1^{(k)})}{\partial x} + \frac{\partial(A_1 Q_2^{(k)})}{\partial \varphi} - A_1 A_2 \left(\frac{M_1^{(k)}}{R_1} + \frac{M_2^{(k)}}{R_2} + T_3^{(k)} - P_3^{(k)} - X_3^{(k)} \right) = 0, \quad k = \overline{0,2}.$$

Здесь используются следующие обозначения обобщенных усилий

$$M_1^{(k)} = \int_{-h}^{+h} a_2 \sigma_{11} \frac{\xi^k}{k!} d\xi, \quad M_2^{(k)} = \int_{-h}^{+h} a_1 \sigma_{22} \frac{\xi^k}{k!} d\xi, \quad M_{12}^{(k)} = \int_{-h}^{+h} a_1 \sigma_{12} \frac{\xi^k}{k!} d\xi,$$

$$M_{21}^{(k)} = \int_{-h}^{+h} a_2 \sigma_{12} \frac{\xi^k}{k!} d\xi, \quad T_1^{(k)} = \int_{-h}^{+h} a_1 a_2 \sigma_{13} \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} d\xi, \quad T_2^{(k)} = \int_{-h}^{+h} a_1 a_2 \sigma_{23} \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} d\xi,$$

$$T_3^{(k)} = \int_{-h}^{+h} a_1 a_2 \sigma_{33} \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} d\xi, \quad Q_1^{(k)} = \int_{-h}^{+h} a_2 \sigma_{13} \frac{\xi^k}{k!} d\xi, \quad Q_2^{(k)} = \int_{-h}^{+h} a_2 \sigma_{23} \frac{\xi^k}{k!} d\xi,$$

$$X_1^{(k)} = \int_{-h}^{+h} G_1 a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} d\xi, \quad X_2^{(k)} = \int_{-h}^{+h} G_2 a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} d\xi, \quad X_3^{(k)} = \int_{-h}^{+h} G_3 a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} d\xi, \qquad (5)$$

$$P_1^{(k)} = \overset{+}{q}_{13} \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h)} - \overset{-}{q}_{13} \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h)},$$

$$P_2^{(k)} = \overset{+}{q}_{23} \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h)} - \overset{-}{q}_{23} \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h)},$$

$$P_3^{(k)} = \overset{+}{q}_{33} \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h)} - \overset{-}{q}_{33} \left[a_1 a_2 \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h)}.$$

Из физических уравнений на основании разложений (1) находим напряжения, подставляя которые последовательно в (5) и (4) и преобразуя полученные уравнения с учетом соотношений (2), имеем следующую систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях

$$\sum_{m=0}^{3} \left(Ki_0^{u_m} + Ki_1^{u_m} \frac{\partial}{\partial x} + Ki_{11}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + Ki_{22}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u_m + \sum_{k=0}^{3} \left(Ki_2^{v_k} \frac{\partial}{\partial \varphi} + Ki_{12}^{v_k} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} \right) v_k +$$

$$+ \sum_{n=0}^{2} \left(Ki_0^{w_n} + Ki_1^{w_n} \frac{\partial}{\partial x} \right) w_n = Ki^{\overset{+}{q}_{13}} \overset{+}{q}_{13} - Ki^{\overset{-}{q}_{13}} \overset{-}{q}_{13}, \quad i = \overline{1,4};$$

$$\sum_{m=0}^{3} \left(Ki_2^{u_m} \frac{\partial}{\partial \varphi} + Ki_{12}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} \right) u_m + \sum_{k=0}^{3} \left(Ki_0^{v_k} + Ki_1^{v_k} \frac{\partial}{\partial x} + Ki_{11}^{v_k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + Ki_{22}^{v_k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) v_k +$$

$$+ \sum_{n=0}^{2} Ki_2^{w_n} \frac{\partial w_n}{\partial \varphi} = Ki^{\overset{+}{q}_{23}} \overset{+}{q}_{23} - Ki^{\overset{-}{q}_{23}} \overset{-}{q}_{23}, \quad i = \overline{5,8}; \qquad (6)$$

$$\sum_{m=0}^{3} \left(Ki_0^{u_m} + Ki_1^{u_m} \frac{\partial}{\partial x} \right) u_m + \sum_{k=0}^{3} Ki_2^{v_k} \frac{\partial v_k}{\partial \varphi} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{2} \left(Ki_0^{w_n} + Ki_1^{w_n} \frac{\partial}{\partial x} + Ki_{11}^{w_n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + Ki_{22}^{w_n} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w_n = Ki^{\overset{+}{q}_{33}} \overset{+}{q}_{33} - Ki^{\overset{-}{q}_{33}} \overset{-}{q}_{33},$$

$$i = \overline{9,11}.$$

Здесь Ki представляют собой переменные коэффициенты, зависящие от геометрических параметров, упругих постоянных материала оболочки и координаты x, а u_m, v_k, w_n – коэффициенты разложений искомых перемещений в выражениях (1).

Расчет конической оболочки под действием осесимметричной нагрузки. В этом случае все компоненты НДС оболочки не зависят от угла φ и перемещения в окружном направлении v_k, $k = \overline{0,3}$ обращаются в нуль. Тогда система дифференциальных уравнений в перемещениях (6) принимает вид

$$\sum_{m=0}^{3}\left(Ki_0^{u_m} + Ki_1^{u_m}\frac{d}{dx} + Ki_{11}^{u_m}\frac{d^2}{dx^2}\right)u_m + \sum_{n=0}^{2}\left(Ki_0^{w_n} + Ki_1^{w_n}\frac{d}{dx}\right)w_n = 0, \quad i = \overline{1,4};$$
$$\sum_{m=0}^{3}\left(Ki_0^{u_m} + Ki_1^{u_m}\frac{d}{dx}\right)u_m + \sum_{n=0}^{2}\left(Ki_0^{w_n} + Ki_1^{w_n}\frac{d}{dx} + Ki_{11}^{w_n}\frac{d^2}{dx^2}\right)w_n = Ki^{q_{33}^+}q_{33}^+ - Ki^{q_{33}^-}q_{33}^-, \tag{7}$$
$$i = \overline{9,11}.$$

Граничные условия на жестко защемленных краях оболочки представляются в форме

$$u_m = 0, \quad (m = \overline{0,3}); \quad w_n = 0, \quad (n = \overline{0,2}) \quad \text{при} \quad x = x_1, \quad x = x_2. \tag{8}$$

Система уравнений (7) решается конечно-разностным методом. Производные 1-го и 2-го порядков аппроксимируются центральными разностями второго порядка точности

$$\frac{dy_j}{dx} = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2s}; \quad \frac{d^2y_j}{dx^2} = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{s^2}.$$

На основании системы (7) с учетом граничных условий (8) получим следующую конечно-разностную систему

$$\sum_{m=0}^{3}\left(\left(\frac{Ki_{11}^{u_m}}{s^2} - \frac{Ki_1^{u_m}}{2s}\right)u_m^{j-1} + \left(\frac{-2Ki_{11}^{u_m}}{s^2} + Ki_0^{u_m}\right)u_m^j + \left(\frac{Ki_{11}^{u_m}}{s^2} + \frac{Ki_1^{u_m}}{2s}\right)u_m^{j+1}\right) +$$
$$+ \sum_{n=0}^{2}\left(\frac{-Ki_1^{w_n}}{2s}w_n^{j-1} + Ki_0^{w_n}w_n^j + \frac{Ki_1^{w_n}}{2s}w_n^{j+1}\right) = 0,$$
$$i = \overline{1,4};$$
$$\sum_{m=0}^{3}\left(\frac{-Ki_1^{u_m}}{2s}u_m^{j-1} + Ki_0^{u_m}u_m^j + \frac{Ki_1^{u_m}}{2s}u_m^{j+1}\right) +$$
$$+ \sum_{n=0}^{2}\left(\left(\frac{Ki_{11}^{w_n}}{s^2} - \frac{Ki_1^{w_n}}{2s}\right)w_n^{j-1} + \left(\frac{-2Ki_{11}^{w_n}}{s^2} + Ki_0^{w_n}\right)w_n^j + \left(\frac{Ki_{11}^{w_n}}{s^2} + \frac{Ki_1^{w_n}}{2s}\right)w_n^{j+1}\right) = \tag{9}$$
$$= Ki^{q_{33}^+}q_{33}^+ - Ki^{q_{33}^-}q_{33}^-;$$
$$i = \overline{9,11}; \quad j = \overline{1, N-1};$$
$$u_m^0 = u_m^N = w_n^0 = w_n^N = 0; \quad m = \overline{0,3}; \quad n = \overline{0,2},$$

где s, $(N + 1)$ – соответственно шаг конечно-разностной схемы и число узлов.

Система (9) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, решается методом матричной прогонки с помощью программы для ЭВМ. Определив перемещения, тангенциальные напряжения находятся из соотношений закона Гука.

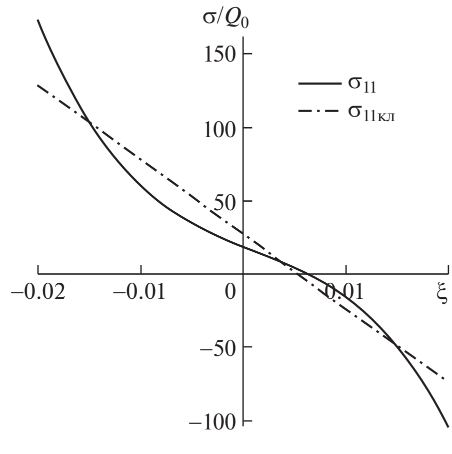

Рис. 2. Изменение σ_{11} по толщине на краю $x = x_2$.

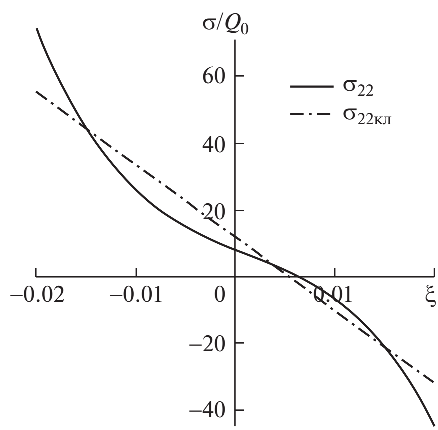

Рис. 3. Изменение σ_{22} по толщине на краю $x = x_2$.

Поперечные напряжения получаются непосредственным интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости

$$\sigma_{13} = -\frac{1}{a_1^2 a_2}\int_{-h}^{\xi}\left[\frac{a_1 a_2}{A_1}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial x}\frac{1}{A_1 A_2}a_1^2\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)\right]d\xi,$$

$$\sigma_{33} = -\frac{1}{a_1 a_2}\int_{-h}^{\xi}\left[\frac{a_2}{A_1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x} - \frac{a_2}{R_1}\sigma_{11} - \frac{a_1}{R_2}\sigma_{22} + \frac{\partial A_2}{\partial x}\frac{1}{A_1 A_2}a_1\sigma_{13}\right]d\xi + \frac{\left(a_1 a_2\right)_{\xi=-h}}{a_1 a_2}\bar{q}_{33}.$$

Пример расчета. В качестве примера расчета рассматривается коническая оболочка, жестко защемленная на двух краях, со следующими параметрами: угол конусности $\theta = \frac{\pi}{4}$, начало и конец оболочки вдоль оси $x_1 = 1$ м, $x_2 = 3$ м, полутолщина оболочки $h = 2$ см, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$, модуль Юнга $E = 2\times10^5$ МПа. Оболочка

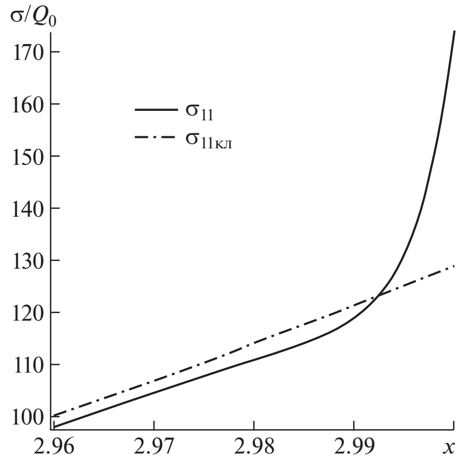

Рис. 4. Изменение σ_{11} в краевой зоне.

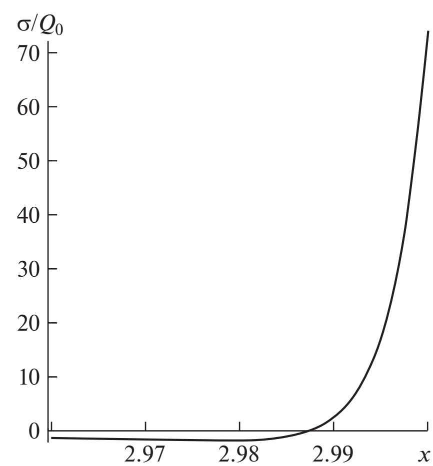

Рис. 5. Изменение σ_{33} в краевой зоне.

находится под действием нагрузки, равномерно распределенной на внутренней поверхности. Графики рис. 2–5 иллюстрируют изменения нормальных и касательных напряжений в краевой зоне оболочки. Отметим, что аббревиатура “кл” соответствует результатам расчета по классической теории.

Анализируя графики на рис. 2–5 можно установить, что напряжения в зоне жестко защемленного края существенно уточняются: максимальное нормальное напряжение σ_{11} – на 35% (рис. 2, 4) и σ_{22} – 36% (рис. 3). Максимальное поперечное нормальное напряжение σ_{33} составляет 42.5% от основного изгибного напряжения σ_{11} (рис. 5).

Выводы. На основе трехмерных уравнений теории упругости с помощью вариационного принципа Лагранжа построены дифференциальные уравнения равновесия конических оболочек в перемещениях, позволяющие учитывать поперечный сдвиг оболочки.

Приведены результаты расчета напряженного состояния типа “погранслой” по уточненной теории конической оболочки под действием осесимметричной нагрузки и дано их сравнение с данными классической теории. Установлено, что в зоне жестко защемленного края оболочки нормальные тангенциальные напряжения существенно уточняются.

Поперечные нормальные, которыми в классической теории пренебрегают, в краевой зоне оказываются одного порядка с максимальными значениями напряжений, соответствующих классической теории. Такие высокие уровни дополнительных напряжений необходимо учитывать при оценке прочности и долговечности элементов конструкций в объектах машиностроения, в том числе авиационной и ракетной техники.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-08-00849).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агаловян Л.А.* О возможностях асимптотического метода в вопросах теории пластин и оболочек // Проблемы механики деформируемого твердого тела. Сб. статей, посвященный 90-летию академика НАН Армении С.А. Амбарцумяна. Ереван: Гитутюн, 2012. С. 33.
2. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
3. *Firsanov Val.V.* Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory // Journal of machinery, manufacture and reliabitity. 2016. V. 45. № 6. P. 515.
4. *Васильев В.В., Лурье С.А.* К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Изв. АН. МТТ. 1990. № 6. С. 139.
5. *Doan T.N., Van Thom D., Thanh N.T., Van Chuong P., Tho N.C., Ta N.T., Nguyen H.N.* Analysis of stress concentration phenomenon of cylinder laminated shells using higher-order shear deformation Quasi-3D theory // Composite Structures. 2020. V. 232. P. 111526. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111526
6. *Зверяев Е.М.* Метод Сен-Венана–Пикара–Банаха интегрирования уравнений в частных производных с малым параметром // Препринты ИПМ имени М.В. Келдыша. 2018. № 83. 19 с.
7. *Зверяев Е.М.* Конструктивная теория тонких упругих оболочек // Препринты ИПМ имени М.В. Келдыша. 2016. № 33. 25 с.
8. *Зверяев Е.М.* Непротиворечивая теория тонких упругих оболочек. ПММ. 2016. Т. 80. № 5. С. 580.