ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2020, № 5, с. 11–20

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 534.26

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ДИСКРЕТНЫМИ СИЛАМИ

О. И. Косарев

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
e-mail: oikosarev@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.04.2019 г.
Принята к публикации 29.05.2020 г.

Предложен численно-аналитический метод расчета вынужденных колебаний оболочечной конструкции, составленной из набора конечных упругих цилиндрических оболочек и упругих колец, к которым приложены дискретные возмущающие силы. Приведены примеры расчета амплитудно-частотных характеристик и форм колебаний оболочечной конструкции.

Ключевые слова: вынужденные колебания, цилиндрическая оболочка, возмущающие силы, амплитудно-частотные характеристики

DOI: 10.31857/S0235711920050077

Рассматривается задача о вынужденных колебаниях оболочечной конструкции со свободными граничными условиями на торцах. Конструкция состоит из секций, каждая из которых представляет собой конечную упругую цилиндрическую оболочку с упругими кольцами на концах. На оболочечную конструкцию действуют дискретные вынуждающие силы. В теории колебаний конечных цилиндрических оболочек одной из ранних и наиболее известных является работа Форсберга [1], но в ней рассматриваются только собственные колебания "сухой" цилиндрической оболочки (в вакууме). Вынужденные колебания бесконечной цилиндрической оболочки в жидкости, возбуждаемые сосредоточенной силой в виде δ-функции Дирака рассмотрены в [2]. Попытки решения задачи вынужденных колебаний конечных цилиндрических оболочек в жидкости методом конечных элементов нельзя признать удобными и успешными [3].

Причин, по которым требуется рассмотрение данной задачи, две: 1) знание распределения виброперемещений на поверхности оболочки необходимо для решения задачи излучения; 2) численно-аналитические методы расчета вынужденных колебаний конечных составных оболочечных конструкций практически отсутствуют.

В общем случае оболочечная конструкция состоит из цилиндрических оболочек и колец, на которых установлено амортизированное оборудование. Оболочки подкреплены стрингерами и шпангоутами. Шпангоуты также моделируются упругими кольцами. Амортизированное оборудование представляется в виде сосредоточенных масс, закрепленных на кольцах. Пример динамической модели оболочечной конструкции приведен на рис. 1.

Решается задача – разработать численно-аналитический метод расчета вынужденных колебаний системы, представляющей собой оболочечную конструкцию, включающую набор подкрепленных цилиндрических оболочек и колец, возбуждаемых дискретными вынуждающими силами. Полученные результаты будут использованы в

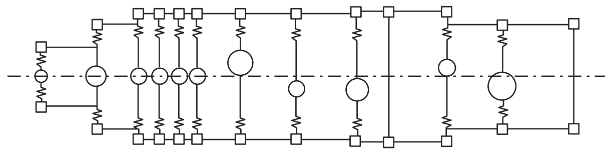

Рис. 1. Модель оболочечной конструкции.

дальнейшем для разработки метода расчета вынужденных колебаний конечной оболочечной конструкции, погруженной в жидкость.

Для формирования матричного уравнения движения системы предложен метод (способ), идея которого состоит в следующем. Система (динамическая модель) условно разбивается на подсистемы, включающие оболочки и кольца. Для каждой оболочки составляются дисперсионные уравнения и определяются их корни. Решение свободных колебаний оболочки записывается в виде вектора (матрицы-столбца) перемещений, состоящего из четырех элементов (u, v, w, w'). Функция распределения перемещений оболочек по их длине записывается через перемещения торцевых сечений. Внутренние силы в оболочках тоже приводятся к торцам оболочки. Определяются матрицы динамических жесткостей колец по соответствующим четырем перемещениям. Общее матричное уравнение вынужденных колебаний всей оболочечной конструкции записывается как для простой цепной системы, состоящей из масс и пружин. Вынуждающие силы приложены к кольцам и распределены по окружному углу φ по гармоническому закону $P = p\cos n\varphi$. Предложенный метод можно охарактеризовать как разновидность прямого метода. Его особенности заключаются в том, что, по аналогии с цепной системой, роль пружин выполняют упругие цилиндрические оболочки, а роль масс – упругие кольца. Для решения вынужденных колебаний оболочек используются уравнения свободных колебаний оболочек. Упругие кольца могут быть как реальными, так и фиктивными. Преимущества метода заключаются в том, что он позволяет легко изменять конфигурацию динамической модели в процессе проведения расчетов. Он позволяет задавать дискретные вынуждающие силы в любом месте по длине цилиндрической оболочки без применения δ-функции. Дискретные силы можно задать в любом поперечном сечении оболочки с использованием “фиктивных” колец (в которых не учитываются их массы). В результате получается матричное уравнение ленточного типа, состоящее из диагонально расположенных блок-матриц четвертого порядка, что позволяет упростить составление и ускорить решение матричных уравнений высокого порядка (порядка нескольких сотен).

Общий подход к расчету колебаний систем с распределенными параметрами известен. В данном случае уравнения движения цилиндрической оболочки в перемещениях, основанные на моментной теории упругих оболочек Кирхгофа–Лява, имеют вид [1, 4, 5]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} - \rho_* h a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_1 a = 0, \\
\frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + 2\frac{\partial H}{\partial \xi}\right) - \rho_* h a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + q_2 a = 0, \\
\frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2}\right) - T_2 - \rho_* h a \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_3 a = 0,
\end{gathered} \tag{1}$$

где u, v, w – осевые (продольные), окружные (касательные) и радиальные перемещения оболочки; T_1, T_2, S, H, M_1, M_2 – упругие силовые факторы; q_1, q_2, q_3 – поверхностные нагрузки; a — радиус оболочки; h — толщина оболочки; $\xi = x/a$ и φ — координаты в осевом и окружном направлениях; t — время; ρ_* — плотность материала оболочки; $0 \le x \le L$, L — длина оболочки.

Запишем решение уравнений свободных колебаний конечной цилиндрической оболочки (1) в форме [5]

$$u = U\cos(n\varphi)e^{i\omega t}, \quad v = V\sin(n\varphi)e^{iwt}, \quad w = W\cos(n\varphi)e^{iwt},$$
$$U = \sum_{j=1}^{8} C_{jn}\frac{\Delta_{jn}^{(2)}}{\Delta_{jn}^{(1)}}e^{i\alpha_{jn}\xi}, \quad V = \sum_{j=1}^{8} C_{jn}\frac{\Delta_{jn}^{(3)}}{\Delta_{jn}^{(1)}}e^{i\alpha_{jn}\xi}, \quad W = \sum_{j=1}^{8} C_{jn}e^{i\alpha_{jn}\xi}, \tag{2}$$

где n — окружные гармоники ряда Фурье, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, α_{jn} — корни дисперсионного уравнения; $j = 1–8$ — порядковые номера корней; C_{jn} — искомые коэффициенты; Δ_{jn} — миноры матрицы уравнения движения оболочки (3); $\omega = 2\pi f$ — угловая частота колебаний; f — частота колебаний. В решение (2) входят подлежащие определению корни дисперсионного уравнения α_{jn} и коэффициенты C_{jn}. Для получения дисперсионного уравнения примем $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ и решение уравнения представим в упрощенном виде

$$v = Ve^{i\alpha y}\sin n\varphi,$$
$$u = Ue^{i\alpha y}\cos n\varphi,$$
$$w = We^{i\alpha y}\cos n\varphi.$$

В результате подстановки этих решений в уравнение (1) получим уравнение свободных колебаний оболочки в матричном виде [6]

$$\begin{bmatrix} L_{11} + \omega_*^2 & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & L_{22} + \omega_*^2 & L_{23} \\ -L_{13} & L_{23} & L_{33} + \omega_*^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \frac{a}{q}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{3}$$

Элементы L_{ij} матрицы уравнения (3) будут

$$L_{11} = -\alpha^2 - \frac{1-\mu}{2}n^2,$$
$$L_{12} = \frac{1+\mu}{2}i\alpha n = -L_{21},$$
$$L_{13} = i\alpha\mu - i\frac{z_1 b_1}{r}\alpha^3,$$
$$L_{22} = -\frac{1-\mu}{2}\left(1 + 4\delta^2\right)\alpha^2 - n^2\left(1 + b_2 + 2\frac{z_2 b_2}{r} + \delta^2 + \frac{a_2}{r^2}\right),$$
$$L_{23} = L_{32} = -n\left[1 + b_2 + \frac{z_2 b_2}{r} + (2-\mu)\delta^2\alpha^2 + n^2\left(\delta^2 + \frac{z_2 b_2}{r} + \frac{a_2}{r^2}\right)\right], \tag{4}$$
$$L_{31} = -L_{13},$$
$$L_{33} = -1 - b_2 - n^4\frac{a_2}{r^2} - \delta^2\left(-\alpha^2 - n^2\right)^2 - 2\frac{z_2 b_2}{r} - \alpha^4\frac{a_1}{r^2};$$
$$q = \frac{Eh}{\left(1-\mu^2\right)r}, \quad \delta^2 = \frac{h^2}{12r}, \quad \omega_*^2 = \frac{\omega^2 r^2\rho_*(1-\mu^2)}{E},$$

где a_1, b_1 – параметры стрингеров; a_2, b_2, z_2 – параметры шпангоутов; $E = E_0(1 + i\eta)$ – комплексный модуль упругости; η – потери в материале оболочки; $r = a$ – радиус оболочки; μ – коэффициент Пуассона; $i = \sqrt{-1}$.

Каждое из решений U, V, W (2) состоит из восьми слагаемых по числу концевых граничных условий оболочки. Соответственно числу слагаемых для каждой гармоники n и для каждой частоты колебаний ω надо определить восемь корней α_j, входящих в перемещения U, V, W (2).

Матричное уравнение (3) можно представить в виде

$$[L(\alpha) + \omega_*^2]\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{a}{q}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Дисперсионное уравнение определяется из условия

$$\Delta_0 = \det\left|L_{(\alpha)} + \omega_*^2\right| = 0, \tag{5}$$

где определитель матрицы

$$\Delta_0 = \left(L_{11} + \omega_*^2\right)\left(L_{22} + \omega_*^2\right)\left(L_{33} + \omega_*^2\right) - L_{12}L_{23}L_{13} - L_{13}L_{12}L_{23} + \\ + L_{13}\left(L_{22} + \omega_*^2\right)L_{13} - \left(L_{11} + \omega_*^2\right)L_{23}^2 + L_{12}^2L_{33}.$$

Решение дисперсионного уравнения (5) сводится к решению биквадратного полинома

$$A_8\alpha^8 + A_6\alpha^6 + A_4\alpha^4 + A_2\alpha^2 + A_0 = 0. \tag{6}$$

Параметры полинома A_8, A_6, A_4, A_2, A_0 не выписаны из-за их громоздкости, обусловленной выражениями (4). В результате решения биквадратного полинома (6) получаем четыре квадратных корня, после извлечения квадратов получаем восемь комплексных корней, из них четыре корня положительных и четыре корня отрицательных. Модули у соответствующих положительных и отрицательных корней одинаковые. Корни дисперсионного уравнения определяются для каждой отдельной оболочки, входящей в оболочечную конструкцию.

Для составления уравнений вынужденных колебаний оболочечной конструкции, состоящей из набора оболочек, соединенных между собой кольцами каждое уравнение движения записывается для перемещений трех соседних подсистем с номерами: k – текущей, $(k - 1)$ – предыдущей и $(k + 1)$– последующей. Подсистемами являются оболочки и кольца. Внутренние силы оболочки, приложенные, например, к кольцу k, выражаются через перемещения концов оболочек, присоединенных к кольцу слева (в конце предыдущей оболочки $(k - 1)$) и справа (в начале последующей оболочки $(k + 1)$).

Определим перемещения торцевых сечений оболочек. Представим распределение перемещений по длине y для каждой оболочки с учетом дополнительной координаты $w' = dw/dy$ в матричном виде

$$\zeta_{(y)} = \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \\ w' \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta^{(2)}(\alpha_1)}{\Delta^{(1)}(\alpha_1)} & \dfrac{\Delta^{(2)}(\alpha_2)}{\Delta^{(1)}(\alpha_2)} & \cdots & \dfrac{\Delta^{(2)}(\alpha_8)}{\Delta^{(1)}(\alpha_8)} \\ \dfrac{\Delta^{(3)}(\alpha_1)}{\Delta^{1}(\alpha_1)} & \dfrac{\Delta^{(3)}(\alpha_2)}{\Delta^{1}(\alpha_2)} & \cdots & \dfrac{\Delta^{(3)}(\alpha_8)}{\Delta^{1}(\alpha_8)} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ i\alpha_1 & i\alpha_2 & \cdots & i\alpha_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\alpha_1 y} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2 y} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_3 y} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{i\alpha_8 y} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_8 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Дополнительная координата w' введена для возможности формирования блок-матриц в уравнениях стыковки цилиндрических оболочек с кольцами по четырем основным силовым факторам. Выражение (7) используется для каждой оболочки при составлении системы уравнений движения для всей оболочечной конструкции в целом. Обозначим $A(y)$ произведение матриц в правой части выражения (7)

$$A(y) = G_y\alpha(y).$$

Представим перемещения торцев оболочки, имеющей длину ℓ, в начале при $y = 0$ и в конце $y = \ell$ в виде

$$\xi_{(0)} = A(0)W^0, \quad \xi_{(1)} = A(\ell)W^0.$$

Составим блок-матричное уравнение

$$\begin{Bmatrix} \xi_{(0)} \\ \xi_{(\ell)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A(0) \\ A(\ell) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_8 \end{Bmatrix}.$$

Из этого уравнения определим вектор-столбец коэффициентов $W^0 = \{C_1 - C_8\}$

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A(0) \\ A(\ell) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \xi(0) \\ \xi(\ell) \end{Bmatrix} = [\bar{C}] \begin{Bmatrix} \xi(0) \\ \xi(\ell) \end{Bmatrix} = [\bar{C}_1\bar{C}_2] \begin{Bmatrix} \xi(0) \\ \xi(\ell) \end{Bmatrix}, \tag{8}$$
$$W^0 = \{\bar{C}_1\}\{\xi_{(0)}\} + \{\bar{C}_2\}\{\xi_{(\ell)}\}.$$

Текущие перемещения по длине оболочки, выраженные через перемещения ее торцов, определяются выражением

$$\xi(y) = G_y\alpha(y)\left[\{\bar{C}_1\}\{\xi_{(0)}\}\{\bar{C}_2\}\{\xi_{(\ell)}\}\right]. \tag{9}$$

Таким образом, вектор перемещений оболочки с произвольным номером k

$$\zeta_k(y) = \{u_k, v_k, w_k, w'_k\}^T = G_k(y)\left[C_k^1(\zeta_{k0}) + C_k^2(\zeta_{k\ell})\right], \tag{10}$$

где $\zeta_{k0} = \zeta_k(0)$, $\zeta_{k1} = \zeta_{k1}(\ell_k)$ – перемещения торцевых сечений оболочки номера k, $C_k^1 = \bar{C}_1$, $C_k^2 = \bar{C}_2$.

Матрица $G_k(y)$ размером 4 × 8 состоит из столбцов G_{pk}, в которых $p = 1, 2, ..., 8$ по числу корней дисперсионного уравнения.

$$G_k(y) = \{G_{pk}\}, \quad G_{pk} = e^{iy\alpha_{pk}} \left\{ \frac{\Delta_{pk}^2}{\Delta_{pk}^1}, \frac{\Delta_{pk}^3}{\Delta_{pk}^1}, 1, i\alpha_{pk} \right\}^T,$$

где $\Delta_{pk}^1 = \Delta^1(\alpha_{pk})$, $\Delta_{pk}^2 = \Delta^2(\alpha_{kp})$, $\Delta_{pk}^3 = \Delta^3(\alpha_{pk})$ миноры матрицы уравнения (3).

Матрицы C_k^1, C_k^2 являются блоками размером 8 × 4 квадратной матрицы C_k размером 8 × 8

$$C_k = \begin{bmatrix} G_{ko} \\ G_{k1} \end{bmatrix}^{-1} = [C_k^1, C_k^2],$$

где $G_{k0} = G_k(0)$, $G_{k1} = G_k(\ell_k)$.

Приведем внутренние силы в оболочке к ее торцевым сечениям. Вектор-столбец внутренних сил в оболочке номера k имеет вид

$$\eta_k(y) = \left(T_1, T_{12}, N, \frac{M}{r_k}\right)^T.$$

Соответствие между этими внутренними силами и перемещениями оболочки (10) следующее: $u \to T_1$, $v \to T_{12}$, $w \to N$, $w_k' \to M/r$.

Связь внутренних сил оболочки с перемещениями торцевых сечений оболочки можно представить вектором

$$\eta_k(y) = G_k^*(y)\left[C_k^1(\zeta_{k0}) + C_k^2(\zeta_{k1})\right],$$

где $G_k^*(y)$ – матрица размером 4 × 8, состоящая из столбцов G_{pk}^*

$$G_k^*(y) = \{G_{pk}^*\}, \quad p = 1, 2, \ldots, 8,$$

$$G_{pk}^*(y) = q_k e^{iy\alpha_{pk}} \left\| \begin{matrix} i\alpha_{pk}\dfrac{\Delta_{pk}^2}{\Delta_{pk}^1} + \mu n \dfrac{\Delta_{pk}^3}{\Delta_{pk}^1} + \mu \\ \dfrac{1-\mu}{2}\left(-n\dfrac{\Delta_{pk}^2}{\Delta_{pk}^1} + i\alpha_{pk}\dfrac{\Delta_{pk}^3}{\Delta_{pk}^1}\left(1 + 4\delta^2\right) + 4in\alpha_{pk}\delta_k^2\right) \\ i\alpha_{pk}\delta^2\left(n(2-\mu)\dfrac{\Delta_{pk}^3}{\Delta_{pk}^1} + (2-\mu)n^2 + \alpha_{pk}^2\right) \\ n\mu\dfrac{\Delta_{pk}^3}{\Delta_{pk}^1}\delta_k^2 + \left(\mu n^2 + \alpha_{pk}^2\right)\delta_k^2 \end{matrix} \right\|.$$

В случае, когда к кольцу (слева и справа) крепятся оболочки разного диаметра, необходимо выполнить соответствующее приведение координат (перемещений) торцов оболочек к центру масс поперечного сечения кольца. Векторы перемещений торцов оболочки $\zeta_{k1} = H_k^1 Z_k$, $\zeta_{k+1,0} = H_k^2 Z_k$ можно выразить через векторы перемещений колец Z_k

$$Z_k = \{U_k, V_k, W_k, \theta_k, R_k\},$$

с помощью матриц перехода H_k^1 и H_k^2

$$H_k^1 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{r_k}{R_k} \end{matrix} \right\|; \quad H_k^2 = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{r_{k+1}}{R_k} \end{matrix} \right\|.$$

Внутренние силы, действующие в торцевых сечениях оболочек (в конце предыдущей оболочки $\eta_{k,1}$ и в начале последующей оболочки $\eta_{k+1.0}$), приведем к соединяющему их кольцу с помощью матриц приведения H_k^3 и H_k^4. Силы, приложенные к центру масс поперечного сечения кольца с номером k

$$F_k^1 = H_k^3 \eta_{k,1}, \quad F_k^2 = H_k^4 \eta_{k+1,0}, \tag{11}$$

где $\eta_{k0} = \eta_k(0)$; $\eta_{k1} = \eta_k(\ell_k)$;

$$H_k^3 = \begin{Vmatrix} \frac{r_k}{R_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_k}{R_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_k}{R_k} & 0 \\ \frac{(R_k - r_k) r_k}{R_k^2} & 0 & 0 & \frac{r_k^2}{R_k^2} \end{Vmatrix}; \quad H_k^4 = \begin{Vmatrix} \frac{r_{k+1}}{R_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_{k+1}}{R_k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_{k+1}}{R_k} & 0 \\ \frac{(R_k - r_{k+1}) r_{k+1}}{R_k^2} & 0 & 0 & \frac{r_{k+1}^2}{R_k^2} \end{Vmatrix}.$$

Матричное уравнение движения оболочечной конструкции формируется следующим образом. С учетом принятых обозначений уравнение движения кольца номера k в матричной форме имеет вид

$$M_k Z_k = P_k - F_k^1 + F_k^2, \tag{12}$$

где P_k – вектор возмущающих сил; F_k^1, F_k^2 – векторы внутренних сил, приложенные от оболочек к кольцу слева и справа; M_k – матрица динамических жесткостей кольца номера k. Эту матрицу для $n \geq 1$ можно представить в виде

$$M_k = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{14} \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 \\ m_{41} & 0 & 0 & m_{44} \end{bmatrix},$$

где

$$m_{11} = G_1\left(n^4 + \frac{2\mu}{E}n^2\right) - \rho F \omega^2; \quad m_{14} = G_1 n^2\left(1 + \frac{2\mu}{E}\right); \quad m_{14} = m_{41};$$

$$m_{22} = G_1 n^2 \left(n^2 - 1\right)^2 - \left(n^2 + 1\right)\rho F \omega^2; \quad m_{33} = G_1\left(n^2 - 1\right)^2 - \frac{\left(n^2 + 1\right)}{n^2}\rho F \omega^2;$$

$$m_{44} = G_1\left(1 + \frac{2\mu}{E}n^2\right); \quad G_1 = \frac{EI}{R_k{}^4};$$

EI – жесткость на изгиб; ρ – плотность материала кольца; F – площадь поперечного сечения кольца; R_k – радиус кольца.

Вектор перемещений кольца

$$Z_k = \{U_k, V_k, W_k, \theta, R_k\}^T.$$

Подставляя в уравнение движения кольца (12) значения сил (11) и перемещений оболочек (10), получим систему уравнений порядка $4(N + 1)$, где N – общее количество оболочек, $(N + 1)$ – общее количество колец.

В уравнениях движения порядковые номера колец обозначим q, где $0 \leq q \leq p$. Уравнения составляются для каждого кольца последовательно.

Для первого кольца $q = 0$

$$[M_0 - H_0^4 G_1^*(0) C_1^1 H_0^2] Z_0 - H_0^4 G_1^*(0) C_1^2 H_1^1 Z_1 = P_0, \tag{13}$$

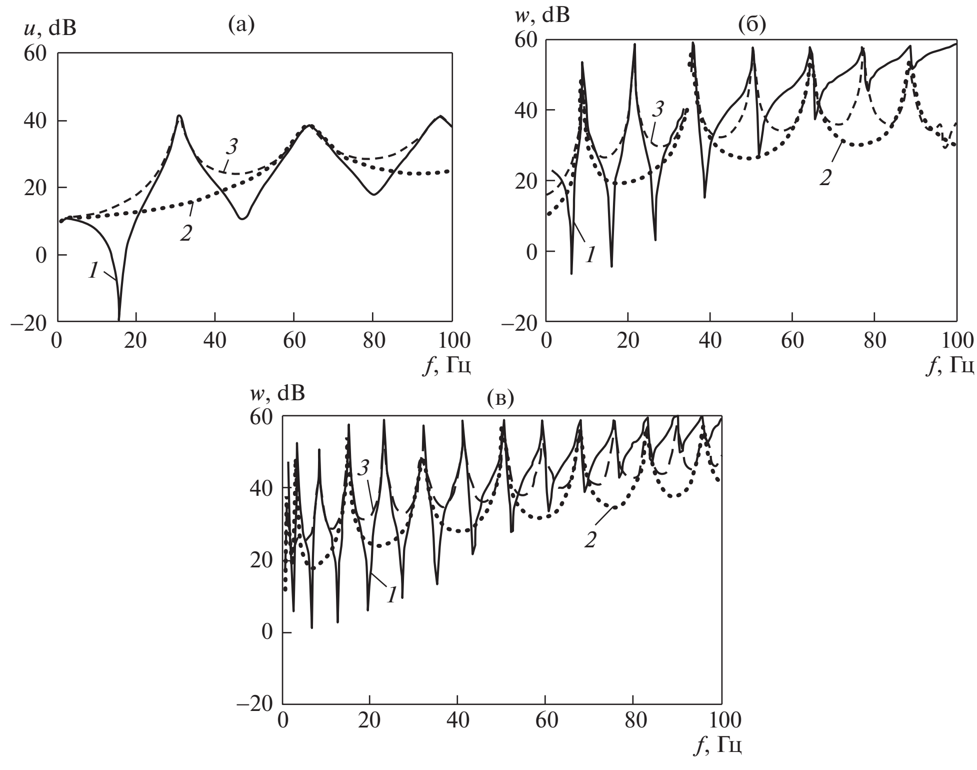

Рис. 2.

для каждого промежуточного кольца от $q = 1$ до $q = N - 1$

$$H_q^3 G_q^*(\ell_q) C_q^1 H_{q-1}^2 Z_{q-1} + [M_q + H_q^3 G_q^*(\ell_q) C_q^2 H_q^1 - H_q^4 G_{q+1}^*(0) C_{q+1}^1 H_q^2] Z_q -$$
$$- H_q^4 G_{q+1}^*(0) C_{q+1}^2 H_{q+1}^1 Z_{q+1} = P_q,$$

для последнего кольца $q = N$

$$H_p^3 G_p^*(\ell_p) C_p^1 H_{p-1}^2 Z_{p-1} + [M_p + H_p^3 G_p^*(\ell_p) C_p^2 H_p^1] Z_p = P_p.$$

Общее матричное уравнение для оболочечной конструкции имеет ленточную диагональную структуру расположения блок-матриц размером 4 × 4 и в сумме может иметь порядок нескольких сотен. В результате решения этой системы определяются искомые векторы перемещений колец Z_q оболочечной конструкции.

После определения векторов перемещений Z_q на кольцах q из уравнения (13) можно построить АЧХ колебаний в заданных сечениях (кольцах) оболочечной конструкции, а также формы вынужденных колебаний для каждой оболочки и всей оболочечной конструкции в целом.

Форма колебаний для каждой оболочки определяется выражением

$$\zeta_q(y) = G_q^1(y)\left[C_q^1\left(H_{q-1}^2 Z_{q-1}\right) + C_q^2\left(H_q^1 Z_q\right)\right], \quad 0 \le y \le \ell_q. \tag{14}$$

Выражение (14) последовательно используется для каждой оболочки и затем методом припасовывания определяется форма колебаний всей оболочечной конструкции.

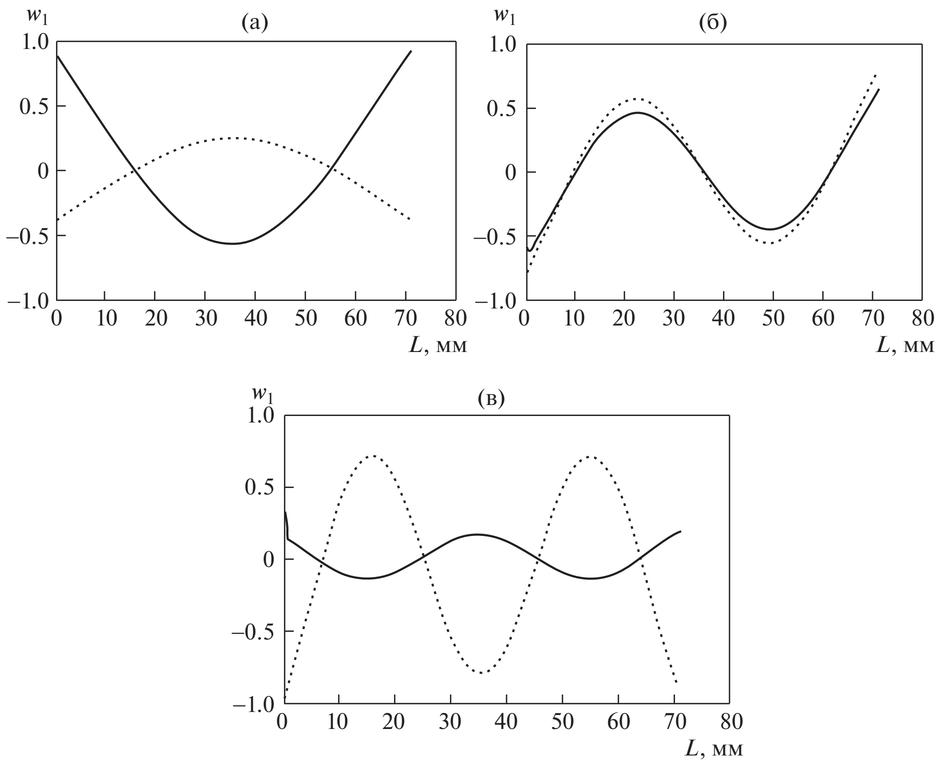

Рис. 3.

На основе изложенной методологии разработаны алгоритм и компьютерная программа на языке Fortran. С использованием программы проведены расчеты для оболочечной конструкции. В качестве примера на рис. 2а, б, в приведены АЧХ колебаний оболочечной конструкции, состоящей из восьми одинаковых секций с цилиндрическими оболочками постоянного радиуса в диапазоне частот $f = 1{-}100$ Гц для окружных гармоник n: (а) $n = 0$; (б) $n = 1$; (в) $n = 2$.

На рис. 2а показаны амплитуды ускорений продольных колебаний U в dB. На рис. 2б, в показаны амплитуды радиальных колебаний W в dB соответственно для гармоник $n = 1$ и $n = 2$. Геометрические параметры оболочечной конструкции $L = 70.4$ м, $a = 4$ м, $h = 0.04$ м. Возмущающая сила $P = 1000$ Н приложена на левом конце оболочечной конструкции. Линии на рис. 2а, б, в – сплошная, точками и штриховая соответствуют АЧХ в сечениях: *1* – левый конец; *2* – середина; *3* – правый конец оболочечной конструкции. На рис. 3а, б, в показаны формы радиальных колебаний W на частотах, близких к резонансам, показанным на АЧХ на рис. 2б: (а) $f = 8.5$ Гц; (б) $f = 21$ Гц; (в) $f = 35$ Гц. Сплошные линии – реальные составляющие Re(W), пунктирные линии – мнимые составляющие Im(W). Полученные формы колебаний соответствуют типичным балочным формам изгибных колебаний балки со свободными краями, что подтверждает правильность расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Forsberg K.* Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells // AIAA Journal, 1964. № 12. V. 2. P. 2150.

2. *Романов В.Н., Иванов В.С.* Излучение звука элементами судовых конструкций. СПб. Судостроение: 1993. 212 с.
3. *Коротин П.И., Салин Б.М., Суворов А.С.* Вопросы численного моделирования рассеяния акустических волн на телах сложной формы с использованием метода конечных элементов / Сб. трудов. XX сессии РАО. Т. 1. М.: ГЕОС. 2008. С. 169.
4. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. С. 260.
5. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение. 1968. Т. 3. С. 287.
6. *Косарев О.И.* Активное гашение звука, рассеянного упругой цилиндрической оболочкой, путем приложения к ней вынуждающих сил // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 5. С. 29.