
**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ
МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

УДК 539.3

**ВЕКТОРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ В МКЭ ДЛЯ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ
ПРИ УЧЕТЕ СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ**© 2020 г. Ю. В. Клочков^{1,*}, А. П. Николаев¹, Т. Р. Ишанов¹, А. С. Андреев¹¹Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, Россия

*e-mail: Klotchkov@bk.ru

Поступила в редакцию 29.07.2019 г.

Принята к публикации 27.03.2020 г.

В статье представлен алгоритм реализации векторной аппроксимации искомых величин при получении в криволинейной системе координат матрицы жесткости конечного элемента оболочки вращения на основе использования гипотезы Тимошенко о наклоне нормали к срединной поверхности оболочки.

Ключевые слова: теория оболочек, угол наклона нормали, векторная аппроксимация, скалярная аппроксимация, конечный элемент

DOI: 10.31857/S0235711920040070

В настоящее время при анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек вращения чаще всего используется теория тонких оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа [1, 2]. При решении ряда задач (короткопролетные конструкции, оболочки с жестким защемлением и др.) необходимо учитывать деформации поперечного сдвига [3–5]. Учитывая, что решение систем дифференциальных уравнений, описывающих процессы деформирования тонких оболочек, аналитическими методами трудоемко, для анализа НДС оболочек и других типов конструкций в основном используются численные методы их расчета [6–13]. В широко распространенных конечно-элементных программных комплексах типа Nastran, Ansys, Abaqus и им подобных, используется неинвариантная интерполяция отдельных компонент вектора перемещения через узловое значения этих же компонент как скалярных величин, что приводит к получению некорректных результатов [8]. Поэтому задача создания усовершенствованных алгоритмов расчета оболочек вращения с учетом деформаций поперечного сдвига [4] на основе инвариантной интерполяционной процедуры является актуальной и представляет, как теоретический интерес, так и практическую значимость.

Определение НДС оболочек обычно выполняется на основе использования гипотезы о том, что любое волокно, нормальное к срединной поверхности в исходном состоянии, остается прямым и нормальным к срединной поверхности в ее деформированном состоянии. При таком подходе не учитываются деформации поперечного сдвига и соответствующие касательные напряжения, что может привести к значительным некорректностям при коротких пролетах оболочечных конструкций, а также в приопорных зонах граничных заделок.

При учете деформации поперечного сдвига нормаль к срединной поверхности в исходном состоянии при нагружении остается прямой линией, наклон которой определяется углами поворотов относительно координатных осей, касательных к срединной поверхности [5]. В настоящей статье угол наклоненной нормали определяется векто-

ром γ [5], отсчет которого осуществляется в двух вариантах: от исходной нормали – в первом варианте отсчета; от нормали к деформированной срединной поверхности – во втором варианте.

При конечно-элементной реализации алгоритма учета поперечных сдвиговых деформаций реализована аппроксимация перемещений и угловых параметров как составляющих скалярных и векторных полей. Показана эффективность использования векторной аппроксимации искомых величин в четырехстороннем конечном элементе, являющимся фрагментом срединной поверхности оболочки вращения.

Геометрия оболочки вращения. Представление геометрии срединных поверхностей оболочек различных конфигураций с использованием радиус-векторов достаточно полно изложено в [14]. Радиус-вектор, задающий срединную поверхность оболочки вращения, может быть определен по формуле

$$\mathbf{R}^0 = x\mathbf{i} + r \sin(\theta)\mathbf{j} + r \cos(\theta)\mathbf{k}, \quad (1)$$

где x – осевая координата; $r = r(x)$ – радиус вращения; θ – угол, отсчитываемый от оси OZ против хода часовой стрелки.

Дифференцированием (1) по криволинейным координатам s, θ можно определить базисные векторы произвольной точки срединной поверхности $\{\mathbf{e}^0\}^T = \{\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_n^0\}$ и их производные $\{\mathbf{e}_{,\alpha}^0\} = [m_{\alpha}] \{\mathbf{e}^0\}, \{\mathbf{e}_{,\alpha}^0\}^T = \{t_{1,\alpha}^0, t_{2,\alpha}^0, t_{n,\alpha}^0\}$.

Вектор перемещения точки срединной поверхности оболочки вращения и вектор углов поворота, а также их производные по криволинейным координатам s_1 и s_2 , можно представить компонентами, отнесенными к базису этой же точки

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^p \mathbf{e}_p^0 + v \mathbf{e}_n^0 = \{v\}^T \{\mathbf{e}_k^0\}; & \mathbf{v}_{,\alpha} &= t_{\alpha}^p \mathbf{e}_p^0 + t_{\alpha} \mathbf{e}_n^0 = \{t_{\alpha}^k\}^T \{\mathbf{e}_k^0\}; \\ \mathbf{v}_{,\alpha\beta} &= t_{\alpha\beta}^p \mathbf{e}_p^0 + t_{\alpha\beta} \mathbf{e}_n^0 = \{t_{\alpha\beta}^k\}^T \{\mathbf{e}_k^0\}; & \boldsymbol{\gamma} &= \gamma^p \mathbf{e}_p^0 + \gamma^3 \mathbf{e}_n^0 = \{\gamma\}^T \{\mathbf{e}_k^0\}; \\ \boldsymbol{\gamma}_{,\alpha} &= t_{\alpha}^p \mathbf{e}_p^0 + t_{\alpha} \mathbf{e}_n^0 = \{t_{\alpha}^k\}^T \{\mathbf{e}_k^0\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где v^p, v – компоненты вектора перемещения и γ^p, γ^3 – вектора углов поворота.

Положение точки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии ζ до и после деформирования, определяется соответствующими радиус-векторами

$$\mathbf{R}^{0\zeta} = \mathbf{R}^0 + \zeta \mathbf{e}_n^0; \quad \mathbf{R}^{\zeta} = \mathbf{R}^{0\zeta} + \mathbf{V}. \quad (3)$$

Входящий в (3) вектор перемещения точки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии ζ , можно определить по формуле

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \zeta \boldsymbol{\gamma}, \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\gamma} = \gamma^1 \mathbf{e}_1^0 + \gamma^2 \mathbf{e}_2^0 + \gamma^3 \mathbf{e}_n^0$ – вектор углов поворота.

Компоненты γ^1, γ^2 представляют собой повороты нормали вокруг тангенциальных базисных векторов. Компонента γ характеризует средний поворот всей окрестности рассматриваемой точки срединной поверхности вокруг нормали [5].

Формула (4) соответствует варианту отсчета угла поворота от нормали исходного состояния. Данный подход предложен в [4, 5]. Если же отсчет угла поворота осуществлять от перпендикуляра к срединной поверхности в деформированном состоянии, то соотношение (4) примет вид

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \zeta (\Delta \mathbf{e} + \boldsymbol{\gamma}), \quad (5)$$

где $\Delta \mathbf{e} = \Delta e^1 \mathbf{e}_1^0 + \Delta e^2 \mathbf{e}_2^0 + \Delta e^3 \mathbf{e}_n^0$ – разность ортов нормалей в деформированном и исходном состояниях.

нение инвариантной векторной интерполяционной процедуры, основанной на использовании выражений вида

$$\mathbf{v} = \{\Psi\}^T \{\mathbf{v}_y^{\Pi}\} = \{\Psi\}^T [L] \{\mathbf{v}_y^{\Gamma}\} = \{h\}^T \{\mathbf{v}_y^{\Gamma}\} = \{h\}^T [\mathbf{A}_v] \{n_v\} = \{h\}^T [\mathbf{A}_v] [G] \{\mathbf{v}_y^{\Gamma}\}; \quad (11)$$

$$\gamma = \{\Phi\}^T \{\gamma_y\} = \{\Phi\}^T [\mathbf{A}_\gamma] \{\gamma_y\}, \quad (12)$$

где $\{\mathbf{v}_y^{\Pi}\}^T = \{\mathbf{v}^i \mathbf{v}^j \mathbf{v}^k \mathbf{v}^l \mathbf{v}_{,\xi}^i \mathbf{v}_{,\xi}^j \mathbf{v}_{,\xi}^k \mathbf{v}_{,\xi}^l \mathbf{v}_{,\eta}^i \mathbf{v}_{,\eta}^j \mathbf{v}_{,\eta}^k \mathbf{v}_{,\eta}^l\}$; $\{\gamma_y\}^T = \{\gamma^i \gamma^j \gamma^k \gamma^l\}$; $\{\mathbf{v}_y^{\Gamma}\}^T = \{\mathbf{v}^i \mathbf{v}^j \mathbf{v}^k \mathbf{v}^l \mathbf{v}_{,1}^i \mathbf{v}_{,1}^j \mathbf{v}_{,1}^k \mathbf{v}_{,1}^l \mathbf{v}_{,2}^i \mathbf{v}_{,2}^j \mathbf{v}_{,2}^k \mathbf{v}_{,2}^l\}$ – матрицы-строки векторных узловых неизвестных; $[L]$ – матрица перехода от столбца $\{\mathbf{v}_y^{\Pi}\}$ к столбцу $\{\mathbf{v}_y^{\Gamma}\}$; $[\mathbf{A}_v]$, $[\mathbf{A}_\gamma]$ – матрицы, элементами которых являются строки базисных векторов узловых точек.

$$\{n_v\}^T = \{v^{1i} v^{2i} v^j \dots v^l t_1^{1i} t_1^{2i} t_1^j \dots t_1^l t_2^{1i} t_2^{2i} t_2^j \dots t_2^l\};$$

$$\{\gamma_y\}^T = \{\gamma^{1i} \gamma^{2i} \gamma^{3i} \gamma^{1j} \gamma^{2j} \gamma^{3j} \gamma^{1k} \gamma^{2k} \gamma^{3k} \gamma^{1l} \gamma^{2l} \gamma^{3l}\}.$$

Производные векторов \mathbf{v} и γ определяются дифференцированием выражений (11) и (12)

$$\mathbf{v}_{,\alpha} = \{\Psi_{,\alpha}\}^T [L] \{\mathbf{v}_y^{\Gamma}\} = \{h_{\alpha}\}^T \{\mathbf{v}_y^{\Gamma}\} = \{h_{\alpha}\}^T [\mathbf{A}_v] [G_v] \{\mathbf{v}_y^{\Gamma}\}; \quad (13)$$

$$\gamma_{,\alpha} = \{\Phi_{,\alpha}\}^T [\mathbf{A}_\gamma] \{\gamma_y\} = \{w\}^T [\mathbf{A}_\gamma] \{\gamma_y\}.$$

Входящие в структуру матриц $[\mathbf{A}_v]$ и $[\mathbf{A}_\gamma]$ векторы базисов узлов КЭ могут быть выражены через векторы локального базиса внутренней точки четырехугольного КЭ

$$\{\mathbf{e}^{op}\} = [b^{op}] \{\mathbf{e}^o\}, \quad (14)$$

где $\{\mathbf{e}^{op}\} = \{\mathbf{e}_1^{op} \mathbf{e}_2^{op} \mathbf{e}_n^{op}\}$; верхний индекс ρ обозначает узел КЭ i, j, k или l .

Представляя левые части (11), (12) и (13) выражениями (2), можно получить соотношения

$$\begin{aligned} \{\mathbf{e}^0\}^T \{v\} &= \{\mathbf{e}^0\}^T \left[h_1 [b^{0i}]^T \dots h_{12} [b^{0l}]^T \right] [G] \{\mathbf{v}_y^{\Gamma}\} = \{\mathbf{e}^0\}^T [H] \{\mathbf{v}_y^{\Gamma}\}; \\ \{\mathbf{e}^0\}^T \{\gamma\} &= \{\mathbf{e}^0\}^T \left[\varphi_1 [b^{0i}]^T \dots \varphi_4 [b^{0l}]^T \right] \{\gamma_y\} = \{\mathbf{e}^0\}^T [r] \{\gamma_y\}; \\ \{\mathbf{e}^0\}^T \{\alpha^k\} &= \{\mathbf{e}^0\}^T \left[h_{\alpha 1} [b^{0i}]^T \dots h_{\alpha 12} [b^{0l}]^T \right] [G_v] \{\mathbf{v}_y^{\Gamma}\} = \{\mathbf{e}^0\}^T [H_{\alpha}] \{\mathbf{v}_y^{\Gamma}\}; \\ \{\mathbf{e}^0\}^T \{\alpha^k\} &= \{\mathbf{e}^0\}^T \left[w_1 [b^{0i}]^T \dots w_4 [b^{0l}]^T \right] \{\gamma_y\} = \{\mathbf{e}^0\}^T [r_{\alpha}] \{\gamma_y\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Приравнявая соответствующие выражения при $\{\mathbf{e}^0\}^T$ в левых и правых частях равенств (15), можно получить искомые аппроксимирующие зависимости для компонент вектора перемещения и компонент вектора углов поворота, а также их производных

$$\begin{aligned} \{v\} &= [H] \{\mathbf{v}_y^{\Gamma}\}; & \{\gamma\} &= [r] \{\gamma_y\}; \\ \{\alpha^k\} &= [H_{\alpha}] \{\mathbf{v}_y^{\Gamma}\}; & \{\alpha^k\} &= [r_{\alpha}] \{\gamma_y\}. \end{aligned} \quad (16)$$

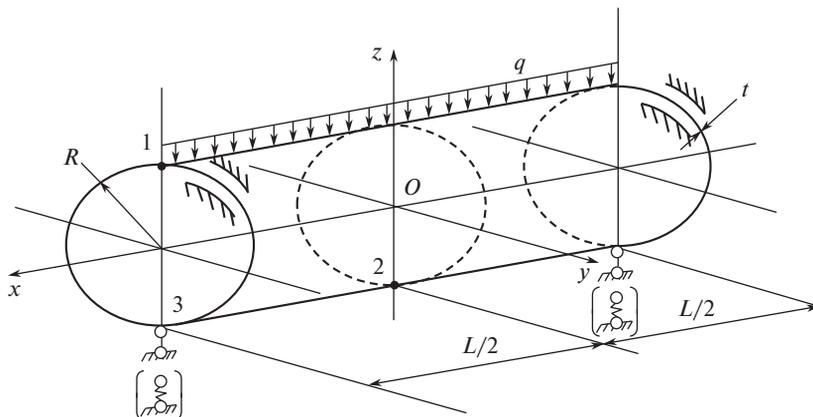


Рис. 1. Расчетная схема цилиндра.

На основании (16) можно сформулировать матричное соотношение

$$\{U\} = [D_v] \{U_y^r\}. \quad (17)$$

$\begin{matrix} 6 \times 1 & 6 \times 48 & 48 \times 1 \end{matrix}$

Анализируя (16), можно отметить их принципиальное отличие от (9), которое заключается в том, что при использовании инвариантной векторной интерполяционной процедуры каждая компонента вектора перемещения зависит от узловых значений всех трех компонент векторов перемещений и их производных, а каждая компонента вектора угла поворота нормали зависит от узловых значений всех компонент векторов углов поворота нормалей узлов КЭ. При использовании общепринятой интерполяции отдельных компонент вектора перемещения и компонент вектора угла поворота как скалярных величин, каждая компонента вектора перемещения зависит от узловых значений этой же компоненты и не зависит от узловых значений остальных двух компонент и их производных, а каждая компонента вектора угла поворота зависит от узловых значений только этой же компоненты и не зависит от узловых значений остальных компонент.

Аппроксимации искомых величин (10) и (17) можно представить в матричном виде

$$\{U\} = [D_w] \{U_y^r\}. \quad (18)$$

$\begin{matrix} 6 \times 1 & 6 \times 48 & 48 \times 1 \end{matrix}$

$[D_w]_{6 \times 48}$ – матрица аппроксимирующих функций по (10) или (17).

С использованием аппроксимирующих выражений (18) стандартным образом формируется матрица жесткости конечного элемента $[K]$

$$[K] \{U_y^r\} = \{F_y\}, \quad (19)$$

$\begin{matrix} 48 \times 48 & 48 \times 1 & 48 \times 1 \end{matrix}$

где $\{F_y\}_{1 \times 48}^T = \left\{ \{f_y\}_{1 \times 36}^T \{0\}_{1 \times 12}^T \right\}$ – матрица-строка узловых усилий конечного элемента.

Пример расчета. Была решена задача по определению НДС цилиндра, нагруженного вдоль образующей равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q и имеющего по торцам шарнирные опоры, препятствующие вертикальному смещению (рис. 1).

Таблица 1

Координаты точек (x, см; t, рад)	Напряжения, Н/см ²	Вариант расчета							
		I				II			
		Интерполяционная процедура							
		Скалярная		Векторная		Скалярная		Векторная	
		17 × 17	21 × 21	17 × 17	21 × 21	17 × 17	21 × 21	17 × 17	21 × 21
Т. 1 (20.0; 0.0)	σ_{11}^{BH}	56.3	57.1	55.4	56.5	71.8	70.2	61.7	64.8
	σ_{22}^{BH}	200.5	206.5	197.4	204.7	245.6	242.3	214.2	225.5
	σ_{13}^{BH}	-27.1	-33.8	-27.0	-33.8	-12.7	-15.8	-12.5	-15.7
	σ_{11}^H	-54.8	-55.8	-54.2	-55.4	-66.0	-66.7	-70.7	-69.9
	σ_{22}^H	-201.0	-209.2	-199.0	-207.9	-229.6	-234.2	-245.3	-244.9
	σ_{13}^H	-27.1	-33.8	-27.0	-33.8	-12.7	-15.8	-12.5	-15.7
Т. 2 (0.0; π)	σ_{11}^{BH}	63.8	66.2	62.9	65.7	72.1	71.4	67.4	69.3
	σ_{22}^{BH}	204.2	209.6	201.4	207.9	222.7	221.5	207.4	214.5
	σ_{11}^H	-54.3	-53.8	-53.5	-53.4	-53.7	-55.1	-56.4	-56.6
	σ_{22}^H	-196.3	-201.7	-194.0	-200.4	-208.1	-210.8	-215.0	-215.5

Вдоль торцевых окружностей цилиндра запрещена производная нормальной компоненты вектора перемещения, т.е. торцы цилиндра имеют скользящую заделку. Были приняты следующие исходные данные: $q = 0.25$ Н/см; $L = 40$ см; $R = 40$ см; $t = 0.4$ см; $E = 2 \times 10^7$ Н/см²; $\nu = 0.3$. Вследствие наличия плоскостей симметрии рассчитана 1/4 часть цилиндра. Расчеты выполнены в двух вариантах отсчета угла поворота как при векторной, так и при скалярной интерполяционных процедурах.

Результаты повариантного расчета представлены в табл. 1, в которой приведены значения нормальных и сдвиговых напряжений на внутренней σ^{BH} и наружной σ^H поверхностях цилиндра в точках 1 и 2 (рис. 1) в зависимости от вида интерполяционной процедуры и сетки узлов дискретизации рассчитываемого фрагмента.

Анализ численных значений напряжений, представленных в табл. 1, показывает, что в обоих вариантах расчета наблюдается удовлетворительная сходимость вычислительного процесса как при скалярной, так и при векторной интерполяционных процедурах. Однако, во втором варианте расчета нормальные напряжения имеют значения, превышающие значения нормальных напряжений первого варианта примерно на 10%. Напряжения сдвига, наоборот, во втором варианте имеют меньшие значения (примерно в 2 раза) по сравнению с первым вариантом. Результаты второго варианта расчета являются более корректными из-за более полного использования дифферен-

Таблица 2

Координаты точек (x, см; t, рад)	Напряжения, Н/см ²	Скалярная интерполяционная процедура							
		Вариант расчета							
		I				II			
		Величина жесткого смещения, см							
		0.0	100.0	200.0	500.0	0.0	100.0	200.0	500.0
Т. 1 (20.0; 0.0)	σ_{11}^{BH}	57.1	154.5	237.0	422.7	70.2	313.1	527.4	1041.7
	σ_{22}^{BH}	200.5	519.7	784.8	1381.5	242.3	1038.3	1740.6	3425.9
	σ_{13}^{BH}	-33.8	-33.1	-32.5	-31.2	-15.8	-15.6	-15.5	-15.1
	σ_{11}^H	-55.8	43.2	127.0	315.6	-66.7	-123.5	-173.6	-293.8
	σ_{22}^H	-209.2	110.6	381.2	990.4	-234.2	-432.0	-606.4	-1025.1
	σ_{13}^H	-33.8	-33.1	-32.5	-31.2	-15.8	-15.6	-15.5	-15.1
Т. 3 (20.0; π)	σ_{11}^{BH}	97.6	-7.9	-97.3	-248.4	199.3	-56.1	-281.4	-882.1
	σ_{22}^{BH}	210.5	-120.2	-400.1	-1030.3	337.6	-479.5	-1200.4	-2930.5
	σ_{13}^{BH}	-70.2	-65.1	-60.7	-51.0	-40.2	-37.9	-35.8	-30.9
	σ_{11}^H	-95.9	-186.9	-264.0	-437.4	-191.9	-123.1	-62.4	83.2
	σ_{22}^H	-243.2	-542.7	-796.2	-1366.9	-349.1	-129.5	64.2	529.1
	σ_{13}^H	-70.2	-65.1	-60.7	-51.0	-40.2	-37.9	-35.8	-30.9

Таблица 3

Координаты точек (x, см; t, рад)	Напряжения, Н/см ²	Векторная интерполяционная процедура					
		Вариант расчета					
		I			II		
		Величина жесткого смещения, см					
		0.0	100.0	500.0	0.0	100.0	500.0
Т. 1 (20.0; 0.0)	σ_{11}^{BH}	56.5	56.5	56.5	64.8	64.8	64.8
	σ_{22}^{BH}	204.7	204.7	204.7	225.5	225.5	225.5
	σ_{13}^{BH}	-33.8	-33.8	-33.8	-15.7	-15.7	-15.7
	σ_{11}^H	-55.4	-55.4	-55.4	-69.9	-69.9	-69.9
	σ_{22}^H	-207.9	-207.9	-207.9	-244.9	-244.9	-244.9
	σ_{13}^H	-33.8	-33.8	-33.8	-15.7	-15.7	-15.7
Т. 3 (20.0; π)	σ_{11}^{BH}	96.7	96.7	96.7	184.3	184.3	184.3
	σ_{22}^{BH}	208.0	208.0	208.0	293.5	293.5	293.5
	σ_{13}^{BH}	-70.2	-70.2	-70.2	-39.7	-39.7	-39.7
	σ_{11}^H	-95.6	-95.6	-95.6	-200.5	-200.5	-200.5
	σ_{22}^H	-242.5	-242.5	-242.5	-380.0	-380.0	-380.0
	σ_{13}^H	-70.2	-70.2	-70.2	-39.7	-39.7	-39.7

циальных характеристик параметров деформированного состояния. Если шарнирные опоры, препятствующие вертикальному смещению цилиндра, заменить на пружинные, то оболочка получит возможность смещаться вертикально вниз как абсолютно твердое тело. Варьируя жесткостью пружины, можно получать различные величины жесткого смещения.

Результаты повариантного расчета при изменении условий опирания представлены в табл. 2 (скалярная интерполяционная процедура) и в табл. 3 (векторная интерполяционная процедура), в которых приведены значения напряжений при сетке узлов 21×21 в точках 1 и 3 с различными значениями жесткого смещения цилиндра.

Вывод. Анализ полученных данных показывает, что при использовании скалярной интерполяционной процедуры численные значения напряжений при жестком смещении оболочки существенно изменяются (сильно возрастают), достигая неприемлемых значений. При использовании векторной интерполяционной процедуры в обоих вариантах расчета НДС цилиндра не меняется, несмотря на существенную величину жесткого смещения, т.к. использование векторной аппроксимации позволяет в неявном виде автоматически учитывать смещения конечного элемента как жесткого целого при использовании криволинейной системы координат. Таким образом, на основании численных расчетов, можно сделать вывод, что в задачах по определению НДС оболочек вращения с учетом сдвиговых деформаций необходимо использовать именно векторную интерполяцию линейных и угловых искомых величин.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Администрации Волгоградской области в рамках исследовательского проекта № 19-41-343003 p_мол_a.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2010. 380 с.
2. *Галимов К.З., Паймушин В.Н., Терегулов И.Г.* Основания нелинейной теории оболочек Акад. наук Татарстана. Казань: Фэн, 1996. 215 с.
3. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
4. *Рикардс Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне, 1988. 248 с.
5. *Черных К.Ф.* Линейная теория оболочек. Л.: Изд-во ЛГУ, 1962. Т. 1. 374 с.; 1964. Т. 2. 395 с.
6. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 2006. 391 с.
7. *Storozhuk E.A., Yatsura A.V.* Exact solutions of boundary-value problems for noncircular cylindrical shells // *International Applied Mechanics*. 2016. Т. 52. № 4. С. 386.
8. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Shubovich A.A., Marchenko S.S.* Analysis of geometrically nonlinear shells of revolution based on the finite element method with the vector interpolation of desired quantities. *Russian Aeronautics*. 2013. Т. 56. № 4. С. 327.
9. *Bouledroua O., Elazzizi A., HadjMeliani M., Pluvinage G., Matvienko Y.G.* T-stress estimation by the two-parameter approach for a specimen with a V-shaped notch // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. V. 58. № 3. 546 p.

10. Азиков Н.С., Павлов Е.А. Исследование устойчивости сетчатой композитной пластины // Авиационная промышленность. 2016. № 3. С. 46.
11. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Книга по требованию, 2012. 445 с.
12. Zhelezov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V. Nonlinear deformation and stability of discretely reinforced elliptical cylindrical shells under transverse bending and internal pressure, Russian Aeronautics, 2014. V. 57. № 2. P. 118.
13. Sheshenin S.V., Bakhmet'ev S.G. A model of the effective rubber-cord ply Moscow university mechanics bulletin, 2014. V. 69. № 5. P. 109.
14. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Encyclopedia of Analytical Surfaces // Springer International Publishing, Switzerland. 2015. 752 p.
15. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. Т. 1. 536 с.