
НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 629.7.023:539.43

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕНЗОРНОЙ МЕРЫ НАКОПЛЕННОГО УСТАЛОСТНОГО ПОВРЕЖДЕНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ СЛОИСТЫХ УГЛЕПЛАСТИКОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

© 2020 г. В. Е. Стрижиус

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия
e-mail: vitaly.strizhius@gmail.com

Поступила в редакцию 02.04.2018 г.

Принята к публикации 25.10.2019 г.

Для расчетных оценок усталостной долговечности слоистых углепластиков, работающих в условиях сложного напряженно-деформированного состояния, предложена феноменологическая модель накопления усталостного повреждения, с использованием тензорной меры накопленного повреждения от циклических напряжений различного типа. Представлена процедура расчетных оценок усталостной долговечности с использованием предложенной модели. Приведен пример расчета, показывающий приемлемое совпадение расчетных и экспериментальных данных.

Ключевые слова: слоистые углепластики, сложное напряженно-деформированное состояние, усталостная долговечность, накопление усталостных повреждений

DOI: 10.31857/S0235711920010137

Введение. Исследование усталостной долговечности слоистых полимерных композиционных материалов (ПКМ), работающих в условиях сложного напряженно-деформированного состояния (НДС), представляет собой чрезвычайно сложную проблему, решение которой требует проведения большого объема специальных экспериментов.

Как показывают результаты обзора работ [1–9], для предсказания усталостного разрушения слоистых ПКМ при сложном НДС можно использовать ряд критериев (моделей) усталостного разрушения. Практическое использование этих критериев для инженерных расчетных оценок усталостной прочности композиционных пакетов крайне затруднительно по причине высокой трудоемкости процесса подготовки исходных данных, позволяющих определять значения необходимых параметров основных соотношений критериев. Все известные критерии *уникальны*, т.е. предсказывают усталостное разрушение слоистых ПКМ для конкретного расчетного случая и конкретной предполагаемой моды разрушения.

В качестве определенной альтернативы существующим критериям для оценки усталостной долговечности слоистых углепластиков, работающих в условиях регулярного циклического нагружения и сложного НДС, предлагается критерий с использованием тензорной меры накопленного повреждения от циклических напряжений различного типа. Это позволит выполнять расчетные оценки усталостной долговечности слоистых углепластиков при *различных видах* сложного НДС с *приемлемой трудоемкостью*.

Представим процедуру расчетной оценки усталостной долговечности слоистых углепластиков с использованием предложенного критерия.

Тензорная модель накопления усталостного повреждения. Рассмотрим слоистый углепластик, работающий в условиях регулярного циклического нагружения и сложного НДС. Накопление усталостного повреждения будем оценивать для всего пакета слоев ПКМ, который рассматриваем как *анизотропный* материал. В качестве напряжений *в общем случае* используем средние напряжения по толщине пакета $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$ — напряжения в глобальной системе координат. Среди этих напряжений после специального анализа выделим напряжения “превалирующего” типа, к которым можно отнести напряжения, вносящие наибольший вклад в суммарное накопленное повреждение и фактически определяющие моду усталостного разрушения слоистого углепластика. Тем не менее, предполагаем, что и некоторые другие напряжения, характеризующие сложное НДС, будут каким-то образом влиять на суммарное накопленное повреждение *без изменения* моды разрушения. При этом подобное “влияние” вовсе не означает простое линейное суммирование усталостных повреждений от различных типов напряжений.

Эти предположения фактически совпадают с допущениями, принятыми в работах [1–9] при формировании критериев разрушения слоистых ПКМ при различных типах сложного НДС и не противоречат физической сущности явления накопления усталостного повреждения материалов.

С математической точки зрения основные положения предлагаемой модели можно сформулировать с использованием ключевых понятий, закономерностей и соотношений для тензоров второго ранга, представленных в классических работах по тензорному анализу [10–12]:

1. Меру накопленного повреждения от напряжений различного типа можно определить с использованием *феноменологической модели* накопления усталостного повреждения и эту модель может представить *тензор накопления усталостного повреждения* в слоистом углепластике — некий *математический* объект, в общем виде представляющий совокупность девяти компонент накопленного усталостного повреждения

$$T_D = \begin{pmatrix} D_x & D_{yx} & D_{zx} \\ D_{xy} & D_y & D_{zy} \\ D_{xz} & D_{yz} & D_z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $D_x, D_y, D_z, D_{xy}, D_{yx}, D_{xz}, D_{zx}, D_{yz}, D_{zy}$ — компоненты накопленного повреждения от циклических напряжений соответственно $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$. Предполагается, что компоненты накопленного повреждения могут оцениваться с использованием простых соотношений

$$D_j = \frac{n_j}{N_j},$$

где D_j — компонента накопленного повреждения от напряжений j -го типа; $n_j = n_x = n_y = n_z = n_{xy} = n_{yx} = n_{xz} = n_{zx} = n_{yz} = n_{zy}$ — количество циклов синфазных циклических напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$; N_j — количество циклов до разрушения углепластика при одноосном регулярном нагружении циклическими напряжениями j -го типа.

2. Известны уравнения кривых усталости рассматриваемого углепластика при одноосном регулярном нагружении циклическими напряжениями j -го типа. Эти уравнения имеют вид уравнений Менделла [13]

$$\sigma(\tau)_{j\max} = a_j + b_j \lg N_j \quad (2)$$

или

$$\sigma(\tau)_{j \max} / F_j = a_j / F_j + (b_j / F_j) \lg N_j, \quad (2a)$$

где $\sigma(\tau)_{j \max}$ — максимальные (по модулю) значения циклических напряжений j -го типа при усталостных испытаниях образцов из ПКМ; F_j — пределы прочности материала по соответствующим направлениям; a_j и b_j — параметры уравнений (2) и (2a).

3. Для однородных материалов справедлив закон парности касательных напряжений: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. В общем случае слоистый ПКМ с различными укладками слоев не является однородным материалом. При инженерных расчетах на прочность слоистых ПКМ достаточно часто делается допущение о справедливости этого закона и для ПКМ. Ввиду этого возможно сделать подобное допущение и в рамках предлагаемой модели. Можно предположить, что $N_{yx} \approx N_{xy}$, $N_{zy} \approx N_{yz}$, $N_{zx} \approx N_{xz}$. Тогда $D_{yx} \approx D_{xy}$, $D_{zy} \approx D_{yz}$, $D_{zx} \approx D_{xz}$ и тензор (1) можно признать условно симметричным.

4. Существуют [10–12] собственные значения симметричного тензора второго ранга (1) и эти значения могут характеризовать сумму накопленного повреждения при усталостном разрушении рассматриваемого углепластика. Практически все гипотезы суммирования усталостных повреждений как металлических, так и композиционных конструктивных элементов предполагают, что усталостное разрушение элемента произойдет, когда сумма накопленного усталостного повреждения будет равна единице. В связи с этим примем допущение, что одно из собственных значений тензора (1) в момент усталостного разрушения углепластика при сложном НДС будет также равно единице, например, $\lambda_1 = D_1 = 1$.

Расчетная оценка усталостной долговечности углепластика с использованием тензорной модели накопления усталостного повреждения. Предлагаем процедуру расчетной оценки усталостной долговечности слоистых углепластиков с использованием тензорной модели накопления усталостного повреждения.

1. Характеристическое уравнение тензора (1) может представлять собой кубическое уравнение [10–12]

$$D^3 - I_1(T_D)D^2 + I_2(T_D)D - I_3(T_D) = 0, \quad (3)$$

три корня которого, обозначаемые как D_1 , D_2 , D_3 , будут собственными значениями тензора (1). В уравнении (3): $I_1(T_D)$, $I_2(T_D)$, $I_3(T_D)$ — первый, второй и третий главные инварианты тензора (1)

$$I_1(T_D) = D_x + D_y + D_z;$$

$$I_2(T_D) = D_x D_y + D_y D_z + D_z D_x - D_{xy}^2 - D_{yz}^2 - D_{xz}^2;$$

$$I_3(T_D) = D_x D_y D_z + 2D_{xy} D_{yz} D_{xz} - D_y D_{xz}^2 - D_x D_{yz}^2 - D_z D_{xy}^2.$$

2. При $\lambda_1 = D_1 = 1$, уравнение (3) можно переписать в виде

$$I_1(T_D) - I_2(T_D) + I_3(T_D) - 1 = 0,$$

и усталостная долговечность до разрушения ПКМ $n = N_{fr}$ может быть теоретически определена как решение кубического уравнения

$$aN_{fr}^3 + bN_{fr}^2 + cN_{fr} - 1 = 0, \quad (4)$$

где a, b, c – коэффициенты уравнения, определяемые как

$$a = \left(\frac{1}{N_x}\right)\left(\frac{1}{N_y}\right)\left(\frac{1}{N_z}\right) + 2\left(\frac{1}{N_{xy}}\right)\left(\frac{1}{N_{xz}}\right)\left(\frac{1}{N_{yz}}\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{N_x}\right)\left(\frac{1}{N_{yz}}\right)^2 - \left(\frac{1}{N_y}\right)\left(\frac{1}{N_{xz}}\right)^2 - \left(\frac{1}{N_z}\right)\left(\frac{1}{N_{xy}}\right)^2;$$

$$b = \left(\frac{1}{N_{xy}}\right)^2 + \left(\frac{1}{N_{xz}}\right)^2 + \left(\frac{1}{N_{yz}}\right)^2 - \left(\frac{1}{N_x}\right)\left(\frac{1}{N_y}\right) - \left(\frac{1}{N_x}\right)\left(\frac{1}{N_z}\right) - \left(\frac{1}{N_y}\right)\left(\frac{1}{N_z}\right);$$

$$c = \left(\frac{1}{N_x}\right) + \left(\frac{1}{N_y}\right) + \left(\frac{1}{N_z}\right).$$

3. В реальных расчетных случаях, для которых можно найти какие-либо экспериментальные результаты, усталостная долговечность зависит не более, чем от трех компонент тензора напряжений, т.е. сложное НДС можно свести к определенному виду плоского НДС. Для этих случаев реальные значения коэффициента a уравнения (4) чрезвычайно малы и можно принять $a \approx 0$. Тогда кубическое уравнение (4) примет вид квадратного уравнения

$$bN_{fr}^2 + cN_{fr} - 1 = 0. \quad (4a)$$

Из двух полученных значений $n = N_{fr}$ при решении уравнения (4a) выбираем минимальное значение.

Практическое использование предлагаемой модели для расчетных оценок усталостной долговечности слоистых углепластиков при сложном НДС. Тензор (1) – это некий *математический* объект, представляющий собой совокупность девяти компонент накопленного усталостного повреждения. С использованием этого объекта можно адекватно характеризовать основные физические особенности накопления усталостных повреждений в слоистых углепластиках при сложном НДС.

Для обоснования этого утверждения приведем следующие доводы:

1. Тензор (1) позволяет “визуализировать” значения компонент накопленного повреждения от различных типов напряжений. По результатам анализа тензора для каждого расчетного случая можно ответить на главные вопросы, возникающие при расчете усталостной долговечности слоистых углепластиков при сложном НДС: 1) определение типов “повреждающих” напряжений – напряжений, существенно влияющих на усталостную долговечность рассматриваемого углепластика; 2) определение типов напряжений, практически не влияющих на усталостную долговечность рассматриваемого углепластика; эти напряжения и компоненты накопленного повреждения от этих напряжений в дальнейшем могут быть исключены из рассмотрения; 3) определение типа “превалирующих” напряжений – напряжений, вносящих наибольший вклад в суммарное накопленное повреждение; 4) определение моды усталостного разрушения слоистого углепластика, соответствующего напряжениям “превалирующего” типа.

2. Как показывает анализ тензоров типа (1) для конкретных расчетных случаев, главные выводы, которые можно сделать по результатам такого анализа (ожидаемая мода повреждения, тип “превалирующих” напряжений, тип “повреждающих” напряжений) практически идентичны выводам, которые можно сделать по результатам анализа критериев усталостного разрушения, представленных в работах [1–9] для тех же расчетных случаев.

Пример расчета усталостной долговечности слоистого углепластика с использованием тензора накопленных повреждений. Результаты усталостных испытаний образцов и

Таблица 1.

Тип напряжений	$\sigma(\tau)_{j \max} / \sigma_{x \min}$	$\sigma(\tau)_{j \max}$, МПа	$\sigma(\tau)_{j \min}$, МПа
σ_z	-0.11	17.27	0
τ_{xy}	-0.22	34.50	0
τ_{xz}	-0.10	15.70	0

элементов из слоистых углепластиков с реализацией сложного НДС очень редко встречаются в открытых публикациях и поэтому расчетный анализ таких результатов провести достаточно сложно. В настоящей статье приведен один из примеров такого анализа.

Выполнен расчет усталостной долговечности образцов опытной панели, изготовленной из слоистого углепластика. Усталостное нагружение образцов панели – регулярное циклическое нагружение доминирующим сжатием по продольной оси “х”, $R = \sigma_{x \min} / \sigma_{x \max} = -\infty$.

При продольном нагружении в зоне свободной кромки панели возникают дополнительные нормальные межслоевые напряжения σ_z , напряжения сдвига в плоскости τ_{xy} и напряжения поперечного сдвига τ_{xz} . Известно [14, 15], что подобные напряжения в значительной степени могут способствовать возникновению усталостных повреждений (расслоений) в зоне свободных кромок, что и происходит при усталостных испытаниях образцов панели.

Исходные данные и результаты расчета.

1. Материал панели – слоистый углепластик.
2. Известные пределы прочности материала в зоне рассматриваемого критического места: $F_x^- = -900$ МПа; $F_z^+ = 30$ МПа; $F_{xy} = 200$ МПа; $F_{xz} = 50$ МПа.
3. Усталостное нагружение панели – регулярное циклическое нагружение доминирующим сжатием по продольной оси “х”, $\sigma_{x \min} = -157.00$ МПа, $\sigma_{x \max} = 0$.

Значения синфазных экстремумов индуцированных циклических напряжений σ_z , τ_{xy} и τ_{xz} в зоне свободной кромки панели определены на основе КЭ – моделирования образца панели с учетом данных работ [14, 15] (табл. 1).

4. Известна усталостная долговечность опытных образцов панели при испытаниях на усталость: $N_1 = 480000$ циклов – усталостная долговечность образца № 1 (без обнаружения каких-либо повреждений в зоне свободной кромки); $N_2 = 128000$ циклов – усталостная долговечность образца № 2 (обнаружено прогрессирующее расслоение ламината панели в зоне геометрического концентратора по свободной кромке панели).

5. В качестве расчетных кривых усталости для различных типов действующих напряжений в условиях одноосного нагружения по результатам обработки данных работ [16–19] приняты кривые усталости, уравнения которых представлены в табл. 2.

В табл. 2 приведены средние значения усталостных долговечностей *при одноосном нагружении* панели от каждого вида рассматриваемых напряжений, определенные с использованием представленных уравнений.

6. С целью определения типов “повреждающих” напряжений и типа “превалирующих” напряжений выполнена оценка значений компонент накопленного повреждения от каждого типа циклических напряжений (табл. 3). Исходя из данных табл. 3, можно сделать выводы: к “повреждающим” напряжениям в рассматриваемом примере расчета можно отнести только напряжения σ_z и τ_{xz} ; напряжения σ_x и τ_{xy} можно ис-

Таблица 2. Уравнения кривых усталости типа (2а) и результаты расчета усталостной долговечности образца панели в зоне кромочного эффекта при одноосном нагружении панели

Уравнение	R	Источник	N , циклы
$\sigma_{x \min}/F_x = 1 - 0.06 \lg N$	$-\infty$	[16]	1.00E+13.76
$\sigma_{z \max}/F_z = 1 - 0.08 \lg N$	0	[17, 18]	201 500
$\tau_{xy \max}/F_{xy} = 1 - 0.08 \lg N$	0	[17, 18]	1.00E+10.34
$\tau_{xz \max}/F_{xz} = 1 - 0.10 \lg N$	0	[19]	7 244 360

Таблица 3. Результаты оценки значений компонент накопленного повреждения

Компоненты накопленного повреждения	Значения компонент
D_x	3.499E-09
D_z	0.9992
D_{xy}	9.203E-06
D_{xz}	0.0278
D_y, D_{yz}	0

ключить из рассмотрения; “превалирующими” напряжениями можно считать нормальные межслоевые напряжения растяжения σ_z .

7. Ожидаемая мода усталостного разрушения – расслоение ламината от нормальных межслоевых напряжений растяжения σ_z .

8. Уравнение (4а) для рассматриваемого расчетного случая принимает вид $(1.91 \times 10^{-14})N_{fr}^2 + (4.96 \times 10^{-6})N_{fr} - 1 = 0$. Решая это уравнение, получаем расчетное значение: $N_{fr} = 201300$ циклов. Учитывая достаточно значительный разброс экспериментальных усталостных долговечностей панели ($N_1 = 480000$ циклов и $N_2 = 128000$ циклов), можно сделать вывод, что полученное расчетное значение не противоречит экспериментальным данным.

9. Ожидаемая мода усталостного разрушения совпала с модой разрушения при испытаниях на усталость – прогрессирующее расслоение ламината панели в зоне геометрического концентратора по свободной кромке панели.

Обсуждение. Несмотря на определенную “смелость” допущений, принятых при формировании основных положений предлагаемой модели, практическое применение модели показывает адекватность этих допущений основным физическим особенностям известных критериев усталостного разрушения слоистых ПКМ, работающих в условиях сложного НДС.

Этот вывод можно обосновать сравнением метода расчетной оценки усталостной долговечности слоистого углепластика, представленного в настоящей статье, и критерия усталостного разрушения на основе модели Хашина [7] для идентичного расчетного случая.

Таблица 4. Сравнение основных особенностей критерия (5) и предлагаемой модели для рассматриваемого расчетного случая

Основные особенности	Критерий (5)	Предлагаемая модель
Рассматриваемые типы напряжений	$\sigma_z; \tau_{xz}; \tau_{yz}$	$\sigma_x; \sigma_z; \tau_{xy}; \tau_{xz}$
Параметры модели (критерия)	$Z_t(n, \sigma, R); S_{xz}(n, \tau, R);$ $S_{yz}(n, \tau, R); E_{xz}(n, \tau, R)$	$N_x; N_z; N_{xy}; N_{xz}$
Ожидаемая мода разрушения	Расслоение матрицы от нормальных межслоевых напряжений растяжения σ_z	Расслоение матрицы от нормальных межслоевых напряжений растяжения σ_z
Основные соотношения	(5)	(4a)

По данным работы [7] такой критерий можно представить соотношением

$$\left(\frac{\sigma_z}{Z_t(n, \sigma, R)} \right)^2 + \left(\frac{\frac{\tau_{xz}^2}{2E_{xz}(n, \tau, R)} + \frac{3}{4}\delta\tau_{xz}^4}{\frac{S_{xz}^2(n, \tau, R)}{2E_{xz}(n, \tau, R)} + \frac{3}{4}\delta S_{xz}^4(n, \tau, R)} \right) + \left(\frac{\tau_{yz}}{S_{yz}(n, \tau, R)} \right)^2 = g_{N^+}^2, \quad (5)$$

где σ_z — уровень циклических нормальных межслоевых напряжений растяжения; τ_{xz} — уровень циклических напряжений межслоевого сдвига (в плоскости $x-z$); τ_{yz} — уровень циклических напряжений межслоевого сдвига (в плоскости $y-z$); $Z_t(n, \sigma, R)$ — остаточная прочность на межслоевое растяжение ПКМ в процессе одноосного нормального межслоевого циклического растяжения; $S_{xz}(n, \tau, R)$ — остаточная прочность при межслоевом сдвиге (в плоскости $x-z$) ПКМ в процессе усталостного нагружения межслоевым сдвигом; $S_{yz}(n, \tau, R)$ — остаточная прочность при межслоевом сдвиге (в плоскости $y-z$) ПКМ в процессе усталостного нагружения межслоевым сдвигом; $E_{xz}(n, \tau, R)$ — остаточная жесткость при межслоевом сдвиге (в плоскости $x-z$) ПКМ в процессе усталостного нагружения межслоевым сдвигом; n — число циклов усталостного нагружения; R — коэффициент асимметрии циклического нагружения; δ — угол сдвига фазы; g_{N^+} — критерий усталостного разрушения (разрушение наступает, когда $g_{N^+} > 1$).

Критерий предполагает, что слоистый пластик будет расслаиваться в направлении нормальных межслоевых напряжений растяжения σ_z .

Сравнение основных особенностей критерия (5) и предлагаемой модели для рассматриваемого расчетного случая представлено в табл. 4.

По результатам анализа данных (табл. 4), можно сделать основные выводы: 1) предлагаемая модель и критерий (5) для рассматриваемого расчетного случая в качестве напряжений, определяющих усталостную долговечность слоистого ПКМ, используют практически одинаковые типы напряжений, это, прежде всего, напряжения $\sigma_z; \tau_{xz}; \tau_{yz}$; 2) предлагаемая модель и критерий (5) для рассматриваемого расчетного случая “предсказывают” одинаковую ожидаемую моду усталостного разрушения — расслоение матрицы от нормальных межслоевых напряжений растяжения σ_z ; 3) следует отметить значительную сложность и трудоемкость подготовки исходных данных для критерия (5): при использовании этого критерия для рассматриваемого расчетного случая необходимо предварительно определить остаточные прочности Z_t , S_{xz} и S_{yz} и остаточ-

ную жесткость E_{xz} рассматриваемого ПКМ. Очевидно, что получить такие значения значительно сложнее, чем значения долговечностей N_x, N_z, N_{xy}, N_{xz} ; 4) при использовании предлагаемой модели полученное расчетное значение усталостной долговечности $N_{fr} = 201300$ циклов при сложном НДС практически совпало со значением усталостной долговечности рассматриваемого ПКМ при одноосном нагружении напряжениями σ_z : $N_z = 201500$ циклов. Однако этот факт нельзя считать недостатком предлагаемой модели. Он свидетельствует лишь о значительном “превалировании” напряжений σ_z над всеми другими напряжениями в рассматриваемом расчетном случае; 5) в рассматриваемом расчетном случае можно констатировать соотношение коэффициентов b и c уравнения (4а): $b \ll c$. В этом случае уравнение $bN_{fr}^2 + cN_{fr} - 1 = 0$ фактически можно привести к линейному уравнению $cN_{fr} - 1 = 0$. Подобный вид уравнения (4а) характерен только для рассматриваемого расчетного случая и не может быть рекомендован для других случаев сложного НДС углепластиков.

Заключение. В качестве определенной альтернативы известным критериям разрушения слоистых ПКМ, представленным в работах [1–9], предложена феноменологическая модель накопления усталостного повреждения, с использованием тензорной меры накопленного повреждения от циклических напряжений различного типа в слоистых углепластиках, работающих в условиях сложного НДС и приведен пример расчета усталостной долговечности с использованием предложенной модели. Предложенная модель отличается от критериев разрушения, представленных в работах [1–9], прежде всего своей *универсальностью* — с использованием тензорной меры накопленного повреждения модель позволяет оценить усталостную долговечность слоистых углепластиков при *различных* типах сложного НДС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fatigue in composites / Ed: Harris B. Woodhead Publishing Ltd and CRC Press LLC, 2003.
2. Fatigue life prediction of composites and composite structures / Ed. Vassilopoulos A.P. Woodhead Publishing Limited and CRC Press LLC, 2010.
3. Vassilopoulos A.P., Keller T. Fatigue of Fiber-reinforced Composites, Springer-Verlag London Limited, 2011.
4. Philippidis T.P., Vassilopoulos A.P. Fatigue strength prediction under multiaxial stress // J. of Composite Materials. 1999. V. 33(17). P. 1578.
5. Philippidis T.P., Vassilopoulos A.P. Complex stress state effect on fatigue life of GRP laminates. Part II, Theoretical formulation // Int. J. Fatigue. 2002. V. 24(8). P. 825.
6. Kawai M. A phenomenological model for off-axis fatigue behavior of unidirectional polymer matrix composites under different stress ratios // Compos. Part A-Appl. 2004. V. 35(7–8). P. 955.
7. Shokrieh M.M., Lessard L.B. Fatigue under multiaxial stress systems. In: Fatigue in composites (Ed: Harris B.). Woodhead Publishing Ltd and CRC Press LLC, 2003. P. 63.
8. Strizhjus V. Fatigue failure criterion of laminated composites under a complex stress-strain state // Mechanics of Composite Materials. 2016. V. 52(3). P. 369.
9. Donadon M.V., Arbelo M.A., Rizzi P., Montestruque C.V., Amaro L., Castro S., Shiino M. A Multiaxial Fatigue Damage Model for Isotropic Materials // Proceedings of the 30th Symposium of the International Committee on Aeronautical Fatigue, June 2–7, 2019, Krakow, Poland. P. 336.
10. Акивис М.А., Гольдберг В.В. Тензорное исчисление. М.: Наука, 1969. С. 352.
11. Победра Б.Е. Лекции по тензорному анализу: Учеб. пособие. (3-е изд.). М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 264.
12. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление: Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2001. С. 575.
13. Mandell J.F. Fatigue behaviour of fibre-resin composites, In: Developments in Reinforced Plastics 2 (Ed. Pritchard G.). Applied Science Publishers, London, 1982. P. 67.

-
14. Дударьков Ю.И., Лимонин М.В., Левченко Е.А. Эффект свободной кромки в слоистых композитах // Ж. Авиационная промышленность. 2012. № 4. С. 48.
 15. Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонин М.В. Влияние структуры пакета на краевые эффекты в слоистых композитах // Ж. Космонавтика. 2014. № 3(9). С. 25.
 16. Tomblin J., Seneviratne W. Determining the Fatigue Life of Composite Aircraft Structures Using Life and Load-Enhancement Factors // Report DOT/FAA/AR-10/6, June 2011.
 17. Sims G.D. Fatigue test methods, problems and standards / In: Fatigue in composites (Ed. Harris B.). Woodhead Publishing Ltd and CRC Press LLC, 2003. P. 36–62.
 18. Broer A.A.R. Fatigue life prediction of carbon fibre-reinforced epoxy laminates using a single *S-N* curve // Master of Science Thesis, Delft University of Technology, 2018.
 19. Работнов Ю.Н., Туполев А.А., Кутыинов В.Ф., Когаев В.П., Березин А.В., Сулименков В.В. Применение углепластиков в конструкции летательных аппаратов // Ж. Механика композиционных материалов. 1981. № 4. С. 657.