

---

---

**НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ,  
ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ**

---

---

УДК 536.2;539.3

**ОЦЕНКА ДОПУСТИМОЙ ОСЕВОЙ СЖИМАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ  
НА ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ  
ВЕРТИКАЛЬНОГО КРИОГЕННОГО БАКА ПРИ ЕГО ЗАПОЛНЕНИИ**© 2019 г. В. С. Зарубин<sup>1,\*</sup>, В. Н. Зимин<sup>1</sup>, Г. Н. Кувьркин<sup>1</sup><sup>1</sup> *Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия**\*e-mail: fn2@bmstu.ru*

Поступила в редакцию 11.07.2019 г.

Принята к публикации 26.08.2019 г.

При захлаживании или заполнении вертикально расположенного цилиндрического криогенного бака вдоль образующей его оболочки возникает неравномерное распределение температуры, перемещающееся вместе с подъемом уровня жидкости. Это приводит к искривлению образующей, возникновению подвижной области краевого эффекта и снижению сопротивления оболочки деформированию под действием осевой сжимающей силы. На основе разработанной математической модели термонапряженного состояния круговой цилиндрической оболочки такого бака установлена зависимость между сжимающей силой, геометрическими параметрами оболочки и характеристиками ее материала, скоростью подъема уровня криогенной жидкости и ее свойствами. Эта зависимость позволяет оценить допустимое в пределах линейно-упругого поведения материала оболочки значение действующей на оболочку сжимающей нагрузки. Такая оценка полезна при расчете и проектировании оболочек криогенных баков летательных аппаратов.

*Ключевые слова:* криогенный бак, цилиндрическая оболочка, математическая модель, краевой эффект, осевая нагрузка

**DOI:** 10.1134/S0235711919070162

**1. Введение.** Крупногабаритные емкости для хранения и транспортировки сжиженных газов находят широкое распространение в различных областях техники. Сжиженный природный газ [1], основную долю которого составляет метан, является перспективным горючим для двигателей летательных аппаратов [2]. Для жидкостных ракетных двигателей в качестве окислителя и горючего используют соответственно жидкие кислород и водород [3, 4]. Процессы заполнения или захлаживания криогенной емкости низкотемпературной жидкостью, регламентированные перед заполнением емкости [5], связаны с возникновением в ее оболочке неравномерного распределения температуры. В силу существенного различия интенсивности теплообмена с жидкой и газообразной фазами наиболее резко изменяется температура оболочки в зоне уровня криогенной жидкости (как подвижного, так и неподвижного).

Одним из распространенных вариантов крупногабаритных криогенных емкостей являются топливные баки первых ступеней жидкостных ракет-носителей, основным конструктивным элементом которых является тонкостенная круговая цилиндрическая оболочка [4, 6]. Неравномерное распределение температуры в окрестности уровня криогенной жидкости вызывает искривление образующей такой оболочки и снижает ее сопротивление действию приложенной осевой сжимающей нагрузки. В данной статье с использованием результатов математического моделирования

термонапряженного состояния цилиндрической оболочки криогенного бака при его заполнении [7–9] получены соотношения, позволяющие оценить допустимую осевую нагрузку на оболочку, при которой ее материал остается в пределах линейно-упругой области.

**2. Температурное состояние оболочки.** При заполнении вертикально расположенного цилиндрического криогенного бака на температурное состояние его оболочки влияют ряд факторов. Среди них скорость подъема уровня жидкости и интенсивность теплообмена на смоченном и несмоченном участках внутренней поверхности оболочки, определяемые соответственно коэффициентом теплообмена  $\alpha_1$  с жидкостью, имеющую температуру  $T_1^*$ , и коэффициентом теплообмена  $\alpha_2$  с имеющей температуру  $T_2^*$  газовой средой в полости бака над уровнем жидкости.

Для уменьшения подвода теплоты от внешней среды и снижения потерь криогенной жидкости при заполнении бака внешнюю поверхность его оболочки можно покрыть слоем малотеплоемкой теплоизоляции с коэффициентом теплопроводности  $\lambda'$  и толщиной  $h'$ . Например, оболочка топливного бака многоразовой космической системы Space-Shuttle [6] была покрыта слоем пенополиуретана, что предотвращает образование инея и наледи на внешней поверхности бака в период его заполнения. При наличии внешнего слоя теплоизоляции эффективное значение коэффициента теплообмена оболочки с внешней средой определяет равенство  $\alpha_3 = 1/(1/\alpha_3' + h'/\lambda')$ , где  $\alpha_3'$  – коэффициент теплообмена поверхности теплоизоляции с внешней средой, имеющей температуру  $T_3^*$ .

Если в качестве материала оболочки бака использовать достаточно теплопроводный материал (например, алюминиевый сплав АМгб с коэффициентом теплопроводности  $\lambda = 122$  Вт/(м · К) [10]), то изменением температуры по толщине  $h$  оболочки можно пренебречь. Тогда при наличии осевой симметрии конструкции бака достаточно учитывать зависимость температуры оболочки лишь от времени  $t$  и координаты  $x$ , отсчитываемой от уровня криогенной жидкости вверх вдоль образующей оболочки. В окрестности уровня жидкости распределение температуры в оболочке удовлетворяет условиям непрерывности [7]

$$T_1(0, t) = T_2(0, t), \quad \left. \frac{\partial T_1(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T_2(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad (1)$$

где  $T_1(x, t)$  и  $T_2(x, t)$  – распределения температуры соответственно в уже смоченных и еще несмоченных участках оболочки.

При наличии внешнего слоя теплоизоляции с удельной объемной теплоемкостью  $c'$  справедливо неравенство  $h'c' \ll hc$ , где  $c$  – удельная объемная теплоемкость материала оболочки. Поэтому влиянием теплоемкости этого слоя можно пренебречь. Тогда при движении уровня жидкости вверх со скоростью  $v$  распределения температуры участков оболочки будут удовлетворять, согласно закону сохранения тепловой энергии, дифференциальным уравнениям [8] (аргументы функций  $T_1(x, t)$  и  $T_2(x, t)$  опущены)

$$c \frac{\partial T_1}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + cv \frac{\partial T_1}{\partial x} + \alpha_1(T_1^* - T_1)/h + \alpha_3(T_3^* - T_1)/h, \quad (2)$$

$$c \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + cv \frac{\partial T_2}{\partial x} + \alpha_2(T_2^* - T_2)/h + \alpha_3(T_3^* - T_2)/h. \quad (3)$$

По мере удаления от уровня жидкости неравномерность распределения температуры вдоль образующей оболочки будет убывать. Тогда помимо условий непрерывности (1) для уравнений (2) и (3) можно задать еще два граничных условия

$$\left. \frac{\partial T_1(x,t)}{\partial x} \right|_{x \rightarrow +\infty} = 0, \quad \left. \frac{\partial T_2(x,t)}{\partial x} \right|_{x \rightarrow -\infty} = 0.$$

Если условия теплообмена не зависят от времени, а уровень жидкости неподвижен ( $v = 0$ ), то распределение температуры в оболочке будет стремиться при  $t \rightarrow \infty$  к некоторому установившемуся температурному состоянию, для которого из уравнений (2) и (3) при  $t \rightarrow \infty$  следуют условия

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} T_1(x,t) = \tilde{T}_1 = \frac{\alpha_1 T_1^* + \alpha_3 T_3^*}{\alpha_1 + \alpha_3}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} T_2(x,t) = \tilde{T}_2 = \frac{\alpha_2 T_1^* + \alpha_3 T_3^*}{\alpha_2 + \alpha_3}. \quad (4)$$

Это состояние в момент начала движения уровня жидкости определит начальное условие для уравнений (2) и (3) при  $v > 0$ .

При независимых от  $t$  и  $x$  параметрах теплообмена и постоянной скорости движения уровня жидкости левые части соотношений (2), (3) при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к нулю. В этом случае соотношения (2), (3) перейдут в обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка [9]

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} + \frac{v}{a} \frac{dT_1}{dx} + H_1(\tilde{T}_1 - T_1)/h = 0, \quad \frac{d^2 T_2}{dx^2} + \frac{v}{a} \frac{dT_2}{dx} + H_2(\tilde{T}_2 - T_2)/h = 0,$$

где  $a = \lambda/c$  – коэффициент температуропроводности материала оболочки,  $H_1 = (\alpha_1 + \alpha_3)/\lambda$ ,  $H_2 = (\alpha_2 + \alpha_3)/\lambda$ . Эти уравнения с учетом граничных условий вида (1) и (4) имеют решения [10, 11]

$$\frac{T_1(x) - \tilde{T}_1}{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1} = \frac{\exp(K_1 x)}{1 + K_1/K_2}, \quad x < 0; \quad \frac{T_2(x) - \tilde{T}_1}{\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1} = 1 - \frac{\exp(-K_2 x)}{1 + K_2/K_1}, \quad x > 0. \quad (5)$$

Здесь  $K_1 = \sqrt{V^2 + H_1^2} + V$ ,  $K_2 = \sqrt{V^2 + H_2^2} - V$ ,  $V = v/(2a)$ . Соотношения (5) описывают квазистационарное распределение температуры в оболочке. При  $x = 0$  на границе между смоченной и несмоченной участками поверхности оболочки ее температура равна  $T_0 = \tilde{T}_1 + (\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1)/(1 + K_1/K_2)$ .

Из формул (5) в силу  $\exp(-3) \approx 0.05$  следует, что неравномерность квазистационарного распределения температуры в первом приближении достаточно учитывать лишь при  $x \in (-3/K_1, 3/K_2)$ . За пределами этого промежутка температуру смоченной и несмоченной частей оболочки можно принять равными  $\tilde{T}_1$  и  $\tilde{T}_2$  соответственно. При  $v \approx 10$  мм/с переход от однородного начального распределения температуры к квазистационарному в оболочке толщиной не более 10 мм, выполненной из сплава АМгб (при этом  $2hV \approx 1$ ), можно считать практически завершенным за период времени, не превышающий 10 с [9].

При неподвижном уровне жидкости температуру всего смоченного участка оболочки в первом приближении можно положить равной температуре жидкости, т.е. принять  $T_1(x) \approx \tilde{T}_1 \approx T_1^*$  [7], т.к. отношение  $\alpha_1/\alpha_2$  велико благодаря высокой интенсивности теплообмена на смоченной поверхности оболочки, а значения  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  обычно сопоставимы между собой [8].

На рис. 1 приведены распределения безразмерной температуры  $\Theta(\xi) = (T(\xi) - \tilde{T}_1)/(\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1)$  в зависимости от безразмерной координаты  $\xi = x/h$  при фиксированных значениях параметров  $\tilde{H}_1 = H_1 h = 1$ ,  $\tilde{H}_2 = H_2 h = 0.02$  и различных значени-

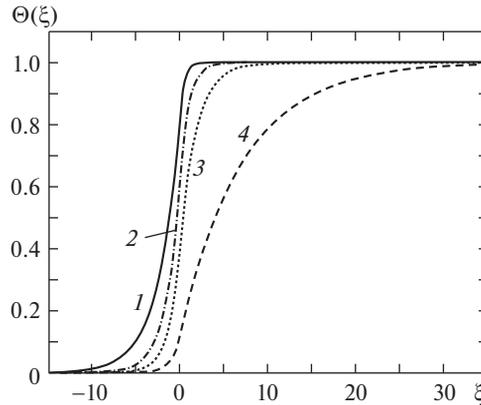


Рис. 1. Распределения безразмерной температуры  $\Theta(\theta)$  в зависимости от безразмерной координаты  $\theta$  при  $\tilde{H}_1 = 1$ ,  $\tilde{H}_2 = 0.02$  и различных значениях параметра  $\tilde{V}$ : 1 – 1; 2 – 0.5; 3 – 0.25 и 4 – 0.

ях параметра  $\tilde{V} = Vh$ , в том числе при  $\tilde{V} = 0$ , что соответствует неподвижному уровню жидкости (5).

**3. Радиальное перемещение оболочки.** В силу температурного расширения материала оболочки неравномерное распределение температуры вдоль образующей криогенного бака (5) вызывает радиальное перемещение оболочки. Непосредственным влиянием внутреннего давления в баке, избыточного по отношению к давлению окружающей среды, можно пренебречь, поскольку при заполнении бака с открытым дренажным клапаном [5] давление  $p_0$  в полости бака над уровнем жидкости может превышать давление окружающей бак воздуха не более, чем на 0.2 МПа [11]. Гидростатической составляющей давления на смоченной части оболочки водородного бака также можно пренебречь в силу малой плотности жидкого водорода. Для бака с жидкими кислородом или метаном, плотности которых соответственно 1136 кг/м<sup>3</sup> и 426 кг/м<sup>3</sup> [12] при стандартном атмосферном давлении 101.3 кПа и температуре кипения, это давление более существенно, но его влияние будет заметно лишь на глубине за пределами области краевого эффекта в окрестности уровня жидкости.

При анализе радиального перемещения оболочки помимо распределения температуры вдоль образующей бака достаточно учитывать лишь влияние осевой сжимающей силы  $P$  и разгружающий эффект давления  $p_0$ , определяемый в первом приближении силой  $P_1 = \pi R^2 p_0$ , где  $R$  – радиус средней поверхности оболочки.

При линейно-упругом поведении материала осесимметричной оболочки отнесенные к ее средней поверхности погонные усилия  $N_\theta$  и  $N_y$  соответственно в меридиональном и окружном направлениях представим в виде [7, 9]

$$N_\theta = Eh \frac{\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_y - (1 + \nu) \varepsilon_T}{1 - \nu^2}, \quad N_y = Eh \frac{\varepsilon_y + \nu \varepsilon_\theta - (1 + \nu) \varepsilon_T}{1 - \nu^2}, \quad (6)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_T = \alpha_T (T - \tilde{T}_1)$  – температурная деформация,  $E$ ,  $\nu$  и  $\alpha_T$  – продольный модуль упругости (модуль Юнга), коэффициент Пуассона и температурный коэффициент линейного расширения материала оболочки,  $\varepsilon_\theta$  и  $\varepsilon_y = w/R$  – деформации средней поверхности соответственно в меридиональном и окружном направлениях,  $w$  – перемещение средней поверхности в радиальном направлении.

Приложенной к верхнему торцу оболочки осевой сжимающей силе  $P$  и разгружающей силе  $P_1$  отвечает сжимающая погонная нагрузка  $N = (P - P_1)/(2\pi R)$ . С учетом этой нагрузки условие равновесия оболочки в радиальном направлении в линейном приближении имеет вид [10]

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + N \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{N_y}{R} = 0, \quad (7)$$

где  $M_x = D(d^2 w/dx^2 - \nu w/R^2)$  – погонный изгибающий момент в поперечном сечении оболочки,  $D = (Eh^3/12)/(1 - \nu^2)$  – цилиндрическая погонная жесткость оболочки на изгиб. В силу неравенства  $|d^2 w/dx^2| \gg |\nu w/R^2|$  влияние изменения кривизны оболочки в окружном направлении можно не учитывать.

Исключив из соотношений (6) деформацию  $\varepsilon_\theta$  получим

$$N_y = \nu N_\theta + Eh(w/R - \alpha_T(T - \tilde{T}_1)). \quad (8)$$

После подстановки формул для  $M_x$  и  $N_y$  в уравнение (7) с учетом приближенного равенства  $N_\theta \approx -N$  запишем

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 2(\beta^2 - \gamma^2) \frac{d^2 w}{dx^2} + (\beta^2 + \gamma^2)^2 w = \frac{\nu N}{DR} + 12\alpha_T \frac{T - \tilde{T}_1}{h^2 R}. \quad (9)$$

Здесь  $4\beta^2 = 2\sqrt{EhD}/R + N/D$  и  $4\gamma^2 = 2\sqrt{EhD}/R - N/D$ . Обыкновенное дифференциальное уравнение (9) четвертого порядка описывает краевой эффект в окрестности уровня жидкости с учетом отклонения образующей осесимметричной оболочки криогенного бака от прямолинейной формы.

Характеристическое уравнение, соответствующее однородной части уравнения (9), имеет две пары комплексно сопряженных корней  $\gamma \pm \beta i$  и  $-\gamma \pm \beta i$ . Вне зоны краевого эффекта функция  $w(x)$  должна совпадать с частным решением  $w^*(x)$  уравнения (9), а общее решение соответствующего однородного уравнения при  $|x| \rightarrow \infty$  должно убывать по абсолютному значению и стремиться к нулю. Этому условию при  $x < 0$  удовлетворяет лишь первая пара корней и общим решением однородного уравнения будет соотношение

$$w_1^0(x) = (C_1' \cos \beta x + C_1'' \sin \beta x) \exp(\gamma x), \quad (10)$$

а при  $x > 0$  удовлетворяет лишь вторая пара корней, так что общее решение примет вид

$$w_2^0(x) = (C_2' \cos \beta x + C_2'' \sin \beta x) \exp(-\gamma x). \quad (11)$$

Обозначенные литерой  $C$  постоянные коэффициенты в равенствах (10) и (11) определим с учетом частных решений уравнения (9) из условия непрерывности при  $x = 0$  функции  $w(x)$  и первых трех ее производных.

При квазистационарном распределении температуры, описываемым соотношениями (5), частными решениями уравнения (9) будут при  $x < 0$

$$w_1^*(x) = \frac{\nu NR}{Eh} + \frac{w_T \exp(K_1 x)}{h^2 R^2 B'(1 + K_1/K_2)}, \quad (12)$$

где  $w_T = \alpha_T(\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1)R$  и  $B' = K_1^4 + 2(\beta_0^2 - \gamma_0^2)K_1^2 + (\beta_0^2 + \gamma_0^2)^2$ , а при  $x > 0$  –

$$w_2^*(x) = \frac{\nu NR}{Eh} + \frac{w_T}{1 - \nu^2} - \frac{w_T \exp(-K_2 x)}{h^2 R^2 B''(1 + K_2/K_1)}, \quad (13)$$

где  $B'' = K_2^4 + 2(\beta_0^2 - \gamma_0^2)K_2^2 + (\beta_0^2 + \gamma_0^2)^2$ .

Общее решение  $w^\circ(x) + w^*(x)$  уравнения (9) и первые три производные этого решения должны удовлетворять при  $x = 0$  условиям непрерывности, что с учетом равенств (10)–(13) приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} C_2' - C_1' &= A_1, \\ \gamma C_2' + \beta C_2'' + \gamma C_1' - \beta C_1'' &= B_1, \\ (\gamma^2 - \beta^2)C_2' + 2\beta\gamma C_2'' + (\beta^2 - \gamma^2)C_1' + 2\beta\gamma C_1'' &= A_2, \\ (\gamma^3 - 3\beta\gamma^2)C_2' - (\beta^3 - 3\beta\gamma^2)C_2'' + (\gamma^3 - 3\beta\gamma^2)C_1' + (\beta^3 - 3\beta\gamma^2)C_1'' &= B_2, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где

$$A_1 = \frac{w_T}{1 - \nu^2} - \frac{w_T/(h^2 R^2)}{K_1 + K_2} \left( \frac{K_1}{B''} + \frac{K_2}{B'} \right), \quad B_1 = \frac{K_1 K_2 w_T}{(K_1 + K_2) h^2 R^2} \left( \frac{1}{B''} - \frac{1}{B'} \right),$$

$$A_2 = -\frac{K_1 K_2 w_T}{(K_1 + K_2) h^2 R} \left( \frac{K_2}{B''} + \frac{K_1}{B'} \right), \quad B_2 = \frac{K_1 K_2 w_T}{(K_1 + K_2) h^2 R} \left( \frac{K_2^2}{B''} - \frac{K_1^2}{B'} \right).$$

Решением системы уравнений (14) будут равенства

$$C_1' = \frac{A_1}{2} - \frac{B_1(\beta^2 - 3\gamma^2) + B_2}{4(\beta^2 + \gamma^2)\gamma}, \quad C_1'' = \frac{A_1(\beta^2 - \gamma^2) + A_2}{4\beta\gamma} + \frac{B_1(3\beta^2 - \gamma^2) + B_2}{4\beta(\beta^2 + \gamma^2)},$$

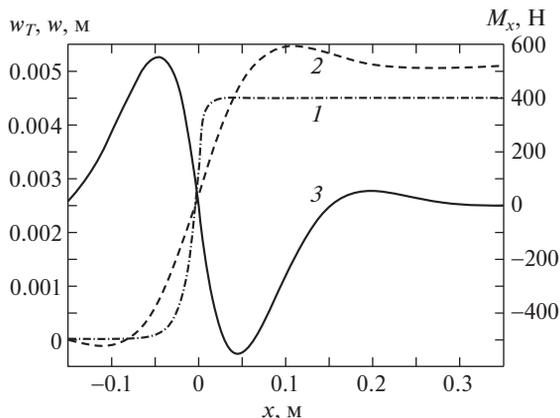
$$C_2' = -\frac{A_1}{2} - \frac{B_1(\beta^2 - 3\gamma^2) + B_2}{4(\beta^2 + \gamma^2)\gamma}, \quad C_2'' = \frac{A_1(\beta^2 - \gamma^2) + A_2}{4\beta\gamma} - \frac{B_1(3\beta^2 - \gamma^2) + B_2}{4\beta(\beta^2 + \gamma^2)}.$$

В итоге для неоднородного уравнения (9) общее решение  $w_1(x) = w_1^\circ + w_1^*(x)$  при  $x < 0$  определяем равенствами (10), (12), а общее решение  $w_2(x) = w_2^\circ + w_2^*(x)$  при  $x > 0$  – равенствами (11), (13).

Полученные соотношения использованы для построения графиков зависимостей (рис. 2) от координаты  $x$  температурного приращения  $w_T' = \varepsilon_T R$  радиуса оболочки, ее полного радиального перемещения  $w$  и осевого погонного изгибающего момента  $M$  при заполнении криогенного бака жидким кислородом. В расчетах принято:  $h = 0.005$  м;  $R = 1$  м;  $\tilde{T}_2 - \tilde{T}_1 = 182$  К;  $\nu = 0.01$  м/с;  $H_1 h = 0.5$ ;  $H_2 h = 0.01$ ,  $N = 3 \cdot 10^5$  Н/м; материал оболочки – алюминиевый сплав АМгб, для которого  $\lambda = 122$  Вт/(м · К),  $a = 5 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с,  $E = 71$  ГПа,  $\nu = 0.31$  и  $\alpha_T = 24.7 \cdot 10^{-6}$  1/К.

**4. Напряженное состояние оболочки.** Определитель матрицы системы уравнений (14) обращается в нуль при значении  $N_{cr} = (2/R)\sqrt{DEh}$ , т.е. при верхнем значении критического погонного усилия, соответствующего потере устойчивости достаточно длинной цилиндрической линейно-упругой оболочки, сохраняющей в докритическом напряженном состоянии прямолинейность образующей [13, 14]. Значению  $N_{cr}$  отвечает критическое значение осевого сжимающего напряжения  $\sigma_{cr} \approx 0.605Eh/R$  [7], т.е. эта формула применима лишь при условии  $h/R < 1.65\sigma_Y/E$ , где  $\sigma_Y$  – предел текучести материала оболочки. Для сплава АМгб при температуре 78 К  $\sigma_Y = 185$  МПа и  $E = 71$  ГПа [10], т.е. отношение  $h/R$  не должно превышать 0.0043, что соответствует весьма тонкостенной оболочке.

Искривление образующей оболочки в зоне подвижного краевого эффекта приводит к возрастанию локальных абсолютных значений напряжений, которые могут превысить предел текучести материала оболочки. При этом известные подходы анализа упругой устойчивости оболочки станут неприменимы. Пластическое деформирова-



**Рис. 2.** Графики зависимости от осевой координаты  $x$  температурного приращения  $w_T = \varepsilon_T R$  радиуса оболочки толщиной  $h = 0.005$  м, ее полного радиального перемещения  $w$  и осевого погонного изгибающего момента  $M_x$  (кривые 1, 2 и 3 соответственно) при скорости  $v = 0.01$  м/с подъема уровня жидкости.

ние материала оболочки в зоне краевого эффекта, возникающего на стадии заполнения криогенного бака, вызовет остаточное формоизменение, влияющее на несущую способность конструкции на последующих этапах ее эксплуатации. В связи с этим актуальным является анализ напряженного состояния оболочки бака в зоне краевого эффекта с точки зрения возможности выхода материала за пределы области линейной упругости.

В рамках допущения о плоском напряженном состоянии оболочки примем, что линейно-упругое поведение материала согласно критерию Мизеса [7] имеет место при условии

$$\sigma_y > \sigma_i = \sqrt{\sigma_\theta^2 + \sigma_y^2} - \sigma_\theta \sigma_y, \quad (15)$$

где  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений,  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_y$  – напряжения в меридиональном и окружном направлениях соответственно. Для обеспечения надежного функционирования рассматриваемой оболочки в пределах линейно-упругой области условие (15) должно быть выполнено с некоторым регламентированным запасом, определяемым коэффициентом при величине  $\sigma_i$ , превосходящим единицу.

Изменение радиального перемещения средней поверхности оболочки в зоне подвижного краевого эффекта (рис. 2) позволяет заключить, что при фиксированном сжимающем погонном усилии  $N$  и примерно равных ближайших к уровню жидкости экстремальных значениях осевого погонного изгибающего момента наибольшие значения  $\sigma_i$  будут соответствовать окрестностям точек с абсциссами этих экстремумов на сжатой наружной поверхности смоченной части оболочки и на ее внутренней поверхности несмоченного участка. Осевое сжимающее напряжение в окрестностях этих точек, вызванное осевым погонным изгибающим моментом  $M_x$ , равно  $\sigma_M = -6|M_x|/h^2$ , а осевой сжимающей силой –  $\sigma_N = -N/h$ . Следовательно, совпадающее в данном случае с меридиональным осевое напряжение, наибольшее по абсолютному значению, определяет равенство  $\sigma_x^* = -|6M_x|/h^2 - N/h$ . С погонным изгибающим моментом  $M_y = vM_x$  в окружном направлении связано сжимающее напря-

жение  $\sigma'_y = -6\nu|M_x|/h^2$ , а с радиальным перемещением  $w$  – напряжение  $\sigma''_y = N_y/h$  (в формуле (8) для  $N_y$  следует  $N_\theta$  заменить на  $-N$ ). Значение  $N_y$  может быть как положительным, так и отрицательным.

В линейном приближении, пренебрегая величиной  $(dw/dx)^2/2$  по сравнению с единицей, в формуле (15) можно заменить напряжения  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_y$  соответственно на  $\sigma_x^*$  и  $\sigma_y^* = \sigma'_y + \sigma''_y$  и использовать при вычислениях формулу

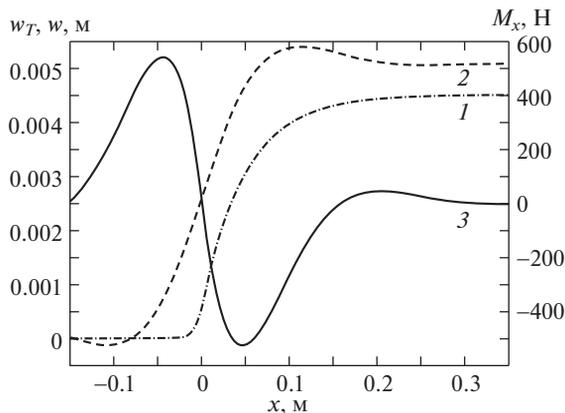
$$\sigma_i = \sqrt{(\sigma_x^*)^2 + (\sigma_y^*)^2} - \sigma_x^* \sigma_y^*. \quad (16)$$

Например, при исходных данных, использованных при построении графиков на рис. 2, сжимающей погонной нагрузке  $N = 3 \cdot 10^5$  Н/м соответствует составляющая осевого сжимающего напряжения  $\sigma_N = -60$  МПа. На смоченной части оболочки ближайший к уровню жидкости экстремум осевого погонного изгибающего момента является максимумом, равным 551.4 Н. Ему соответствует на внутренней поверхности этого участка сжимающее напряжение  $\sigma_M = -132.3$  МПа. Таким образом, на этой поверхности суммарное сжимающее напряжение имеет значение  $\sigma_x^* = -192.3$  МПа, которое по абсолютному значению превосходит предел текучести  $\sigma_Y$  сплава АМг6. В окружном направлении на этой поверхности в окрестности указанного максимума изгибающего момента имеем  $\sigma'_y = -41.0$  МПа и  $\sigma''_y = 24.3$  МПа. В итоге получим  $\sigma_y^* = -16.7$  МПа и, согласно формуле (16),  $\sigma_i = 184.5$  МПа, что практически совпадает с указанным выше пределом текучести.

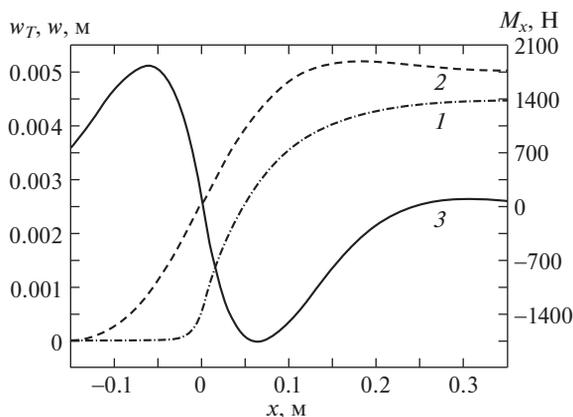
Аналогичные подсчеты напряжений в окрестности точки ближайшего к уровню жидкости экстремума осевого погонного изгибающего момента на несмоченном участке оболочки приводят к несколько меньшему значению  $\sigma_i = 176.5$  МПа. При уменьшении скорости движения уровня жидкости и фиксированном значении погонной силы  $N$  интенсивность напряжения  $\sigma_i$  возрастает. Основной причиной является более пологое изменение температуры несмоченной части оболочки в окрестности уровня жидкости и, наоборот, более резкое изменение в этой окрестности температуры смоченной части оболочки. Это приводит к увеличению положительного значения  $N_y$  и возрастанию  $\sigma_i$ .

На рис. 3 представлены графики при неподвижном уровне жидкости и прежнем значении  $N = 3 \cdot 10^5$  Н/м. В этом случае на несмоченной части оболочки наибольшее значение 226.3 МПа интенсивности напряжения превышает предел текучести, но и на смоченной части соответствующее значение 186.1 МПа также несколько выше допустимого. Условие  $\sigma_Y > \sigma_i$  на несмоченной части оболочки может быть выполнено лишь при значении  $N < 1.74 \cdot 10^5$  Н/м.

Увеличение толщины оболочки позволяет даже в случае неподвижного уровня жидкости повысить значение  $N$  при выполнении условия, определяемого соотношением (15). На рис. 4 приведены графики при толщине  $h = 0.01$  м и прежних остальных исходных данных. Для несмоченной части оболочки выполнению условия  $\sigma_i \leq \sigma_Y = 185$  МПа соответствует значение  $N = 4.27 \cdot 10^5$  Н/м. При этом на смоченной части наибольшее значение интенсивности напряжения не превышает 160 МПа. При заполнении бака допустимый уровень осевой сжимающей нагрузки возрастает, но более напряженным становится смоченный участок оболочки вблизи уровня жидкости. При скорости подъема уровня жидкости  $v = 0.005$  м/с условие (15) выполнимо, если  $N < 6.53 \cdot 10^5$  Н/м, а при  $v = 0.01$  м/с, если  $N < 7.24 \cdot 10^5$  Н/м.



**Рис. 3.** Графики зависимости от осевой координаты  $x$  температурного приращения  $w_T = \varepsilon_T R$  радиуса оболочки толщиной  $h = 0.005$  м, ее полного радиального перемещения  $w$  и осевого погонного изгибающего момента  $M_x$  (кривые 1, 2 и 3 соответственно) при неподвижном уровне жидкости.



**Рис. 4.** Графики зависимости от осевой координаты  $x$  температурного приращения  $w_T = \varepsilon_T R$  радиуса оболочки толщиной  $h = 0.01$  м, ее полного радиального перемещения  $w$  и осевого погонного изгибающего момента  $M_x$  (кривые 1, 2 и 3 соответственно) при неподвижном уровне жидкости.

**Заключение.** Количественный анализ комплексной математической модели, описывающей термодетформированное состояние подкрепленной стрингерами оболочки вертикально расположенного цилиндрического криогенного бака при его заполнении, позволяет оценить неравномерность распределения температуры в оболочке и ее радиального перемещения в зоне движущегося уровня криогенной жидкости, а также найти экстремальные значения погонного изгибающего момента. Это дает возможность уточнить постановку и решение задачи об устойчивости оболочки бака при действии осевой сжимающей нагрузки.

Полученные соотношения можно применить и для оценки допустимой нагрузки в случае оболочки бака, подкрепленной силовым набором (достаточно часто расположенными стрингерами и кольцевыми ребрами или вафельным подкреплением [15]),

если привести характеристики жесткости такой оболочки к ее некоторой условной средней поверхности [16].

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альтернативные топлива для двигателей внутреннего сгорания / Под ред. А.А. Александрова, В.А. Маркова. М.: ООО НИЦ “Инженер”, ООО “Онико-М”, 2012. С. 791.
2. Рачук В.С., Коротеев А.С., Каторгин Б.И. и др. Обоснование выбора компонентов ракетного топлива для двигательных установок первой ступени многоразовой ракетно-космической системы // Ж. Авиакосмическая техника и технология. 2010. № 1. С. 19.
3. Феодосьев В.И. Основы техники ракетного полета. М.: Наука, 1979. С. 496.
4. Ковалев Б.К. Развитие ракетно-космических систем выведения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. С. 398.
5. Архаров А.М., Кунис И.Д. Криогенные заправочные системы стартовых ракетно-космических комплексов / Под ред. И.В. Бармина. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. С. 252.
6. External Tank Thermal Protection System. <https://ru.scribd.com/document/349711/NASA-114022main-TPS-FS> (26.01.2019).
7. Балабух Л.И., Колесников К.С., Зарубин В.С., Алфутов Н.А., Усюкин В.И., Чижов В.Ф. Основы строительной механики ракет. Москва, Высшая школа, 1969. С. 496.
8. Зарубин В.С., Зимин В.Н., Кувыркин Г.Н. Математическое моделирование температурного состояния оболочки цилиндрической криогенной емкости при заполнении и опорожнении // Математика и математическое моделирование. 2015. № 6. <https://doi.org/10.7463/mathm0615.08829350>
9. Александров А.А., Зарубин В.С., Зимин В.Н. Термонапряженное состояние оболочки цилиндрического криогенного бака при его заполнении // Изв. вузов. Машиностроение. 2016. № 4. С. 5.
10. Конструкционные материалы: Справочник / Под общ. ред. Б.Н. Арзамасова. М.: Машиностроение, 1990. С. 688.
11. Александров А.А., Бармин И.В., Кунис И.Д., Чугунков В.В. Особенности создания и развития криогенных систем ракетно-космических стартовых комплексов “Союз” // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2016. № 2. С. 7. <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2016-2-7-27>
12. Справочник по физико-техническим основам криогеники / Под ред. М.П. Малкова. М.: Энергоатомиздат, 1985. С. 432.
13. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1991. С. 336.
14. Алфутов Н.А., Колесников К.С. Устойчивость движения и равновесия. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. С. 252.
15. Лизин В.Т., Пяткин В.А. Проектирование тонкостенных конструкций. 3-е изд. М.: Машиностроение, 1994. С. 384.
16. Кан С.Н., Бырсан К.Е., Алифанова О.А., Бутенко Ю.И., Ингульцев В.Л. Устойчивость оболочек. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1970. С. 154.