ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2019, № 7, с. 15–19

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 533.6.013

(к 100-летию академика РАН К.С. Колесникова)

МЕХАНИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ И КОЛЕБАНИЯ БАКА С ЖИДКОСТЬЮ

© 2019 г. А. А. Пожалостин[1,*]

[1] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*

**e-mail: a.pozhalostin@mail.ru*

Поступила в редакцию 08.07.2019 г.
Принята к публикации 26.08.2019 г.

DOI: 10.1134/S0235711919070095

Среди ученых, которые использовали модель механического аналога (МА) в виде математического маятника (линейного осциллятора) в 60-годы прошлого века был академик РАН Колесников Константин Сергеевич. Кроме этого следует упомянуть также и создателей электромеханической аналогии для ракетных систем на жидком топливе – профессоров С.П. Стрелкова, Смыслова (ЦАГИ); академика РАН Моисеева Н.Н.; профессора Рабиновича Б.И. (ЦНИИМАШ), Докучаева Л.В., Шклярчука Ф.Н.

Константин Сергеевич одним из первых решил задачу о малых колебаниях идеальной жидкости в жестком цилиндрическом сосуде [1–3]. Для этой задачи он построил механический аналог в виде математического маятника. Колесников написал и издал монографии по динамике ракет, в которых использовал маятниковую модель жидкостной ракеты [2, 3].

Следует также упомянуть профессора Лампера Роберта Ефимовича (СибНИА). Он также использовал механическую модель в виде цепочки линейных осцилляторов для колебаний упругого бака с жидкостью [6]. Он, как и профессор Богоряд И.Б. (директор Института проблем механики в г. Томске) был организатором Всесоюзных научных симпозиумов по колебаниям упругих конструкций с жидкостью (Новосибирск 70-е годы прошлого века), которые в достаточной мере поддерживал К.С. Колесников, посылая на эти симпозиумы своих учеников Самодаева В.Е. и Пожалостина А.А.

Для построения механического аналога колебаний идеальной жидкости в цилиндрическом жестком баке Колесников К.С. использует постулаты: 1) равенство частот собственных колебаний исходной системы (система цилиндр – жидкость) и механического аналога (линейного осциллятора); 2) равенство кинетической энергии бака с жидкостью и МА.

Механические аналоги в случае осесимметричных колебаний упругого цилиндрического бака с жидкостью разработаны на основе представлений, изложенных в работе ученика Константина Сергеевича Пожалостина А.А. [7].

Механический аналог в этом случае это бесконечная цепочка параллельных линейных осцилляторов m_i (подкрепленные линейной жесткостью C_i). Доказано, что сумма

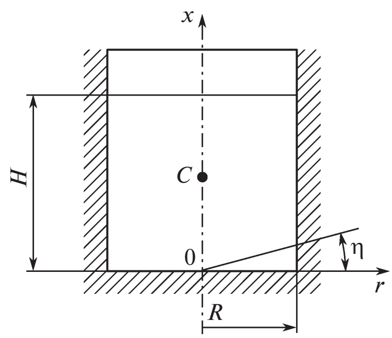

Рис. 1.

масс осцилляторов при определенной нормировке собственных функций равна физической массе жидкости в баке — m [11].

$$m = \sum_{i=1}^{\infty} m_i,$$

где i — номер тона собственных колебаний системы.

Представлениями о механической аналогии в полной мере пользуется в своих работах ученик Колесникова К.С. Темнов А.Н. В книгах К.С. Колесникова рассмотрена краевая задача о малых поперечных колебаниях абсолютно жесткого бака с идеальной несжимаемой жидкостью в случае потенциального течения и определен потенциал скорости частиц жидкости.

Используя монографию [2, 3] Колесникова К.С. рассмотрим случай малых поперечных колебаний жидкости в жестком цилиндрическом сосуде радиуса R и заполненного жидкостью на высоту H (рис. 1) [2, 3].

Задача решается в цилиндрических координатах $orx\eta$ с применением потенциалов Н.Е. Жуковского [8, 9].

Найденный К.С. Колесниковым потенциал скорости имеет вид

$$\Phi = 2R\sin\eta \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\xi_n r/R)}{(\xi_n^2 - 1)J_1(\xi_n)} \frac{\operatorname{ch}\left(\xi_n \dfrac{h+x}{R}\right)}{\operatorname{cg}\left(\xi_n \dfrac{h}{2}\right)} \lambda_n. \tag{1}$$

Функции Бесселя J_1 являются собственными для уравнения Лапласа в цилиндрических координатах [2, 4, 10].

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0. \tag{2}$$

Для первого тона колебаний системы механический аналог представлен на рис. 2, где [2, 3] параметры аналога: длины маятников, и массы m имеют вид

$$l_n = \frac{R}{\xi_n \operatorname{th}\left(\xi_n \dfrac{H}{R}\right)}, \quad m_n = \pi R^2 \rho \frac{2\xi_n}{\xi_n^2(\xi_n^2 - 1)} \operatorname{th}\left(\xi_n \frac{H}{R}\right), \tag{3}$$

n — номер тона колебаний.

На рис. 2 представлен механический аналог в случае первого тона колебаний системы, когда $n = 1$ в (3).

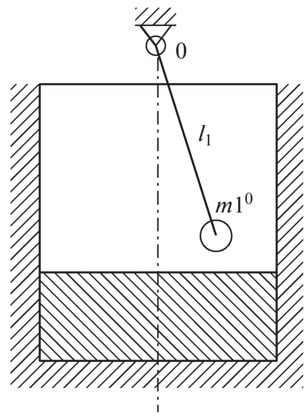

Рис. 2.

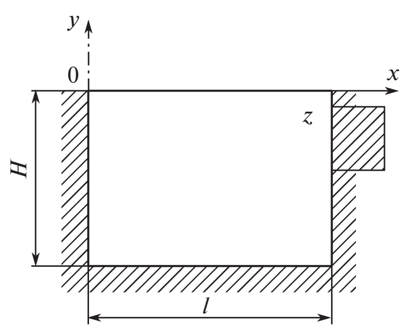

Рис. 3.

Проиллюстрируем применение подхода, связанного с понятием механического аналога к задаче об ударе прямоугольного бака с жидкостью о неподвижную опору.

Эта задача имеет практическое применение (в судоходстве) в настоящее время при движении судов нефтевозах и газоводов по северному морскому пути в случае столкновения с ледяной преградой (торосами). Задача решена при допущениях: 1) жидкость идеальная и несжимаемая, а ее движение малое и потенциальное с потенциалом скоростей $\Phi\ (x, y, z)$ (рис. 3); рассматриваются плоские колебания системы; 2) удар считается абсолютно неупругим; 3) высота столба жидкости – H, заполняет абсолютно жесткий прямоугольный сосуд; 4) движение жидкости симметрично относительно меридиональной плоскости бака.

Функция Φ [2, 4] (рис. 3) является решением уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{в} \quad \tau, \tag{4}$$

где τ – объем, занятый жидкостью. Гидродинамическое давление жидкости p равно: $p = \rho\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$, ρ – плотность жидкости.

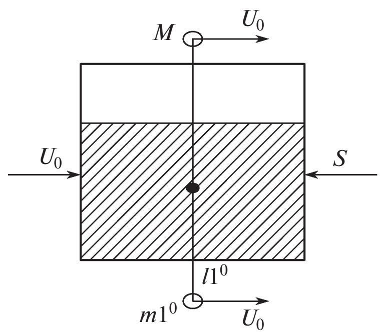

Рис. 4.

Потенциал Φ удовлетворяет граничным условиям [11],

$$\left.\frac{\partial G\Phi}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\x=l}} = 0, \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{y=-H} = 0 \tag{5}$$

и

$$g\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{y=0} + \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right|_{y=0} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{6}$$

где Σ – свободная поверхность жидкости.

Используем метод Фурье находим потенциал Φ [12]

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cos\frac{i\pi x}{l}(\mathrm{ch}\lambda_i y + \mathrm{th}\lambda_i H \mathrm{sh}\lambda_i y)\dot{\theta}(t), \tag{7}$$

где C_i – неизвестные произвольные постоянные, θ – временная функция, $\lambda_i = \frac{i\pi}{l}$, $i =$ $= 1, 2, ..., ...$.

Используя метод механического аналога (МА) [2, 3] для колебаний бака с жидкостью, учтем в задаче об ударе бака о стену только первый тон колебаний жидкости. МА представлен на рис. 4.

Считается, что до удара все элементы имеют скорость V_0; m_1^0 – масса МА; остальная масса $m_ж$ сосредоточена на днище бака [2] $M_1 + m_ж = M$ – масса сосуда M_1 с затвердевшей жидкостью $m_ж$; $m_1^0 = \frac{\rho}{2}Hl\mathrm{th}\frac{\pi H}{l}$, $l_1^0 = l/\pi th\ \pi H/l$ – приведенная длина маятника МА.

Применим две теоремы [1]: 1) об изменении количества движения $\bar{Q}$; 2) об изменении кинетического момента $\bar{K}_c$ для удара.

$$\Delta\bar{Q} = \sum_{k=1}^{N}\bar{S}_k^{(e)}(y\partial), \quad \Delta\bar{K}_c = \sum_{k=1}^{N}\bar{M}_c(S_k^{(e)}(y\partial)),$$

где $S_k^{(e)}$ – внешний ударный импульс, c – центр масс системы.

После удара $V_M = 0$; $V_{m_1^0} = l_1^0\omega_1$; ω_1 – угловая скорость маятника после удара.

В результате получим два алгебраических уравнения относительно ω_1 и S.

$$a_n\omega_1 + a_{12}S = A_1; \quad a_{21}\omega_1 + a_{22}S = A_2,$$

где $a_{11} = m_1^0 l_1^0$; $a_{12} = 1$; $a_{12} = 1$; $A_1 = (m_1^0 + M)V_0$;

$$a_{21} = M_{11}^0 l_1^0 (l_1^0 + |y_c|); \quad a_{22} = -y_c; \quad A_2 = V_0 - My_c + m_1^0(l - |y_c|).$$

Тогда

$$\omega_1 = \frac{A_1 a_{22} - A_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Угол поворота маятника после удара будет равен

$$\varphi = \frac{\omega_1}{\omega^*}\sin\omega^* t, \quad \theta(t) = l_1^0\varphi, \quad \omega^{*2} = \frac{\pi g}{l}\,\mathrm{th}\,\frac{\pi H}{l}.$$

Последнее дает возможность вычислить гидродинамическое давление на корпус бака.

Основной результат состоит в том, что давление жидкости после удара прямо пропорционально скорости движения до удара.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курс теоретической механики / Под ред. К.С. Колесникова. М., МГТУ, 2017. С. 509.
2. *Колесников К.С.* Колебания жидкости в цилиндрическом сосуде. Методическое пособие по курсу “Динамика изделий”. М., Изд. МВТУ, 1964. С. 96.
3. *Колесников К.С.* Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. С. 518.
4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., ФМ, 1966. С. 724.
5. *Лампер Р.Е.* Колебания упругой конструкции с жидкостью // VI симпозиум г. Новосибирск. 1990. С. 216.
6. *Пожалостин А.А.* Определение параметров механического аналога для осесимметричных колебаний упругого цилиндрического сосуда с жидкостью // Инж. журнал МТТ. 1966. № 5. С. 157.
7. *Лампер Р.Е.* Колебания упругих конструкций с жидкостью. НЭТИ. Новосибирск. 1973. С. 115.
8. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. С.-Петербург, 1885.
9. *Олифанов О.Н.* Баллистические ракеты – ракетоносители. М.: Дрофа. 2004. С. 512.
10. *Бужинский В.А.* Колебания тел с острыми кромками в несжимаемой маловязкой жидкости: Дис. ... док. физ. мат. наук. Королев: ЦИМАШ, 2003. С. 208
11. *Колесников К.С.* Динамика ракет. М.: Машиностроение. 2003. С. 520
12. *De Sampaio P.A.B., Moreira M.L.* A new finite element formulation for both compressible and nealy incompressible fluid dynamics // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2000. V. 32 № 1. P. 51.