
МЕХАНИКА МАШИН

УДК 539.5

РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ КОММУТАЦИОННЫХ И ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ, ВЫПОЛНЕННЫХ ИЗ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ© 2019 г. С. С. Гаврюшин^{1,2,*}, С. М. Ганыш^{1,**}¹ *Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*² *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова, г. Москва, Россия***e-mail: gss@bmstu.ru,****e-mail: s.ganysh-rk5@yandex.ru*

Поступила в редакцию 22.07.2019 г.

Принята к публикации 26.08.2019 г.

В статье разработаны математические модели для стержневых элементов, плоских и винтовых цилиндрических пружин, выполненных из сплава с эффектом памяти формы. Математическая модель материала и алгоритм расчета построены на основе дифференциальных уравнений гибких стержней и диаграмм фазовых переходов. Для учета эффекта памяти формы в систему дифференциальных уравнений аддитивно вводятся фиктивные силовые факторы, вызывающие эквивалентный эффект. Приведены результаты численного расчета прикладных задач, подтверждающие полученные практические результаты и проясняющие влияние различных параметров упругих элементов на вид упругой характеристики.

Ключевые слова: алгоритм расчета, сплав с памятью формы, большие перемещения, плоская пружина, винтовая цилиндрическая пружина, упругая характеристика

DOI: 10.1134/S0235711919070058

Материалы с памятью формы относятся к классу интеллектуальных материалов, т.е. материалов которые могут контролируемым образом изменять свои свойства в ответ на изменения окружающей среды. Подобная особенность связана с наличием таких свойств как сверхупругость и эффект памяти формы. В настоящее время коммутационные и исполнительные устройства из сплава с эффектом памяти формы широко применяются в различных областях науки и техники [1, 3]. Среди конструктивных исполнений упругих элементов из сплава с эффектом памяти формы широкое распространение получили элементы, выполненные в форме нитей, стержней, плоских и винтовых цилиндрических пружин.

Процесс деформирования упругих элементов, выполненных из сплава с эффектом памяти формы, сложен и зависит от параметров материала, текущих параметров нагружения, а также от истории нагружения, при этом на процесс деформирования влияют не только история изменения температуры и усилий, но и первоначальное фазовое состояние материала. Анализируя комплекс проблем, связанный с разработкой и применением упругих стержневых элементов из сплавов с эффектом памяти формы следует признать, что задача создания эффективных практических методов их расчета до конца не решена. Несмотря на целый ряд разработанных математических моделей для решения задач расчета и синтеза элементов из сплавов с памятью формы применяются эмпирические подходы [4, 5]. При этом, если вопросы изотермического деформирования упругих элементов достаточно проработаны, то деформирование в

условиях изменяющейся температурной нагрузки исследовано недостаточно. Вопросы проектирования упругих элементов при больших перемещениях, а также краевые задачи рассматриваются лишь в малом числе узкоспециализированных работ. Разработка методики расчета и проектирования упругих элементов из сплава с эффектом памяти формы является актуальной задачей.

Для описания особенностей сплава с эффектом памяти формы предложена модель материала на основе диаграммы фазовых переходов [3, 4], в которой внутренними переменными являются объемные доли аустенита ξ_A , ориентированного мартенсита ξ_S и неориентированного мартенсита ξ_M , связанные между собой соотношением

$$\xi_M + \xi_S + \xi_A = 1$$

Для определения фазовых долей строятся итерационные соотношения, описывающие заданный фазовый переход в соответствии с экспериментально полученной диаграммой фазовых переходов. Итерационное соотношение для эффекта мартенситной неупругости имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{If } \sigma_{k+1} > \sigma_k \\ \xi_S^{(k+1)} = \begin{cases} 0, & \text{if } \sigma_{k+1} \leq \sigma_{start}^{MS} \\ F_{MS}(\sigma_{k+1}), & \text{if } F_{MS}(\sigma_{k+1}) > \xi_S^{(k)} \text{ and } \sigma_{start}^{MS} < \sigma_{k+1} < \sigma_{finish}^{MS} \\ \xi_S^{(k)}, & \text{if } F_{MS}(\sigma_{k+1}) \leq \xi_S^{(k)} \text{ and } \sigma_{start}^{MS} < \sigma_{k+1} < \sigma_{finish}^{MS} \\ 1, & \text{if } \sigma_{k+1} \geq \sigma_{finish}^{MS} \end{cases} \\ \text{If } \sigma_{k+1} \leq \sigma_k \\ \xi_S^{(k+1)} = \xi_S^{(k)}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где σ_{start}^{SM} , σ_{finish}^{SM} – напряжения, соответствующие началу и концу процесса перехода неориентированного мартенсита в ориентированный мартенсит при изотермическом нагружении, определяемые соотношениями

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{If } T \leq M_S \\ \begin{cases} \sigma_{start}^{MS} = \sigma_S \\ \sigma_{finish}^{MS} = \sigma_f \end{cases} \\ \text{If } M_S < T < A_S \\ \begin{cases} \sigma_{start}^{MS} = \sigma_S + C_M \cdot (T - M_S) \\ \sigma_{finish}^{MS} = \sigma_f + C_M \cdot (T - M_S). \end{cases} \end{array} \right.$$

Для описания закона изменения долей (функция $F_{MS}(\sigma)$) могут быть использованы как аналитические функции (например, тригонометрические, экспоненциальные или линейные), так и дискретный набор экспериментальных данных. В случае использования, тригонометрической аппроксимации, функция $F_{MS}(\sigma)$ имеет вид

$$F_{MS}(\sigma) = 0.5 \cos[\pi(\sigma - \sigma_{finish}^{MS})(\sigma_{start}^{MS} - \sigma_{finish}^{MS})^{-1}] + 0.5.$$

Итерационное соотношение для обратного мартенситного превращения принимается в виде

$$\xi_S^{(k+1)} = \begin{cases} \xi_S^{(k)}, & \text{if } T_{k+1} \leq T_{start}^{SA}(\sigma_k) \\ \xi_S^{(k)} F_{SA}(T_{k+1}, \sigma_k) [F_{SA}(T_k, \sigma_k)]^{-1}, & \text{if } T_{start}^{SA}(\sigma_k) < T_{k+1} < T_{finish}^{SA}(\sigma_k), \\ 0, & \text{if } T_{k+1} \geq T_{finish}^{SA}(\sigma_k) \end{cases}$$

где T_{start}^{SA} , T_{finish}^{SA} – температуры, соответствующие началу и концу процесса перехода мартенсита в аустенит, определяемые соотношениями

$$\begin{cases} T_{start}^{SA}(\sigma) = A_s + \frac{\sigma}{C_A} \\ T_{finish}^{SA}(\sigma) = A_f + \frac{\sigma}{C_A} \end{cases}$$

Функция $F_{SA}(T, \sigma)$ для тригонометрической аппроксимации имеет вид

$$F_{SA}(T, \sigma) = 0.5 \cos[\pi(T - T_{start}^{SA}(\sigma))(T_{finish}^{SA}(\sigma) - T_{start}^{SA}(\sigma))^{-1}] + 0.5.$$

В статье рассматривается кручение стержней с круглым поперечным сечением, что позволяет записать физические соотношения для упрощенного плоского напряженного состояния в виде [5]

$$\begin{cases} \varepsilon = \sigma E^{-1} + \varepsilon_L \xi_S \sigma (\sigma^2 + 3\tau^2)^{-0.5} \\ \gamma = \tau G^{-1} + 3\varepsilon_L \xi_S \tau (\sigma^2 + 3\tau^2)^{-0.5} \end{cases} \quad (2)$$

здесь ε_L , – максимальная линейная деформация, соответствующая полной ориентации мартенсита. Учет эффекта памяти формы производится с помощью введения дополнительных внутренних силовых факторов, представляющих собой “результанты” эффекта памяти формы по сечению стержня. Для учета эффекта памяти формы при растяжении-сжатии вводится дополнительное усилие памяти формы, соотношения для которого имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= (N + N^{SMA})(EA)^{-1} \\ N^{SMA} &= E\varepsilon_L \int_A \xi_S(y) dA. \end{aligned}$$

Для учета эффекта памяти формы при плоском изгибе вводится дополнительный момент памяти формы изгиба. Учитывая гипотезу плоских сечений соотношения для момента памяти формы изгиба имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon &= (M_b + M_b^{SMA})(EI_b)^{-1} \\ M_b^{SMA} &= E\varepsilon_L \int_A \xi_S(y) y dA. \end{aligned}$$

Для учета эффекта памяти формы при кручении стержня круглого поперечного сечения вводится дополнительный момент памяти формы кручения. Учитывая гипотезу о неискривляемости радиуса соотношения для момента памяти формы кручения имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta \theta &= (M_t + M_t^{SMA})(GI_t)^{-1} \\ M_t^{SMA} &= 2\pi G \gamma_L \int_0^R \xi_S(r) r^2 dr. \end{aligned}$$

Дополнительные внутренние силовые факторы позволяют учитывать эффект памяти формы в известных соотношениях механики стержней. Для расчета нитей можно использовать конечно-элементное соотношение

$$\left(\frac{EA}{L}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{a^{(e)}\} = \{F^{(e)}\} + \begin{Bmatrix} -N^{SMA} \\ 0 \\ 0 \\ N^{SMA} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Для построения упругой характеристики плоской пружины при малых перемещениях справедливо соотношение

$$EI_b \frac{d^2V}{dz^2} = M_b + M_b^{SMA}.$$

Для плоской пружины при больших перемещениях справедлива система нелинейных дифференциальных уравнений [6]

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds_0} = (1 + \varepsilon_0) \cos(\vartheta) \\ \frac{dy}{ds_0} = (1 + \varepsilon_0) \sin(\vartheta) \\ \frac{d\vartheta}{ds_0} = (1 + \varepsilon_0)(M_b + M_b^{SMA})(EI_b)^{-1} + \varkappa_0 \\ \frac{dU}{ds_0} = -(1 + \varepsilon_0)q_U \\ \frac{dV}{ds_0} = -(1 + \varepsilon_0)q_V \\ \frac{dM_b}{ds_0} = -(1 + \varepsilon_0)[m + U \cos(\vartheta) - V \sin(\vartheta)] \end{cases},$$

где x, y – координаты осевой линии в глобальной системе координат, ϑ – угол поворота нормали, U, V, M – усилия и изгибающий момент, записанные в глобальной системе координат, \varkappa_0 – функция начальной кривизны осевой линии стержня, ε_0 – деформация осевой линии стержня, определяемая соотношением

$$\varepsilon_0 = \frac{U \cos \vartheta + V \sin \vartheta}{EA} + \frac{N^{SMA}}{EA}.$$

При решении геометрически линейных задач плоского изгиба для построения упругой характеристики пружины из сплава с эффектом памяти формы справедливы соотношения

$$\left(\frac{EI_b}{L^3}\right) \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \{a^{(e)}\} = \{F^{(e)}\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -M_b^{SMA} \\ 0 \\ M_b^{SMA} \end{Bmatrix}.$$

Для построения упругой характеристики винтовой плоской пружины при малых перемещениях справедливо конечно-элементное соотношение

$$\left(\frac{Gd^4}{8D^3i}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2M_t^{SMA} D^{-1} \\ 2M_t^{SMA} D^{-1} \end{Bmatrix}.$$

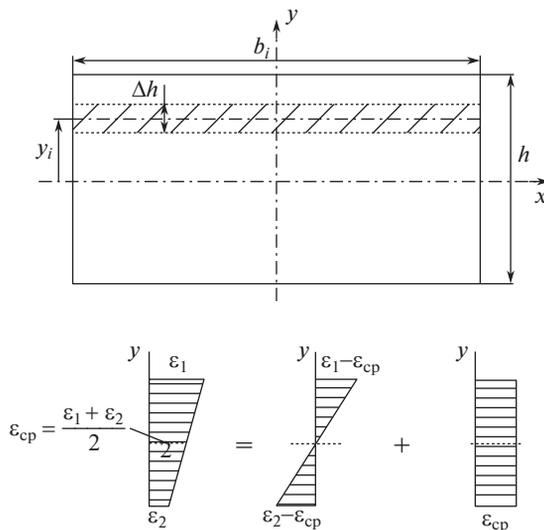


Рис. 1. Дискретизация поперечного сечения.

При больших перемещениях для расчета винтовой цилиндрической пружины справедливо соотношение

$$\begin{cases} 2EI_b \cdot (D^{-1} \cos^2(\alpha) - D_0^{-1} \cos^2(\alpha_0)) = -0.5FD \sin(\alpha) - M_b^{SMA} \\ GI_t \cdot (D^{-1} \sin(2\alpha) - D_0^{-1} \sin(2\alpha_0)) = 0.5FD \cos(\alpha) + M_t^{SMA} \\ \lambda = l \cdot (\sin(\alpha) - \sin(\alpha_0)). \end{cases}$$

Для учета эффекта изменения механических свойств материала, вызванного изменением долей мартенситной и аустенитной фаз, справедливо соотношение

$$E^{-1} = \xi_A \cdot E_A^{-1} + (1 - \xi_A) \cdot E_M^{-1}.$$

Алгоритм построения зависимостей для дополнительных внутренних силовых факторов рассмотрим на примере задачи плоского изгиба с растяжением. Для построения зависимостей момента памяти формы и усилия памяти формы от изгибающего момента и нормального усилия, сечение стержня разбивается на некоторое количество слоев (рис. 1), в пределах каждого из которых напряжения, деформации и объемные фазовые доли считаются постоянными.

Для прямоугольного поперечного сечения параметры слоя определяются соотношениями

$$\begin{cases} y_i = 0.5h(i - 0.5)n^{-1}, & \text{если } y > 0 \\ y_i = -0.5h(i - n - 0.5)n^{-1}, & \text{если } y < 0 \end{cases}$$

$$\Delta h = h(2n)^{-1},$$

где $2n$ – количество слоев, на которое разбивается поперечное сечение стержня. Для деформации в слое справедливо соотношение

$$\varepsilon_i = \varepsilon(y_i) = \Delta \varepsilon y_i + \varepsilon_0 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)y_i h^{-1} + 0.5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (3)$$

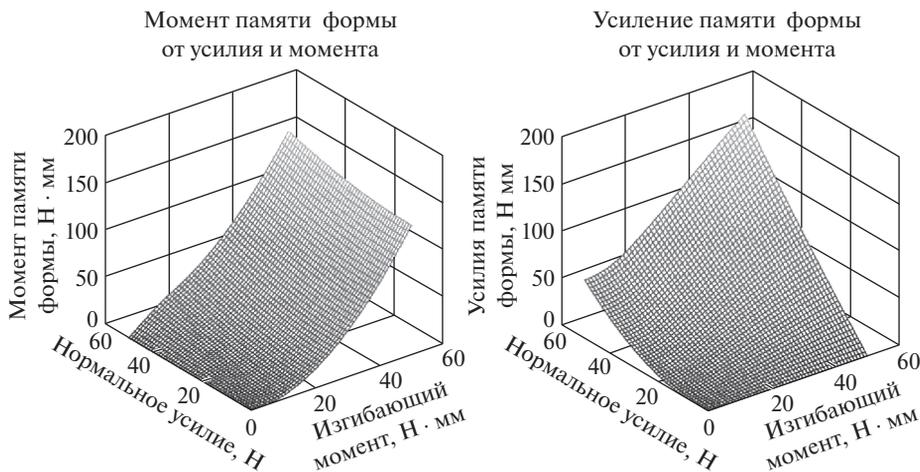


Рис. 2. Зависимости момента памяти формы и усилия памяти формы от изгибающего момента и нормального усилия.

Соотношения для дополнительных внутренних силовых факторов после дискретизации принимают вид

$$\begin{aligned}
 N^{SMA} &= E\varepsilon_L \sum_{i=1}^{2n} b_i \xi_S(y_i) \Delta y \\
 M_b^{SMA} &= E\varepsilon_L \sum_{i=1}^{2n} b_i \xi_S(y_i) \text{sign}(\varepsilon_i) y_i \cdot \Delta h \\
 N &= 0.5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) EA - N^{SMA} \\
 M_b &= h^{-1}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) EI_b - M_b^{SMA}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Для получения одной точки трехмерных зависимостей для дополнительных внутренних силовых факторов необходимо выполнить последовательность действий: задаемся значениями деформаций ε_1 и ε_2 на верхнем и нижнем слое сечения соответственно; по соотношению (3) определяем деформации в каждом слое; с помощью соотношений (1), (2) определяем величины фазовых долей ориентированного мартенсита в каждом слое $\xi_S(y_i)$; с помощью соотношений (4) определяем внутренние силовые факторы и дополнительные внутренние силовые факторы, соответствующие заданным деформациям $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

На рис. 2 представлены зависимости для дополнительных внутренних силовых факторов, полученные при: $E_M = 30\,000$ МПа, $\varepsilon_L = 0.016$, $\sigma_S = 1$ МПа, $\sigma_f = 100$ МПа, $B = 2$ мм, $H = 2$ мм.

Представленные в статье соотношения и алгоритмы легли в основу авторской программы, для расчета и проектирования упругих элементов из сплава с эффектом памяти формы.

На рис. 3 представлена упругая характеристика консольно-зашемленной по краям плоской пружины нагруженной посередине сосредоточенной силой. Рассмотрено изотермическое нагружение в зоне стабильности мартенсита. Использованы геометрические и физико-механические параметры: $L = 30$ мм, $B = 2$ мм, $H = 2$ мм,

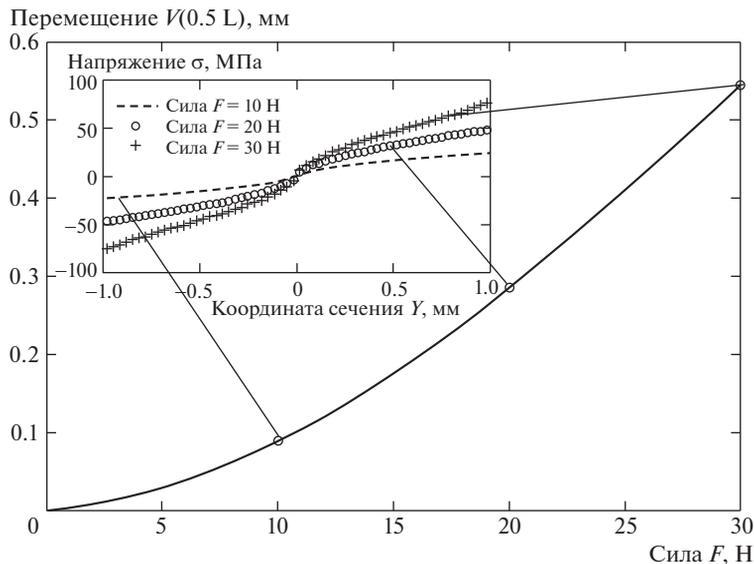


Рис. 3. Упругая характеристика.

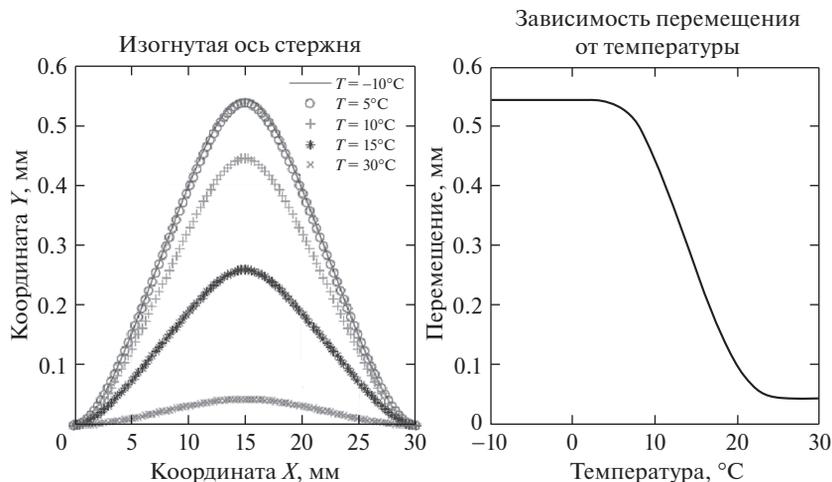


Рис. 4. Результаты расчета при нагреве плоской пружины.

$\varepsilon_L = 0.016$, $\sigma_S = 1$ МПа, $\sigma_f = 100$ МПа, $E_M = 30\,000$ МПа, $E_A = 73\,200$ МПа, $C_A = 10$ МПа/°C, $A_S = 0^\circ\text{C}$, $A_f = 20^\circ\text{C}$, $M_S = -10^\circ\text{C}$, $M_f = -20^\circ\text{C}$.

На рис. 4 представлены результаты расчета при нагреве плоской пружины при постоянной нагрузке $F = 30$ Н.

На рис. 5 представлены семейства упругих характеристик винтовой цилиндрической пружины, нагруженной растягивающей силой, при изотермическом нагружении в зоне стабильности мартенсита. Параметры пружины: $H_0 = 12$ мм, $i = 10$, параметры материала такие же, как для плоской пружины.

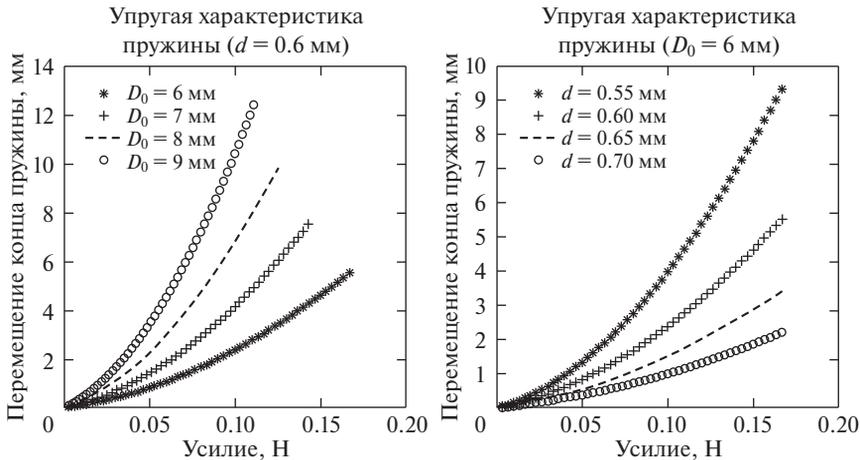


Рис. 5. Семейства упругих характеристик винтовых цилиндрических пружин.

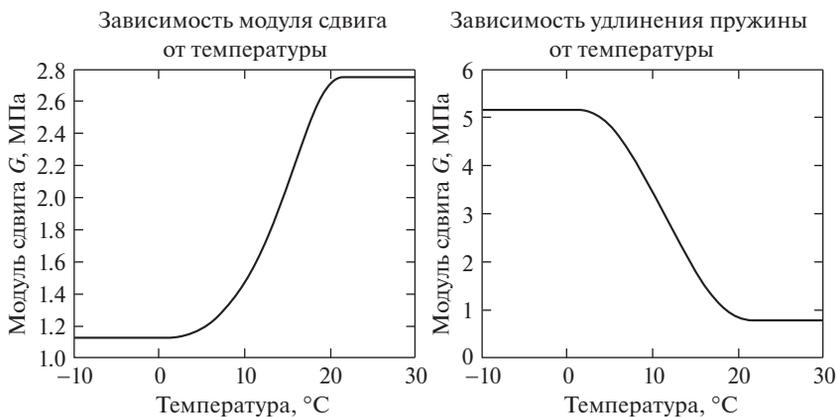


Рис. 6. Результаты расчета при нагреве винтовой цилиндрической пружины.

На рис. 6 представлены результаты расчета при нагреве винтовой цилиндрической пружины при постоянной нагрузке $F = 0.16$ Н.

Получаемые с помощью разработанной программы результаты хорошо согласуются с теоретическими и экспериментальными результатами, представленными в литературе [7–9].

Представленные в статье математическая модель и алгоритм, реализованные в виде прикладной программы, показали свою эффективность и могут быть рекомендованы для расчета и проектирования коммутационных и исполнительных устройств с элементами в форме стержней, плоских и винтовых цилиндрических пружин, изготовленных из материала с эффектом памяти формы.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jani J.M., Leary M., Subic A., Gibson M.A. A review of shape memory alloy research, applications and opportunities. *Materials & Design*. 2014. V. 56. P. 1078.

2. *Narahari P. S., Wanhill R.J.H.* Aerospace Materials and Material Technologies. Volume 1: Aerospace Materials. Springer Science + Business Media, Singapore, 2017. P. 594.
3. *Khandelwal A., Buravalla V.* Models for Shape Memory Alloy Behavior: An overview of modeling approaches. International Journal of Structural Changes in Solids . Mechanics and Applications. 2009. V. 1. P. 111.
4. *Poorasadion S., Arghavani J., Naghdabadi R., Sohrabpour S.* An improvement on the Brinson model for shape memory alloys with application to two-dimensional beam element// J. of Intelligent Material Systems and Structures. 2013. V. 25. P. 1905.
5. *Azadi B., Rajapakse R.K.N.D., Maijer D.M.* Multi-dimensional constitutive modeling of SMA during unstable pseudoelastic behavior // International Journal of Solids and Structures. 2007. 44 (20). P. 6473.
6. *Гаврюшин С.С., Барышников О.О., Борискин О.Ф.* Численный анализ элементов конструкций машин и приборов. Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. С. 480.
7. *Eshghinejad A., Elahinia M.* Exact solution for bending of shapememory alloy beams // Mech. Adv. Mat Struct. 2015. V. 22. (10). P. 829.
8. *Heidari B., Kadkhodaei M., Barati M., Karimzadeh F.* Fabrication and modeling of shape memory alloy springs. Smart Materials and Structures. 2016. V. 25 (12). P. 1.
9. *Cheng S.S., Kim Y., Desai J.P.* Modeling and characterization of shape memory alloy springs with water cooling strategy in a neurosurgical robot // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2017. V. 28 (16). P. 2167.
10. *Шишкин С.В., Махутов Н.А.* Расчет и проектирование силовых конструкций на сплавах с эффектом памяти формы. М. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. С. 412.
11. *Жечков Д.П., Гаврюшин С.С.* Расчет стержневых элементов, выполненных из сплавов с памятью формы, при больших перемещениях. Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2010. Т. 152. № 4. С. 135.
12. *Гаврюшин С.С., Ганыш С.М.* Численное моделирование винтовой цилиндрической пружины из сплава с эффектом памяти формы // Сборник: Материалы XIX международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” имени А.Г. Горшкова Московский авиационный институт. 2013. С. 62.
13. *Гаврюшин С.С., Ганыш С.М.* Простейшая математическая модель пространственного стержня, выполненного из сплава с эффектом памяти формы//Сборник: Материалы XX международного симпозиума “динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” имени А.Г. Горшкова Московский авиационный институт. 2014. С. 48.
14. *Ганыш С.М., Гаврюшин С.С.* Простейшая математическая модель пространственного стержня, выполненного из сплава с эффектом памяти формы // Инженерный вестник. 2014. № 10. С. 3.
15. *Ганыш С.М., Гаврюшин С.С.* Расчет и проектирование упругих элементов из сплавов с эффектом памяти формы // Сборник: Механика и математическое моделирование в технике. II Всероссийская научно-техническая конференция, посвященная юбилеям основателей кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сборник трудов. 2017. С. 33.
16. *Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г.* Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2010. № 3. С. 118.
17. *Мишустин И.В., Мовчан А.А.* Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2015. № 2. С. 78.