МЕХАНИКА МАШИН

УДК 534.1

РЕЗОНАНСНАЯ НАСТРОЙКА И ПАРАМЕТРЫ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ВОЗБУДИТЕЛЕМ

© 2019 г. В. К. Асташев[1,*], К. А. Пичугин[1]

[1] *Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г. Москва, Россия*
**e-mail: v_astashev@mail.ru*

Поступила в редакцию 15.05.2019 г.
Принята к публикации 08.08.2019 г.

Определяются условия резонансной настройки стержневой системы с пьезоэлектрическим возбудителем колебаний. Показано, что резонансная частота зависит как от размеров системы, так и от места расположения возбудителя. Определены основные особенности поведения системы в резонансных режимах. Приводится сравнение параметров резонансных колебаний с параметрами колебаний классического преобразователя Ланжевена.

Ключевые слова: преобразователь Ланжевена, ультразвук, пьезоэлементы, резонанс, стержневая система

DOI: 10.1134/S0235711919030027

Эффективность ультразвуковой технологической системы в значительной степени определяется величиной амплитуды колебаний инструмента. Для ее получения система возбуждается на резонансной частоте. В качестве возбудителя колебаний в настоящее время наиболее часто используются пьезокерамические элементы, размещенные между двумя стержневыми волноводами. По сравнению с магнитострикционными пьезокерамические возбудители имеют ряд преимуществ: малые размеры, простота конструкции, небольшой нагрев в процессе работы, отсутствие системы подмагничивания постоянным током. Существенный недостаток пьезовозбудителей обусловлен необходимостью создания предварительного натяга, достаточного для предотвращения раскрытия стыков в процессе работы. Возникающие предварительные статические напряжения и деформации обуславливают ограничения амплитудных значений сил и деформаций, возникающих при колебаниях. Следует отметить, что стержневые колебательные системы с пьезовозбудителем строятся, как правило, по схеме преобразователя Ланжевена, частота колебаний которого выбирается равной одной из собственных частот стержня суммарной длины, а пьезоэлементы помещают или в узле, или в пучности одной из собственных форм колебаний стержня.

В настоящей статье приведены результаты анализа математической модели ультразвуковой стержневой системы. Показано, что классическая настройка преобразователя Ланжевена не является резонансной в общепринятом понимании этого термина. Отыскиваются условия резонансной настройки, системы и определяются параметры резонансных режимов. Проведенные исследования являются отправной точкой для оптимизации системы при наличии ограничений на конструктивные и динамические параметры.

Уравнения колебаний системы. Схема рассматриваемой стержневой системы показана на рис. 1. Она состоит из двух стержней – волноводов *1* и *2*, между которыми

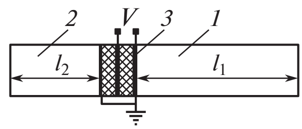

Рис. 1.

установлен жестко связанный с ними пакет *3* пьезоэлементов. Жесткая связь элементов системы на практике осуществляется с помощью резьбового соединения, свойства которого в дальнейшем не учитываются. На обкладки пьезоэлемента подается переменное напряжение $v(t) = Ve^{j\omega t}$ с амплитудой V и частотой ω ($j = \sqrt{-1}$).

Электрическое напряжение приводит к появлению заряда на обкладках пьезоэлементов и вызывает их деформацию. Механические напряжения, возникающие в материале пьезоэлемента в результате его взаимодействия со стержнями, вызывают появление дополнительного заряда на обкладках и, как следствие, дополнительную деформацию. Рассматривая далее установившиеся гармонические колебания системы, запишем уравнения, связывающие амплитуды электрических и механических колебаний [1, 2]

$$\tilde{F} = K\tilde{a} + \Phi\tilde{q}, \quad V = \Phi\tilde{a} + \tilde{q}/C, \tag{1}$$

где $\tilde{F}$, $\tilde{a}$, $\tilde{q}$ — комплексные амплитуды сил, действующих на пьезоэлемент, его деформации и заряда на его обкладках; K — жесткость пьезоэлемента в отсутствие индукции, т.е. при коротко замкнутых обкладках; C — его емкость в отсутствие механических напряжений; Φ — пьезоэлектрическая постоянная Мэсона.

Предположим, что вследствие малой толщины и высокой добротности пьезокерамической пластины ее деформацию можно считать однородной и не учитывать диссипативные и инерционные характеристики.

Используя понятие динамической податливости $L_{sr}^{(i)} = L_{sr}^{(i)}(j\omega)$, связывающей комплексные амплитуды колебаний $\tilde{a}_r^{(i)}$ сечения r стержня i ($i = 1, 2$) и силы, действующей в сечении s, запишем соотношения определяющие амплитуды колебаний крайних сечений стержней

$$\tilde{a}_0^{(1)} = -\tilde{F}L_{00}^{(1)}, \quad \tilde{a}_l^{(1)} = -\tilde{F}L_{0l}^{(1)}, \quad \tilde{a}_0^{(2)} = \tilde{F}L_{l0}^{(2)}, \quad \tilde{a}_l^{(2)} = \tilde{F}L_{ll}^{(2)}. \tag{2}$$

Координаты сечений стержней отсчитываются от их левых торцов.

Принимая во внимание неразрывность связей пьезоэлемента с волноводами, с помощью выражений (2), найдем амплитуду деформации пакета пьезоэлементов.

$$n\tilde{a} = \tilde{a}_0^{(1)} - \tilde{a}_l^{(2)} = -\tilde{F}(L_{00}^{(1)} + L_{ll}^{(2)}), \tag{3}$$

где n — число пьезоэлементов в пакете.

После подстановки соотношения (3) в уравнения (1) и решения полученной системы относительно неизвестных комплексных амплитуд силы $\tilde{F}$ и заряда $\tilde{q}$ найдем

$$\tilde{F} = \frac{VC\Phi}{1 + (L_{00}^{(1)} + L_{ll}^{(2)})K_1/n}, \quad \tilde{q} = \frac{VC[1 + (L_{00}^{(1)} + L_{ll}^{(2)})K/n]}{1 + (L_{00}^{(1)} + L_{ll}^{(2)})K_1/n}, \tag{4}$$

где $K_1 = K - C\Phi^2$ — жесткость пьезоэлемента при наличии индукции, т.е. при разомкнутых обкладках.

Заметим, что равенства (4) совпадают с полученными в [3] при $n = 1$. Кроме найденных параметров (4) рабочего состояния пьезоэлемента, нас в первую очередь, будут интересовать амплитуды его деформации и колебаний рабочего торца стержня 1. Используя соотношения (2)–(4), находим

$$\tilde{a} = -VC\Phi \frac{(L_{00}^{(1)} + L_{ll}^{(2)})/n}{1 + (L_{00}^{(1)} + L_{ll}^{(2)})K_1/n}, \quad \tilde{a}_l^{(1)} = -VC\Phi \frac{L_{0l}^{(1)}}{1 + (L_{00}^{(1)} + L_{ll}^{(2)})K_1/n}. \tag{5}$$

Для построения динамических характеристик (4), (5) воспользуемся приведенными в [3, 4] выражениями для динамических податливостей стержней

$$L_{00}^{(1)}(j\omega) = -\frac{1}{w\omega}\frac{\cos\zeta_1 - j\frac{\psi}{4\pi}(\cos\zeta_1 - \zeta_i\sin\zeta_1)}{\sin\zeta_1 - j\frac{\psi}{4\pi}\zeta_1\cos\zeta_1},$$

$$L_{0l}^{(1)}(j\omega) = -\frac{1}{w\omega}\frac{1 - j\frac{\psi}{4\pi}}{\sin\zeta_1 - j\frac{\psi}{4\pi}\zeta_1\cos\zeta_1}, \tag{6}$$

$$L_{ll}^{(2)}(j\omega) = -\frac{1}{w\omega}\frac{\cos\zeta_2 - j\frac{\psi}{4\pi}(\cos\zeta_2 - \zeta_2\sin\zeta_2)}{\sin\zeta_2 - j\frac{\psi}{4\pi}\zeta_2\cos\zeta_2}$$

где $\zeta_i = \omega l_i/c$; $c = \sqrt{E/\rho}$ – скорость звука в материале стержней ($i = 1, 2$); $w = S\sqrt{E\rho}$ – волновое сопротивление стержней; E, ρ, ψ – модуль упругости, плотность и коэффициент рассеяния материала стержней; S – площадь их поперечного сечения.

В дальнейшем, рассматривая различные возможные настройки системы, будем полагать, что суммарная длина стержней $l = l_1 + l_2 = \text{const}$, и введем в рассмотрение безразмерную величину $\zeta = \zeta_i + \zeta_2 = \omega l/c$, играющую роль безразмерной частоты возбуждения. Используя выражения (6), найдем амплитуды основных параметров (4), (5) колебаний стержневой системы

$$\tilde{F} = \frac{VC\Phi\left[\sin\zeta_1\sin\zeta_2 - j\frac{\psi}{4\pi}(\zeta_2\sin\zeta_1\cos\zeta_2 + \zeta_1\sin\zeta_2\cos\zeta_1)\right]}{\sin\zeta_1\sin\zeta_2 - \frac{K_1}{nK_0\zeta}\sin\zeta - j\frac{\psi}{4\pi}\left[(\zeta_2\sin\zeta_1\cos\zeta_2 + \zeta_1\sin\zeta_2\cos\zeta_1) + \frac{K_1}{nK_0\zeta}(\sin\zeta + \zeta\cos\zeta)\right]},$$

$$\tilde{a} = \frac{\frac{VC\Phi}{K_0\zeta}\left[\sin\zeta - j\frac{\psi}{4\pi}(\sin\zeta + \zeta\cos\zeta)\right]}{\sin\zeta_1\sin\zeta_2 - \frac{K_1}{nK_0\zeta}\sin\zeta - j\frac{\psi}{4\pi}\left[(\zeta_2\sin\zeta_1\cos\zeta_2 + \zeta_1\sin\zeta_2\cos\zeta_1) + \frac{K_1}{nK_0\zeta}(\sin\zeta + \zeta\cos\zeta)\right]}, \tag{7}$$

$$\tilde{q} = \frac{VC\left\{\sin\zeta_1\sin\zeta_2 + \frac{K}{nK_0\zeta}\sin\zeta - j\frac{\psi}{4\pi}\left[(\zeta_2\sin\zeta_1\cos\zeta_2 + \zeta_1\sin\zeta_2\cos\zeta_1) - \frac{K}{nK_0\zeta}(\sin\zeta + \zeta\cos\zeta)\right]\right\}}{\sin\zeta_1\sin\zeta_2 - \frac{K_1}{nK_0\zeta}\sin\zeta - j\frac{\psi}{4\pi}\left[(\zeta_2\sin\zeta_1\cos\zeta_2 + \zeta_1\sin\zeta_2\cos\zeta_1) - \frac{K_1}{nK_0\zeta}(\sin\zeta + \zeta\cos\zeta)\right]},$$

где $K_0 = ES/l$ – продольная жесткость стержня длиной l.

Здесь и далее все вычисления выполняются с точностью до величин первого порядка малого параметра ψ.

Амплитуда $\tilde{a}_l^{(1)}$ колебаний рабочего торца стержня *1* согласно (2) и (6) описывается выражением

$$\tilde{a}_l^{(1)} = \frac{\tilde{F}}{K_0\zeta}\frac{1 - j\dfrac{\psi}{4\pi}}{\sin\zeta_1 - j\dfrac{\psi}{4\pi}\zeta_1\cos\zeta_1}. \tag{8}$$

Выражения (7) и (8) позволяют построить полную картину динамического поведения системы. В качестве примеров рассмотрим два представительных и практически важных способа настройки.

Преобразователь Ланжевена. Выше было показано, что преобразователь Ланжевена настраивается на одну из собственных частот $\omega^{(N)} = N\pi c/l$, где $N = 1, 2,...$ – номер формы свободных колебаний стержня длиной $l = l_1 + l_2$. Этим частотам соответствуют безразмерные величины $\zeta^{(N)} = \omega^{(N)} l/c = \pi N$. Рассмотрим систему, настроенную на первую ($N = 1$) собственную частоту стержня длиной l. Здесь следует отметить, что величины ζ_1 и ζ_2 не являются независимыми. Для удобства оценки влияния места расположения пьезоэлемента в стержневой системе введем безразмерный параметр $\lambda = l_2/l$, определяющий положение пьезоэлемента в стержневой системе. Тогда, учитывая принятые выше обозначения, получим следующие соотношения

$$\zeta_1 = \omega l_1/c = (1-\lambda)\zeta, \quad \zeta_2 = \omega l_2/c = \lambda\zeta. \tag{9}$$

При отсутствии потерь в стержнях ($\psi = 0$) из соотношений (7), (8) при $\zeta = \pi$ с учетом равенств (9) находим

$$F = VC\Phi, \quad a = 0, \quad q = VC, \quad a_l^{(1)} = \frac{VC\Phi}{K_0\pi\sin[(1-\lambda)\pi]}. \tag{10}$$

Из равенств (10) видно, что амплитуды силы F, развиваемой пьезоэлементом, заряда q на его обкладках и его деформации a не зависят от соотношения длин стержней. При этом пьезоэлемент, развивая предельную для его зажатого состояния силу, совершает колебания как абсолютно жесткое тело с амплитудой смежных сечений стержней. Обращаясь к последней формуле в (9), заметим, что амплитуда $a_l^{(1)}$ рабочего торца стержня *1* существенно зависит от положения пьезоэлемента, характеризуемого параметром λ. Эта зависимость при $\psi = 0$ показана на рис. 2 тонкой линией. При отсутствии потерь амплитуда $a_l^{(1)}$ монотонно возрастает ($a_l^{(1)} \to \infty$) по мере приближения пьезоэлемента к одному из краев ($\lambda \to 0$, $\lambda \to 1$) стержневой системы. Здесь и далее расчеты проводятся при следующих параметрах системы: $V = 220$ В; $C = 7.62 \times 10^{-10}$ F; $K_0 = 1.1 \times 10^9$ N/m, $K_1 = 7.53 \times 10^{10}$ N/m, $n = 2$.

При наличии потерь в стержнях ситуация существенно меняется. Приведем формулу для вычисления комплексной амплитуды колебаний рабочего сечения стержня 1

$$\tilde{a}_l^{(1)} = -\frac{VC\Phi}{\pi K_0}\frac{\sin\lambda\pi - j\dfrac{\psi}{4\pi}[\pi(2\lambda-1)\cos\lambda\pi + 2\sin\lambda\pi]}{\sin^2\lambda\pi - j\dfrac{\psi}{4\pi}\left[\pi(3\lambda-2)\sin\lambda\pi\cos\lambda\pi - \dfrac{K_1}{nK_0}\right]}. \tag{11}$$

Зависимость амплитуды $a_l^{(1)}(\lambda) = \left|\tilde{a}_l^{(1)}(\lambda)\right|$, построенная согласно (11) при $\psi = 0.01$ показана на рис. 2 жирной линией. Видно, что при наличии диссипации энергии в преобразователе Ланжевена по мере приближения пьезоэлементов к одному из краев

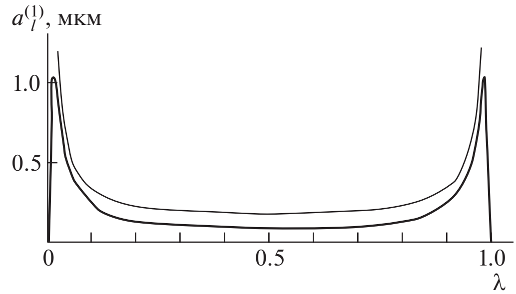

Рис. 2.

стержневой системы амплитуда $a_l^{(1)}$ возрастает до некторого значения, зависящего от величины коэффициента рассеяния ψ, а затем резко падает.

Были рассмотрены характеристики преобразователя Ланжевена при колебаниях с частотой первой формы колебаний. Рассмотрение высших форм можно выполнить аналогично. Заметим лишь, что пьезопакет, расположенный в центре стержневой системы, при возбуждении нечетных форм оказывается в узле стоячей волны, а при возбуждении четных форм – в ее пучности. В последнем случае в отсутствие потерь пьезоэлементы не испытывают нагрузки ($F = 0$) со стороны присоединенных стержней, амплитуда деформации пакета пьезоэлементов $a_3 = n\Phi CV/K_1$, а амплитуды колебаний всех концевых сечений стержней равны $a_0^{(1)} = a_l^{(1)} = a_0^{(2)} = a_l^{(2)} = a_3/2 = n\Phi CV/2K_1$.

Резонансная настройка. Обратимся к выражениям (7) и (8), описывающим амплитудно-частотные характеристики системы. Условием резонанса системы является равенство нулю действительной части знаменателя выражения. Обратим внимание на то, что все выражения (7) имеют одинаковые знаменатели. Это означает, что в системе происходит резонанс по всем обобщенным координатам. Запишем условие резонанса, учитывая соотношения (9)

$$\sin(\lambda\zeta)\sin[(1-\lambda)\zeta] - \frac{K_1}{nK_0\zeta}\sin\zeta = 0. \qquad (12)$$

Решения $\zeta_r^{(\mathrm{N})}$ трансцендентного уравнения (12) определяют спектр резонансных частот $\omega_r^{(\mathrm{N})} = \zeta_r^{(\mathrm{N})}c/l$ системы при различных расположениях пьезоэлемента. На рис. 3а показана зависимость безразмерной первой резонансной частоты $\zeta_r^{(1)}$ от параметра λ.

Теперь с помощью выражений (7), (8) с учетом (12) и (9) можно найти амплитуды резонансных колебаний по всем обобщенным координатам. Приведем выражение для расчета амплитуды $a_l^{(1)}$ резонансных колебаний рабочего торца стержня *1*

$$a_l^{(1)} = \left| j\frac{C\Phi V}{K_0\zeta_r}\frac{\dfrac{K_1}{nK_0\zeta_r}\sin\zeta_r - j\dfrac{\psi}{4\pi}\left[\cos[(1-\lambda)\zeta_r]\sin\lambda\zeta_r + \lambda\zeta_r\sin[(1-2\lambda)\zeta_r] + \dfrac{K_1}{nK_0\zeta_r}\sin\zeta_r\right]}{\dfrac{\psi}{4\pi}\sin[(1-\lambda)\zeta_r]\left\{\cos[(1-\lambda)\zeta_r]\sin\lambda\zeta_r + \lambda\zeta_r\sin[(1-2\lambda)\zeta_r] + \dfrac{K_1}{nK_0\zeta_r}(\zeta_r\cos\zeta_r + \sin\zeta_r)\right\}}\right|.$$

График зависимости амплитуд $a_l^{(1)}$ резонансных колебаний от положения пьезовозбудителя показан на рис. 3б. Сравнение этого графика с графиком на рис. 2 показывает, что резонансная настройка позволяет получать амплитуды, на порядок превышаю-

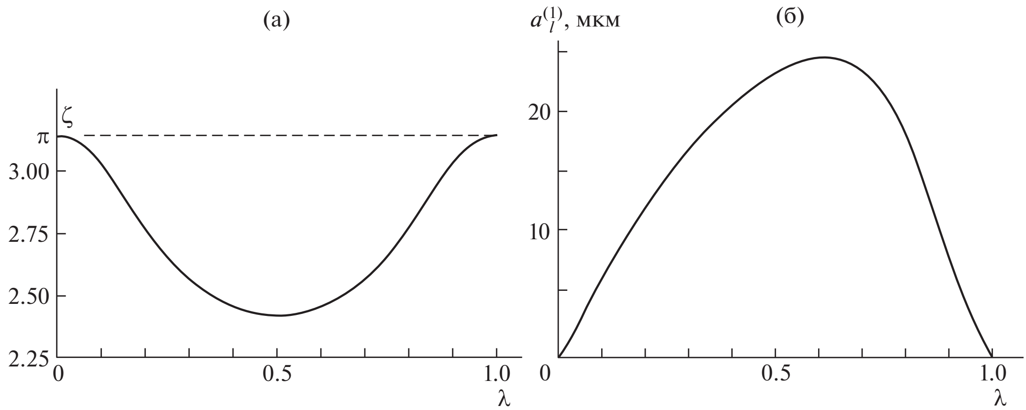

Рис. 3.

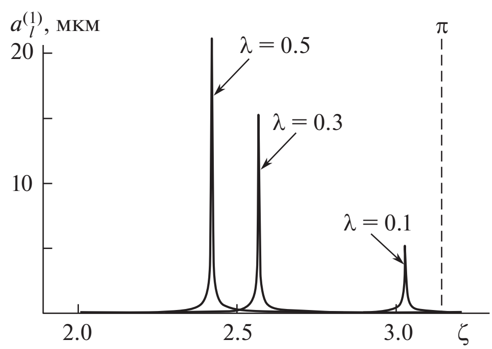

Рис. 4.

щие амплитуды при классической настройке преобразователя Ланжевена. Заметим, что столь большие амплитуды обусловлены в первую очередь резонансом пьезоэлементов и развиваемой ими силы.

На рис. 4 показаны амплитудно-частотные характеристики системы при различных положениях пьезовозбудителя. Характеристики построены при напряжении питания $V = 100$ В.

Обратим внимание на высокую добротность колебательной системы, затрудняющую практическую реализацию резонансных режимов вследствие чувствительности к малым изменениям параметров. Вместе с тем отметим, что такие режимы наблюдались в тщательно поставленных экспериментах [5], в которых для получения стабильных результатов оказалось необходимым принять меры для поддержания постоянной температуры колебательной системы.

В заключение отметим, что полученные результаты создают основу для разработки резонансных ультразвуковых систем с пьезоэлектрическими возбудителями колебаний. Результаты работы позволяют выбрать параметры как механической, так и электрической частей устройства, обеспечивающих его надежное и безопасное функционирование.

Информация о финансовой поддержке. Работа выполнена за счет гранта РНФ (проект № 19-19-00065).

Конфликт интересов: Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Харкевич А.А.* Теория электроакустических преобразователей // Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1973. С. 33–217.
2. *Римский-Корсаков А.В.* Электроакустика. М.: Связь, 1973. 272 с.
3. *Асташев В.К., Пичугин К.А.* Резонансная настройка и оптимизация параметров ультразвуковой стержневой системы с пьезокерамическим возбудителем колебаний // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. № 5. С. 5–11.
4. *Асташев В.К., Крупенин В.Л.* Нелинейная динамика ультразвуковых технологических процессов. М.: МГУП им. Ивана Федорова, 2016. 372 с.
5. *Mathieson A., Cardoni Mathieson A., Lucas M.* The influence of piezoceramic stack location on nonlinear behavior of Langevin transducers // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 2013. V. 60. № 6. P. 1126–1133.