

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 621.01

К РЕШЕНИЮ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ О ПОЛОЖЕНИЯХ l -КООРДИНАТНЫХ МЕХАНИЗМОВ РАЗЛИЧНОГО ТИПА© 2019 г. Г. В. Рашоян¹, С. М. Демидов^{1,*}, А. К. Алешин¹, А. В. Антонов¹,
С. А. Скворцов¹, К. А. Шалюхин¹¹ Институт машиноведения имени А.А. Благодрава РАН, г. Москва, Россия

*e-mail: chipd@rambler.ru

Поступила в редакцию 06.03.2019 г.

Принята к публикации 25.06.2019 г.

В статье рассматривается алгоритм решения прямой задачи о положениях для пространственных механизмов параллельной структуры с шестью линейными приводами. В зависимости от структурной схемы l -координатного механизма прямая задача решается как аналитически, так и итерационно-численно. В основе аналитического решения лежит математическая модель из системы трех уравнений прямых, проходящих через одну точку. Решена задача перехода от координат точек выходного звена механизма к его абсолютным координатам. Приведен пример решения задачи.

Ключевые слова: механизм параллельной структуры, l -координатный механизм, задача о положениях

DOI: 10.1134/S0235711919050092

Известно, что аналитическое решение задачи о положениях является эффективным средством для описания рабочей зоны выходного звена механизмов параллельной структуры, исследования траектории движения промежуточных звеньев, для оценки функциональных возможностей, а также наличия особых положений [1–12].

Одним из видов механизмов параллельной структуры являются l -координатные механизмы (рис. 1), состоящие из шести соединительных цепей с одной поступательной приводной парой и двумя сферическими неприводными парами, соединенными с основанием 1 и выходным звеном 2. Известно, что аналитический алгоритм решения прямой задачи о положениях имеет место лишь для некоторых l -координатных структурных схем.

Пусть заданы координаты точек $B_j(X'_{Bj}, Y'_{Bj}, Z'_{Bj})$ ($j = 1, 2, 3$) в неподвижной системе координат $O'X'Y'Z'$, связанной с основанием 1, и координаты точек $P_i(X_{Pi}, Y_{Pi}, Z_{Pi})$ ($i = 1, 2, 3$) в подвижной системе координат $OXYZ$, связанной с выходным звеном 2 механизма. Известны значения l -координат l_1, \dots, l_6 , длины отрезков на выходном звене: $l_{P_1P_2}$, $l_{P_2P_3}$, $l_{P_1P_3}$, длины отрезков на основании: $l_{B_1B_2}$, $l_{B_2B_3}$, $l_{B_1B_3}$. Необходимо определить положение выходного звена 2 в неподвижной системе координат $O'X'Y'Z'$.

Очевидно, что определение положения выходного звена эквивалентно определению координат точек P_i в неподвижной системе координат $O'X'Y'Z'$, где $i = 1, 2, 3$. Сначала определим положение точки B_2 в системе координат выходного звена механизма [12]. Составим систему уравнений

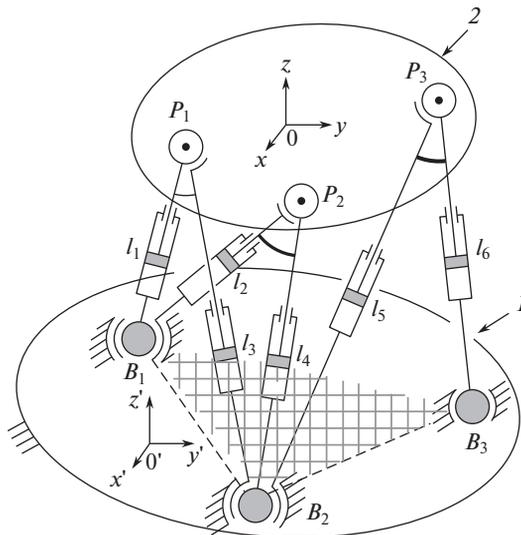


Рис. 1. l -координатный механизм, соответствующий аналитическому решению прямой задачи о положениях.

$$\begin{cases} (X_{P1} - X_{B2})^2 + (Y_{P1} - Y_{B2})^2 + (Z_{P1} - Z_{B2})^2 = l_3^2, \\ (X_{P2} - X_{B2})^2 + (Y_{P2} - Y_{B2})^2 + (Z_{P2} - Z_{B2})^2 = l_4^2, \\ (X_{P3} - X_{B2})^2 + (Y_{P3} - Y_{B2})^2 + (Z_{P3} - Z_{B2})^2 = l_5^2. \end{cases} \quad (1)$$

На примере системы (1) покажем алгоритм решения системы квадратных уравнений, идея метода ранее была предложена К.С. Арзумяняном и А.Ш. Колискором. Для этого раскроем скобки во всех трех уравнениях системы и вычтем из первого второе и третье уравнения, получим следующие соотношения

$$X_{B2}(X_{P2} - X_{P1}) + Y_{B2}(Y_{P2} - Y_{P1}) + Z_{B2}(Z_{P2} - Z_{P1}) = t_1, \quad (2)$$

$$X_{B2}(X_{P3} - X_{P1}) + Y_{B2}(Y_{P3} - Y_{P1}) + Z_{B2}(Z_{P3} - Z_{P1}) = t_2, \quad (3)$$

где:

$$t_1 = \frac{l_3^2 - l_4^2 - K_1 + K_2}{2},$$

$$t_2 = \frac{l_3^2 - l_5^2 - K_1 + K_3}{2},$$

$$K_1 = X_{P1}^2 + Y_{P1}^2 + Z_{P1}^2,$$

$$K_2 = X_{P2}^2 + Y_{P2}^2 + Z_{P2}^2,$$

$$K_3 = X_{P3}^2 + Y_{P3}^2 + Z_{P3}^2.$$

Решим уравнения (2) и (3) относительно переменных Y_{B2} и X_{B2} , выражая их через координату Z_{B2} , при этом получим:

$$Y_{B2} = K_4 + K_5 Z_{B2}, \quad (4)$$

$$X_{B2} = K_6 + K_7 Z_{B2}, \quad (5)$$

где:

$$K_4 = \frac{t2(X_{P2} - X_{P1}) - t1(X_{P3} - X_{P1})}{(X_{P2} - X_{P1})(Y_{P3} - Y_{P1}) - (Y_{P2} - Y_{P1})(X_{P3} - X_{P1})},$$

$$K_5 = \frac{(Z_{P2} - Z_{P1})(X_{P3} - X_{P1}) - (Z_{P3} - Z_{P1})(X_{P2} - X_{P1})}{(X_{P2} - X_{P1})(Y_{P3} - Y_{P1}) - (Y_{P2} - Y_{P1})(X_{P3} - X_{P1})},$$

$$K_6 = \frac{t2(Y_{P2} - Y_{P1}) - t1(Y_{P3} - Y_{P1})}{(X_{P3} - X_{P1})(Y_{P2} - Y_{P1}) - (X_{P2} - X_{P1})(Y_{P3} - Y_{P1})},$$

$$K_7 = \frac{(Z_{P2} - Z_{P1})(Y_{P3} - Y_{P1}) - (Z_{P3} - Z_{P1})(Y_{P2} - Y_{P1})}{(X_{P3} - X_{P1})(Y_{P2} - Y_{P1}) - (X_{P2} - X_{P1})(Y_{P3} - Y_{P1})}.$$

Подставляя (4) и (5) в первое уравнение системы (1), получим квадратное уравнение относительно переменной Z_{B2}

$$a_1 Z_{B2}^2 + a_2 Z_{B2} + a_3 = 0, \quad (6)$$

где:

$$a_1 = K_5^2 + K_7^2 + 1,$$

$$a_2 = 2(-X_{P1}K_7 + K_4K_5 - Y_{P1}K_5 + K_6K_7 - Z_{P1}),$$

$$a_3 = K_1 + K_4^2 + K_6^2 - 2X_{P1}K_6 - 2Y_{P1}K_4 - l_3^2.$$

Уравнение (6) имеет решение, корни которого принимают следующий вид:

$$Z_{B2} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}}{2a_1}. \quad (7)$$

Необходимо отметить, что выражение (7) имеет неоднозначное решение, связанное со знаком перед квадратным корнем. Для исключения неоднозначности предлагается рассматривать одну сборку механизма. Подставив в уравнения (4) и (5) полученный результат (7), получим остальные координаты точки B_2 .

Для определения координат точек B_1 и B_3 составим две системы уравнений, алгоритм решения, которых аналогичен (1):

$$\begin{cases} (X_{P1} - X_{B1})^2 + (Y_{P1} - Y_{B1})^2 + (Z_{P1} - Z_{B1})^2 = l_1^2, \\ (X_{P2} - X_{B1})^2 + (Y_{P2} - Y_{B1})^2 + (Z_{P2} - Z_{B1})^2 = l_2^2, \\ (X_{B2} - X_{B1})^2 + (Y_{B2} - Y_{B1})^2 + (Z_{B2} - Z_{B1})^2 = l_{B2B1}^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (X_{P3} - X_{B3})^2 + (Y_{P3} - Y_{B3})^2 + (Z_{P3} - Z_{B3})^2 = l_6^2, \\ (X_{B1} - X_{B3})^2 + (Y_{B1} - Y_{B3})^2 + (Z_{B1} - Z_{B3})^2 = l_{B1B3}^2, \\ (X_{B2} - X_{B3})^2 + (Y_{B2} - Y_{B3})^2 + (Z_{B2} - Z_{B3})^2 = l_{B2B3}^2. \end{cases}$$

Затем, имея координаты точек P_i ($i = 1, 2, 3$) в подвижной системе координат, можно рассчитать длины дополнительных отрезков l_{P1B3} , l_{P2B3} , l_{P3B1} . Это позволит подобно (1) определить координаты точек P_i в неподвижной системе координат. Таким образом, прямая задача о положениях решена.

Далее рассмотрим решение прямой задачи о положениях для l -координатного механизма, полученного из исходного [6] путем переноса выходного звена в область вне расположения приводов (рис. 2). Задача, как и ранее, сводится к определению положения выходного звена 2 механизма по заданным значениям l -координат.

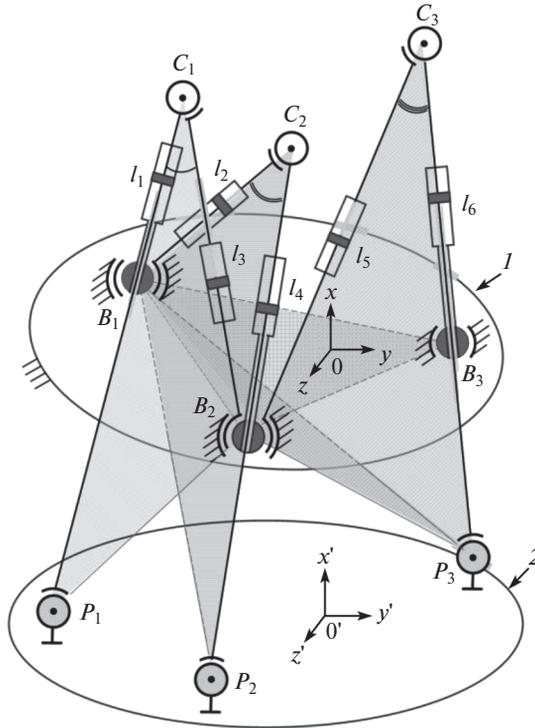


Рис. 2. Механизм с приводами, расположенными вне рабочей зоны.

Считаем заданными положения точек $B_j(X_{B_j}, Y_{B_j}, Z_{B_j})$ ($j = 1, 2, 3$) в неподвижной системе координат $OXYZ$, связанной с основанием 1, а также координаты точек $P_i(X'_{P_i}, Y'_{P_i}, Z'_{P_i})$ ($i = 1, 2, 3$) в подвижной системе координат $O'X'Y'Z'$, связанной с выходным звеном 2 механизма. Кроме того, известны значения l -координат l_1, \dots, l_6 , длины отрезков на выходном звене $l_{P_1P_2}, l_{P_2P_3}, l_{P_1P_3}$, длины отрезков на основании $l_{B_1B_2}, l_{B_2B_3}, l_{B_1B_3}$, а также длины штанг $l_{P_1C_2}, l_{P_2C_3}, l_{P_1C_3}$. Необходимо определить положение выходного звена 2 в неподвижной системе координат $OXYZ$, что эквивалентно определению координат точек $P_i(X_{P_i}, Y_{P_i}, Z_{P_i})$ в неподвижной системе координат $OXYZ$, связанной с основанием 1, где $i = 1, 2, 3$.

Для решения поставленной задачи рассмотрим треугольник $\triangle B_2C_3B_3$. Согласно теореме косинусов, длины отрезков $l_5, l_6, l_{B_2B_3}$, соответствующих сторонам данного треугольника, связаны следующим выражением:

$$l_5^2 + l_6^2 - 2l_5l_6 \cos \angle B_2C_3B_3 = l_{B_2B_3}^2,$$

откуда определим косинус угла:

$$\cos \angle B_2C_3B_3 = \frac{l_5^2 + l_6^2 - l_{B_2B_3}^2}{2l_5l_6}.$$

Далее из треугольника $\triangle B_2C_3P_3$ находим длину отрезка $l_{P_3B_2}$:

$$l_{P_3B_2} = \sqrt{l_5^2 + l_6^2 - 2l_5l_6 \cos \angle B_2C_3B_3}. \quad (8)$$

Аналогичным образом, рассматривая треугольники $\triangle B_2C_1P_1$ и $\triangle B_1C_2P_2$, подобно уравнению (8), находим длины отрезков $l_{P_1B_2}$ и $l_{P_2B_1}$

$$\begin{aligned} l_{P_1B_2} &= \sqrt{l_{P_1C_1}^2 + l_3^2 - 2l_{P_1C_1}l_3 \cos \angle P_1C_1B_2}, \\ l_{P_2B_1} &= \sqrt{l_2^2 + l_{P_2C_2}^2 - 2l_2l_{P_2C_2} \cos \angle B_1C_2B_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее в подвижной системе координат $O'X'Y'Z'$ определяем положение точки $B_2(X'_{B_2}, Y'_{B_2}, Z'_{B_2})$. Для этого составим систему из квадратных уравнений, связывающих координаты искомой точки B_2 с координатами точек P_1, P_2, P_3

$$\begin{cases} (X'_{P_1} - X'_{B_2})^2 + (Y'_{P_1} - Y'_{B_2})^2 + (Z'_{P_1} - Z'_{B_2})^2 = l_{P_1B_2}^2, \\ (X'_{P_2} - X'_{B_2})^2 + (Y'_{P_2} - Y'_{B_2})^2 + (Z'_{P_2} - Z'_{B_2})^2 = l_{P_2B_2}^2, \\ (X'_{P_3} - X'_{B_2})^2 + (Y'_{P_3} - Y'_{B_2})^2 + (Z'_{P_3} - Z'_{B_2})^2 = l_{P_3B_2}^2, \end{cases}$$

в которой значения длин отрезков $l_{P_1B_2}$ и $l_{P_3B_2}$ соответствуют выражениям (8) и (9). Определим длину отрезка $l_{P_2B_2} = l_{P_2C_2} - l_4$, в котором длина $l_{P_2C_2}$ также является заданной.

Далее определим координаты точки $C_2(X'_{C_2}, Y'_{C_2}, Z'_{C_2})$ в подвижной системе координат. Для этого сначала составим уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $P_2(X'_{P_2}, Y'_{P_2}, Z'_{P_2})$ и $B_2(X'_{B_2}, Y'_{B_2}, Z'_{B_2})$

$$\frac{X - X'_{P_2}}{X'_{B_2} - X'_{P_2}} = \frac{Y - Y'_{P_2}}{Y'_{B_2} - Y'_{P_2}} = \frac{Z - Z'_{P_2}}{Z'_{B_2} - Z'_{P_2}}. \quad (10)$$

Затем по заданным длинам отрезков $l_{P_2C_2}$ и $l_{P_2B_2}$ определим координаты точки $C_2(X'_{C_2}, Y'_{C_2}, Z'_{C_2})$, лежащей на прямой, заданной уравнением (10). Для этого составим уравнения

$$\frac{X'_{C_2} - X'_{P_2}}{X'_{B_2} - X'_{P_2}} = \frac{l_{P_2C_2}}{l_{P_2B_2}}, \quad \frac{Y'_{C_2} - Y'_{P_2}}{Y'_{B_2} - Y'_{P_2}} = \frac{l_{P_2C_2}}{l_{P_2B_2}}, \quad \frac{Z'_{C_2} - Z'_{P_2}}{Z'_{B_2} - Z'_{P_2}} = \frac{l_{P_2C_2}}{l_{P_2B_2}},$$

из которых находим координаты $X'_{C_2}, Y'_{C_2}, Z'_{C_2}$.

Определим положение точки $B_1(X'_{B_1}, Y'_{B_1}, Z'_{B_1})$ в подвижной системе координат $O'X'Y'Z'$. Для этого составим систему из квадратных уравнений связывающие координаты искомой точки B_1 с координатами точек P_1, C_2, P_2

$$\begin{cases} (X'_{B_1} - X'_{P_1})^2 + (Y'_{B_1} - Y'_{P_1})^2 + (Z'_{B_1} - Z'_{P_1})^2 = l_{P_1B_1}^2, \\ (X'_{B_1} - X'_{C_2})^2 + (Y'_{B_1} - Y'_{C_2})^2 + (Z'_{B_1} - Z'_{C_2})^2 = l_2^2, \\ (X'_{B_1} - X'_{P_2})^2 + (Y'_{B_1} - Y'_{P_2})^2 + (Z'_{B_1} - Z'_{P_2})^2 = l_{P_2B_1}^2, \end{cases}$$

где $l_{P_1B_1} = l_{P_1C_1} - l_1$.

Далее в подвижной системе координат рассмотрим тетраэдр $B_1B_2P_3B_3$ с вершиной в точке B_3 и составим систему квадратных уравнений, связывающих координаты точек основания тетраэдра B_1, B_2, P_3 с координатами его вершины в точке B_3 , при этом получим

$$\begin{cases} (X'_{B_3} - X'_{B_1})^2 + (Y'_{B_3} - Y'_{B_1})^2 + (Z'_{B_3} - Z'_{B_1})^2 = l_{B_1B_3}^2, \\ (X'_{B_3} - X'_{B_2})^2 + (Y'_{B_3} - Y'_{B_2})^2 + (Z'_{B_3} - Z'_{B_2})^2 = l_{B_2B_3}^2, \\ (X'_{B_3} - X'_{P_3})^2 + (Y'_{B_3} - Y'_{P_3})^2 + (Z'_{B_3} - Z'_{P_3})^2 = l_{P_3B_3}^2. \end{cases}$$

Длину отрезка $l_{P_3B_3}$ определим из соотношения:

$$l_{P_3B_3} = l_{P_3C_3} - l_6,$$

при этом длина $l_{P_3C_3}$ также является заданной.

Имея координаты точек B_1, B_2, B_3 в подвижной системе координат, можно определить расстояние между любыми точками $B_1, B_2, B_3, P_1, P_2, P_3$, в подвижной системе координат. В частности, определим длины следующих отрезков

$$\begin{aligned} l_{P_1B_3} &= \sqrt{(X'_{P_1} - X'_{B_3})^2 + (Y'_{P_1} - Y'_{B_3})^2 + (Z'_{P_1} - Z'_{B_3})^2}, \\ l_{P_2B_3} &= \sqrt{(X'_{P_2} - X'_{B_3})^2 + (Y'_{P_2} - Y'_{B_3})^2 + (Z'_{P_2} - Z'_{B_3})^2}, \\ l_{P_3B_1} &= \sqrt{(X'_{P_3} - X'_{B_1})^2 + (Y'_{P_3} - Y'_{B_1})^2 + (Z'_{P_3} - Z'_{B_1})^2}. \end{aligned}$$

Исходя из изложенного, для определения положений точек выходного звена $P_i(X_{P_i}, Y_{P_i}, Z_{P_i})$ ($i = 1, 2, 3$) в неподвижной системе координат $OXYZ$ рассмотрим три тетраэдра, имеющих общую плоскость основания, проходящую через точки B_1, B_2, B_3 и вершины в точках P_1, P_2, P_3 . Аналитическое решение задачи определения координат точек вершин указанных тетраэдров сводится к решению системы трех квадратных уравнений

$$\begin{cases} (X_{B_1} - X_{P_1})^2 + (Y_{B_1} - Y_{P_1})^2 + (Z_{B_1} - Z_{P_1})^2 = l_{P_1B_1}^2, \\ (X_{B_2} - X_{P_1})^2 + (Y_{B_2} - Y_{P_1})^2 + (Z_{B_2} - Z_{P_1})^2 = l_{P_1B_2}^2, \\ (X_{B_3} - X_{P_1})^2 + (Y_{B_3} - Y_{P_1})^2 + (Z_{B_3} - Z_{P_1})^2 = l_{P_1B_3}^2, \\ \\ (X_{B_1} - X_{P_2})^2 + (Y_{B_1} - Y_{P_2})^2 + (Z_{B_1} - Z_{P_2})^2 = l_{P_2B_1}^2, \\ (X_{B_2} - X_{P_2})^2 + (Y_{B_2} - Y_{P_2})^2 + (Z_{B_2} - Z_{P_2})^2 = l_{P_2B_2}^2, \\ (X_{B_3} - X_{P_2})^2 + (Y_{B_3} - Y_{P_2})^2 + (Z_{B_3} - Z_{P_2})^2 = l_{P_2B_3}^2, \\ \\ (X_{B_1} - X_{P_3})^2 + (Y_{B_1} - Y_{P_3})^2 + (Z_{B_1} - Z_{P_3})^2 = l_{P_3B_1}^2, \\ (X_{B_2} - X_{P_3})^2 + (Y_{B_2} - Y_{P_3})^2 + (Z_{B_2} - Z_{P_3})^2 = l_{P_3B_2}^2, \\ (X_{B_3} - X_{P_3})^2 + (Y_{B_3} - Y_{P_3})^2 + (Z_{B_3} - Z_{P_3})^2 = l_{P_3B_3}^2. \end{cases}$$

Алгоритм решения системы квадратных уравнений аналогичен решению системы (1). Таким образом, можно считать, что положение выходного звена, заданное координатами точек P_1, P_2, P_3 , известно.

Следует отметить, что также важной является задача определения абсолютных координат, а именно, положения центра подвижной системы координат и углов ориентации координатных осей α, β, γ .

Для перехода от декартовых координат точек к абсолютным координатам сначала определим положение центра подвижной системы координат, что сопряжено с решением следующей системы уравнений

$$\begin{cases} (X_{P_1} - X_{O'})^2 + (Y_{P_1} - Y_{O'})^2 + (Z_{P_1} - Z_{O'})^2 = l_{P_1O'}^2, \\ (X_{P_2} - X_{O'})^2 + (Y_{P_2} - Y_{O'})^2 + (Z_{P_2} - Z_{O'})^2 = l_{P_2O'}^2, \\ (X_{P_3} - X_{O'})^2 + (Y_{P_3} - Y_{O'})^2 + (Z_{P_3} - Z_{O'})^2 = l_{P_3O'}^2, \end{cases}$$

где $X_{O'}, Y_{O'}, Z_{O'}$ – искомые координаты начала O' подвижной системы координат в неподвижной системе, а $l_{P_1O'}, l_{P_2O'}, l_{P_3O'}$ – известные радиус-векторы точек P_1, P_2, P_3 в подвижной системе координат. Система уравнений решается аналогично системе (1).

Далее перенесем центр подвижной системы координат O' и совместим с центром O неподвижной системы, что позволит определить углы ориентации.

Матрица 3×3 , описывающая переход из подвижной системы к системе координат основания [6], имеет следующий вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma)\cos(\beta) & \cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\alpha) - \sin(\gamma)\cos(\alpha) & \sin(\gamma)\sin(\alpha) + \cos(\gamma)\cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\gamma)\cos(\beta) & \cos(\gamma)\cos(\alpha) + \sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\alpha) & \sin(\gamma)\cos(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\gamma)\sin(\alpha) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta)\sin(\alpha) & \cos(\beta)\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Это соответствует повороту подвижной системы вокруг оси OX на угол α , затем на угол β вокруг повернутой оси OY и на угол γ вокруг дважды повернутой оси OZ . Для определения этих углов запишем в матричном виде уравнения перехода между двумя системами координат для трех точек выходного звена, координаты которых известны и в подвижной, и неподвижной системах

$$\mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} X'_{Pi} \\ Y'_{Pi} \\ Z'_{Pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{Pi} \\ Y_{Pi} \\ Z_{Pi} \end{pmatrix}, \quad (\text{здесь и далее } i = 1, 2, 3).$$

В результате умножения матриц получим три тригонометрические уравнения с тремя неизвестными углами, всего будет девять уравнений, которые имеют вид

$$X'_{Pi} \cos(\gamma)\cos(\beta) + Y'_{Pi}(\cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\alpha) - \sin(\gamma)\cos(\alpha)) + Z'_{Pi}(\sin(\gamma)\sin(\alpha) + \cos(\gamma)\cos(\alpha)\sin(\beta)) = X_{Pi},$$

$$X'_{Pi} \sin(\gamma)\cos(\beta) + Y'_{Pi}(\cos(\gamma)\cos(\alpha) + \sin(\gamma)\sin(\beta)\sin(\alpha)) + Z'_{Pi}(\sin(\gamma)\cos(\alpha)\sin(\beta) - \cos(\gamma)\sin(\alpha)) = Y_{Pi},$$

$$-X'_{Pi} \sin(\beta) + Y'_{Pi} \cos(\beta)\sin(\alpha) + Z'_{Pi} \cos(\beta)\cos(\alpha) = Z_{Pi}.$$

Далее рассмотрим три уравнения, связывающие координаты Z_{Pi} и углы α , β , γ

$$-X'_{P1} \sin(\beta) + Y'_{P1} \cos(\beta)\sin(\alpha) + Z'_{P1} \cos(\beta)\cos(\alpha) = Z_{P1},$$

$$-X'_{P2} \sin(\beta) + Y'_{P2} \cos(\beta)\sin(\alpha) + Z'_{P2} \cos(\beta)\cos(\alpha) = Z_{P2},$$

$$-X'_{P3} \sin(\beta) + Y'_{P3} \cos(\beta)\sin(\alpha) + Z'_{P3} \cos(\beta)\cos(\alpha) = Z_{P3}.$$

Введем следующие обозначения

$$\sin(\beta) = m_1,$$

$$\cos(\beta)\sin(\alpha) = m_2,$$

$$\cos(\beta)\cos(\alpha) = m_3.$$

Тогда получим

$$\begin{pmatrix} -X'_{P1} & Y'_{P1} & Z'_{P1} \\ -X'_{P2} & Y'_{P2} & Z'_{P2} \\ -X'_{P3} & Y'_{P3} & Z'_{P3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m1 \\ m2 \\ m3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{P1} \\ Z_{P2} \\ Z_{P3} \end{pmatrix},$$

откуда находим

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X'_{P_1} & Y'_{P_1} & Z'_{P_1} \\ -X'_{P_2} & Y'_{P_2} & Z'_{P_2} \\ -X'_{P_3} & Y'_{P_3} & Z'_{P_3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Z_{P_1} \\ Z_{P_2} \\ Z_{P_3} \end{pmatrix}.$$

Рассматривая обратную матрицу, можно написать, что

$$\beta = \arcsin(m_1),$$

$$\alpha = \arcsin(m_2 / \cos(\beta)).$$

Для нахождения угла γ рассмотрим систему из трех уравнений

$$X'_{P_1} \sin(\gamma) \cos(\beta) + Y'_{P_1} (\cos(\gamma) \cos(\alpha) + \sin(\gamma) \sin(\beta) \sin(\alpha)) + \\ + Z'_{P_1} (\sin(\gamma) \cos(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\gamma) \sin(\alpha)) = Y_{P_1},$$

$$X'_{P_2} \sin(\gamma) \cos(\beta) + Y'_{P_2} (\cos(\gamma) \cos(\alpha) + \sin(\gamma) \sin(\beta) \sin(\alpha)) + \\ + Z'_{P_2} (\sin(\gamma) \cos(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\gamma) \sin(\alpha)) = Y_{P_2},$$

$$X'_{P_3} \sin(\gamma) \cos(\beta) + Y'_{P_3} (\cos(\gamma) \cos(\alpha) + \sin(\gamma) \sin(\beta) \sin(\alpha)) + \\ + Z'_{P_3} (\sin(\gamma) \cos(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\gamma) \sin(\alpha)) = Y_{P_3}.$$

Обозначим

$$\sin(\gamma) \cos(\beta) = s_1,$$

$$\cos(\gamma) \cos(\alpha) + \sin(\gamma) \sin(\beta) \sin(\alpha) = s_2,$$

$$(\sin(\gamma) \cos(\alpha) \sin(\beta) - \cos(\gamma) \sin(\alpha)) = s_3.$$

Тогда получим

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X'_{P_1} & Y'_{P_1} & Z'_{P_1} \\ X'_{P_2} & Y'_{P_2} & Z'_{P_2} \\ X'_{P_3} & Y'_{P_3} & Z'_{P_3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y_{P_1} \\ Y_{P_2} \\ Y_{P_3} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим неизвестный угол γ

$$\gamma = \arcsin(s_1 / \cos(\beta)).$$

Следует учесть, что обратная функция \arcsin на интервале $[-\pi/2; +\pi/2]$ определена однозначно.

Таким образом прямая задача о положениях решена, а также определены абсолютные координаты выходного звена механизма.

Рассмотрим пример. Известны координаты точек P_1, P_2, P_3 выходного звена в подвижной системе координат: $P'_1(1\ 0\ 0)$; $P'_2(0\ 1\ 0)$; $P'_3(0\ 0\ 1)$. По указанному алгоритму определены координаты этих точек в неподвижной системе координат

$$P_1(0.3536\ 0.6124\ -0.7071),$$

$$P_2(-0.5732\ 0.7392\ 0.3536),$$

$$P_3(0.7392\ 0.2803\ 0.6124).$$

Расчет углов ориентации подвижной системы координат в отношении неподвижной системы дает следующий результат

$$\alpha = 30.004^\circ \quad \beta = 44.99^\circ \quad \gamma = 60.003^\circ.$$

Таким образом, в данной статье приведено аналитическое решение прямой задачи о положениях для l -координатного механизма обычного вида, а также для механизма, где выходное звено и приводы расположены по разные стороны от основания. Аналитическое решение прямой задачи о положениях упрощает методику составления уравнений движения механизма, что дает преимущество при решении задач динамического управления движением [13].

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16-29-04273 офи_м).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hunt K.* Structural kinematics of in-parallel-actuated robot arms // ASME. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design. 1983. V. 105. P. 705.
2. *Merlet J.P.* Singular configurations of parallel manipulators and Grassman geometry // Intern. J. Robotic Res. 1989. V. 8. Iss. 5. P. 45.
3. *Алешин А.К., Глазунов В.А., Рашоян Г.В., Оффер Ш.* Анализ кинематических винтов, определяющих топологию сингулярных зон роботов параллельной структуры // Ж. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 4. С. 3.
4. *Алешин А.К., Глазунов В.А., Рашоян Г.В., Оффер Ш., Скворцов С.А.* Анализ элементарных перемещений манипулятора параллельной структуры с круговой направляющей на основе дифференцирования уравнения связей // Ж. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 5. С. 17.
5. *Rashoyan G.V., Shalyukhin K.A., Gaponenko E.V.* Development of structural schemes of parallel structure manipulators using screw calculus. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018. V. 327. Iss. 4.
6. Новые механизмы в современной робототехнике / Под редакцией В.А. Глазунова. М.: Техносфера. 2018. С. 314.
7. *Антонов А.В., Глазунов В.А., Алешин А.К., Рашоян Г.В., Лактионова М.М.* Кинематический анализ механизма параллельной структуры для работы в агрессивных средах // Ж. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 2. С. 3.
8. *Рашоян Г.В., Алешин А.К., Скворцов С.А., Левин С.В., Антонов А.В., Шалюхин К.А.* Задачи кинематического анализа и особых положений механизмов роботов параллельной структуры // Ж. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 4. С. 11.
9. *Ganiev R.F., Glazunov V.A., Filippov G.S.* Urgent Problems of Machine Science and Ways of Solving Them: Wave and Additive Technologies, the Machine Tool Industry, and Robot Surgery // J. of Machinery Manufacture and Reliability. 2018. V. 47. Iss. 5. P. 399.
10. *Glazunov V., Nosova N., Kheylo S., Tsarkov A.* Design and Analysis of the 6-DOF Decoupled Parallel Kinematics Mechanism // J. Mechanisms and Machine Science. 2018. V. 56. P. 125.
11. *Glazunov V.A., Borisov V.A.* Development of Parallel-Structure Mechanisms with Four Degrees of Freedom and Four Kinematic Chains // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. V. 46. Iss. 5. P. 417.
12. *Арзуманян К.С., Колискор А.Ш.* Синтез структур l -координатных систем для исследования и диагностирования промышленных роботов // Ж. Испытания, контроль и диагностирование гибких производственных систем. М.: Наука, 1988. С. 70.
13. *Siciliano B., Khatib O.* Springer Handbook of Robotics. Springer International Publishing. 2016. P. 2227.