ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2019, № 3, с. 48–55

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 62.192

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА НЕОБХОДИМОГО КОЛИЧЕСТВА ОБЪЕКТОВ И ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ РЕСУРСНЫХ ИСПЫТАНИЙ

© 2019 г.
Г. С. Садыхов

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
e-mail: gsadykhov@gmail.com

Поступила в редакцию 18.10.2017 г.
Принята к публикации 18.02.2019 г.

Доказаны формулы расчета необходимого количества объектов и продолжительности ресурсных испытаний в зависимости от оценки нижней доверительной границы усеченного среднего ресурса при заданной доверительной вероятности. Формулы расчета справедливы для любого закона распределения безотказных наработок технического объекта. Приведены примеры использования полученных результатов при организации ресурсных испытаний.

Ключевые слова: средний ресурс, безотказная наработка, ресурсные испытания, продолжительность испытаний

DOI: 10.1134/S023571191903012X

Постановка задачи. При проведении ресурсных испытаний необходимо, определить обоснованное количество однотипных объектов и найти обоснованную продолжительность испытаний этих объектов. Для решения этих вопросов используют параметрические и непараметрические методы. Параметрические методы требуют информации о виде закона распределения наработок до отказа [1–9]. Непараметрические методы позволяют оценить показатели ресурса при отсутствии информации в виде закона распределения безотказных наработок. Однако они используют информацию о классе закона распределения, например, о принадлежности объекта к классу объектов, для которых интенсивность отказов монотонно возрастает как функция времени [10–17]. Чтобы определить, к какому классу принадлежит объект, необходимо провести дополнительные исследования и испытания. В связи с этим, возникает задача, как обосновать необходимое количество объектов и продолжительность испытаний для любого закона наработок до отказа без проведения дополнительных испытаний. Решению этой задачи посвящена настоящая статья.

Усеченный средний ресурс и его точечная оценка. Введем цензурированную случайную величину $\zeta(t)$, которая равна безотказной наработке объекта z, если отказ произошел на интервале наблюдения $(0, t)$, либо продолжительности наблюдения t, если отказа у объекта не наблюдалось, т.е.

$$\zeta(t) = \begin{cases} z, & \text{если} \quad z \in (0, t) \\ t - \text{иначе}. \end{cases} \tag{1}$$

Так как первая строка непрерывна, а вторая – дискретна, то величина (1) – смешанная случайная величина.

Под усеченным средним ресурсом R_t будем понимать математическое ожидание величины (1)

$$R_t = E(\zeta(t)). \tag{2}$$

Покажем, что справедливы следующие оценки

$$R_t \le R; \quad R_t \le t, \tag{3}$$

где R – средний ресурс объекта [18].

Для этой цели установим следующую формулу

$$R_t = \int_0^t P(x)dx, \tag{4}$$

где $P(x)$ – вероятность безотказной работы объекта в течение времени x.

Функция распределения случайной величины (1) имеет вид

$$F_\zeta(x) = \begin{cases} F(x), & \text{если} \quad x < t; \\ P(x) - \text{иначе}, \end{cases} \tag{5}$$

где $F(x)$ – функция распределения безотказной наработки объекта.

Видно, что функция (5) разрывна в точке $x = t$. Согласно определению (2), имеем

$$R_t = \int_0^t xf(x)dx + tP(t), \tag{6}$$

где $f(x) = -P'(x)$ – плотность распределения безотказной наработки объекта.

Так как

$$\int_0^t xf(x)dx = -tP(t) + \int_0^t P(x)dx,$$

то, подставляя полученное в (6), получим формулу (4).

Из (4) имеем следующую формулу для среднего ресурса объекта

$$R = \lim_{t\to\infty} R_t = \int_0^\infty P(x)dx.$$

Поскольку

$$\int_0^t P(x)dx \le \int_0^\infty P(x)dx,$$

то справедлива первая оценка (3).

Вторая оценка также следует из (4) т.к. $P(x) \le 1$.

Формула (2) позволяет определить точечную оценку показателя R_t в виде

$$\hat{R}_t = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^m z_i + (n-m)t\right), \tag{7}$$

где z_i – наработка i-го отказавшего объекта на интервале наблюдения $(0, t)$ из числа m отказавших объектов на этом интервале из общего количества наблюдаемых n объектов.

Поскольку в оценку (7) входят случайные величины m и наработки z_i, то оценка может иметь смещение относительно истинного значения показателя R_t. В связи с этим, докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Точечная оценка (7) показателя R_t несмещенная, т.е. справедлива формула

$$E(\hat{R}_t) = R_t, \tag{8}$$

где $E(\cdot)$ – математическое ожидание величины, стоящей внутри скобок.

Доказательство. Согласно (7) и свойствам математического ожидания, имеем

$$E(\hat{R}_t) = \frac{1}{n}\left[E\left(\sum_{i=1}^{m} z_i\right) + E(n-m)t\right]. \tag{9}$$

Используя тождество Вальда [19], получим

$$E\left(\sum_{i=1}^{m} z_i\right) = E(m)E(z). \tag{10}$$

Поскольку под наблюдением находятся однотипные объекты, то будем считать, что законы распределения их безотказных наработок одни и те же и, следовательно,

$$E(z) = \frac{\int_0^t xf(x)dx}{F(t)}.$$

Учитывая это и формулу Бернулли [19] $E(m) = nF(t)$ в (10) находим

$$E\left(\sum_{i=1}^{m} z_i\right) = n\int_0^t xt(x)dx. \tag{11}$$

Для второго слагаемого (9) имеем

$$E(n-m)t = ntP(t). \tag{12}$$

Подставляя (11) и (12) в формулу (9), получим

$$E(\hat{R}_t) = \int_0^t xf(x)dx + tP(t).$$

Далее, используя формулу (6), находим

$$E(\hat{R}_t) = R_t,$$

что доказывает (8) и теорему 1.

Нижняя доверительная оценка усеченного среднего ресурса. При малых объемах наблюдения степень доверия к точечной оценке (7) показателя R_t крайне низка. Поэтому установим нижнюю доверительную оценку показателя (2) при заданной доверительной вероятности.

Теорема 2. Нижней доверительной оценкой усеченного среднего ресурса объекта по результатам наблюдения в течение времени t за n однотипных объектов служит величина

$$R_t^{(n)} = \hat{R}_t - \frac{t}{2}\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}}, \tag{13}$$

где p – доверительная вероятность, $(0 < p < 1)$; $\hat{R}_t$ – точечная оценка показателя (2), определенная формулой (7).

Доказательство. Для установления формулы (13) воспользуемся неравенством Сельберга [20] для случайной величины X

$$\Pr(X \le E(X) + \beta) \ge \frac{\beta^2}{\beta^2 + D(X)}, \tag{14}$$

где $D(X)$ – дисперсия X, $\beta > 0$ – произвольный параметр.

Полагая в (14) $X = \hat{R}_t$, с учетом формулы (8), получим

$$\Pr(R_t \ge \hat{R}_t - \beta) \ge \frac{\beta^2}{\beta^2 + D(\hat{R}_t)}. \tag{15}$$

Для дисперсии имеем

$$D(\hat{R}_t) = \frac{D(\zeta(t))}{n}, \tag{16}$$

где значение $\zeta(t)$ определено соотношением (1). Так как согласно свойству дисперсии

$$D(\zeta(t)) \le E\left(\zeta(t) - \frac{t}{2}\right)^2,$$

учитывая оценку

$$\zeta(t) - \frac{t}{2} \le \frac{t}{2},$$

получим

$$D(\zeta(t)) \le \frac{t^2}{4}.$$

Используя полученную оценку в (16), имеем

$$D(\hat{R}_t) \le \frac{t^2}{4n}. \tag{17}$$

Далее, учитывая (17) в (15), находим

$$\Pr(R_t \ge \hat{R}_t - \beta) \ge \frac{4n\beta^2}{4n\beta^2 + t^2}.$$

Приравняв правую часть наперед заданному значению доверительной вероятности P, $(0 < P < 1)$, получим

$$\Pr(R_t \ge \hat{R}_t - \beta) \ge P,$$

где

$$\beta = \frac{t}{2}\sqrt{\frac{P}{n(1-P)}},$$

что доказывает формулу (13) и теорему 2.

Заметим, что при $P = 0$ из формулы (13) находим

$$\hat{R}_t = R_t^{(n)}.$$

Другими словами, точечная оценка показателя (2) соответствует нулевой доверительной вероятности в нижней доверительной оценке этого показателя. Поэтому доверие к точечной оценке (7) крайне низко. Однако степень доверия повышается при больших значениях n. Для подтверждения этого докажем следующее утверждение.

Точечная оценка (7) состоятельная, т.е.

$$\hat{R}_t \xrightarrow[n\to\infty]{\text{вер.}} R_t. \tag{18}$$

Для доказательства воспользуемся неравенством Чебышева для случайной величины X [19]

$$\Pr(X - E(X) \ge \varepsilon) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \tag{19}$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число.

Полагая

$$X = \hat{R}_t$$

и используя формулу (8) и оценку (17), согласно (19), получим

$$\Pr(\left|\hat{R}_t - R_t\right| \ge \varepsilon) \le \frac{t^2}{4n\varepsilon^2}.$$

Откуда найдем

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(\left|\hat{R}_t - R_t\right| \ge \varepsilon) = 0,$$

Другими словами, каково бы ни было заданное положительное число ε справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(\left|\hat{R}_t - R_t\right| < \varepsilon) = 1,$$

т.е. точечная оценка $\hat{R}_t$ при $n \to \infty$ сходится по вероятности к показателю R_t, что доказывает соотношение (18).

Непараметрический метод расчета необходимого количества объектов для проведения ресурсных испытаний. Формула (13) для нижней доверительной оценки показателя (2) доказана в предположении, что заранее задано количество однотипных объектов n, наблюдаемых в течение времени t. Теперь будем считать, что, напротив, необходимо найти минимальное количество однотипных объектов n_0 для проведения ресурсных испытаний в течение времени t при заданной оценке нижней доверительной границы показателя (2). Для этого докажем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $R_t^{(n)}$ — нижняя доверительная граница показателя R_t при заданной доверительной вероятности P, $(0 < P < 1)$ имеет следующую оценку

$$R_t^{(n)} \ge r, \tag{20}$$

где $r < t$. Тогда минимальное количество однотипных объектов, необходимых для проведения ресурсных испытаний в течение времени t, рассчитывается по формуле

$$n_0 = \begin{cases} \left\{ m\dfrac{p}{4(1-p)}\left(\dfrac{t}{t-r}\right)^2, \quad \text{если правая часть – целое число;} \right. \\ \left[\dfrac{p}{4(1-p)}\left(\dfrac{t}{t-r}\right)^2\right] + 1, \quad \text{если 1-я строка – нецелое число,} \end{cases} \tag{21}$$

Здесь $[\cdot]$ — обозначение целой части выражения, стоящего внутри скобок.

Доказательство. Воспользуемся формулой (13), из которой найдем

$$n = \frac{p}{4(1-p)}\left(\frac{t}{\hat{R}_t - R_t^{(n)}}\right)^2.$$

Учитывая оценку (20) и вторую оценку (3), получим

$$n \geq \frac{p}{4(1-p)}\left(\frac{t}{t-r}\right)^2.$$

Отсюда найдем искомую формулу (21) расчета минимального количества однотипных объектов n_0, необходимых для проведения ресурсных испытаний в течение времени t. Доказанная формула (21) непараметрическая и, следовательно, пригодна для любого закона распределения безотказных наработок объекта.

Из формулы (21) следует, что при небольших уровнях доверительной вероятности P количество объектов, планируемых для проведения ресурсных испытаний, сокращается и, напротив, возрастает для значений вероятностей P, близких к единице.

Аналогичный вывод можно сделать и об объеме планируемых испытаний в зависимости от принимаемых значений r: минимальное количество объектов для проведения ресурсных испытаний мало при малых значениях r и, напротив, возрастает при $r \to t$.

Отметим, что минимальное количество объектов, согласно (21), сокращается с увеличением длительности t и увеличивается при его уменьшении.

Все сделанные выводы из формулы (21) хорошо согласуются с логикой проведения ресурсных испытаний.

Пример. Рассчитать минимальное количество однотипных объектов для проведения ресурсных испытаний в течение 6000 ч при условии, что нижняя доверительная оценка усеченного среднего ресурса при доверительной вероятности, равной 0.9, не менее 3000 ч.

Решение. Согласно условиям примера имеем $t = 6000$ ч, $P = 0.9$, $r = 3000$ ч.

Тогда

$$\frac{P}{4(1-P)}\left(\frac{t}{t-r}\right)^2 = \frac{0.9}{4(1-0.9)}\left(\frac{6000}{6000-3000}\right)^2 = 9.$$

Следовательно, минимальное количество однотипных объектов, необходимых для проведения ресурсных испытаний в течении времени 6000 ч, согласно (21), равно 9.

Непараметрический метод расчета продолжительности проведения ресурсных испытаний. При организации ресурсных испытаний важную роль играет обоснованное определение длительности испытаний. В связи с этим, докажем следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $R_t^{(n)}$ – нижняя доверительная оценка показателя R_t при заданной доверительной вероятности P, $(0 < P < 1)$ удовлетворяет условию (20). Тогда минимальная длительность проведения ресурсных испытаний n однотипных объектов рассчитывается по формуле

$$t_0 = \frac{r}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{n(1-p)}}}, \tag{22}$$

где

$$n > \frac{P}{4(1-P)}. \tag{23}$$

Доказательство. Из формулы (13) получим

$$\hat{R}_t - R_t^{(n)} = \frac{t}{2}\sqrt{\frac{P}{n(1-P)}}.$$

Используя вторую оценку (3) и оценку (20), имеем

$$t - r \geq \frac{t}{2}\sqrt{\frac{P}{n(1-P)}}.$$

Следовательно,

$$t\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{n(1-P)}}\right) \geq r.$$

Так как при условии (23) второй сомножитель положителен, то

$$t > \frac{r}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{n(1-P)}}},$$

что доказывает формулу (22) и тем самым теорему 4.

Доказанный метод расчета непараметрический и, следовательно, пригоден для любого закона распределения безотказных наработок объекта.

Нетрудно убедиться в том, что производная по переменному P от правой части (22) положительна. Следовательно, длительность ресурсных испытаний увеличивается с увеличением значений вероятности $P \neq 1$ и напротив, длительность испытаний уменьшается с уменьшением значений $P \neq 0$.

Кроме того, из формулы (22) видно, что минимальная длительность проведения ресурсных испытаний увеличивается с уменьшением количества однотипных объектов n и, напротив, длительность испытаний уменьшается с увеличением n.

Пример. Рассчитать минимально необходимую продолжительность проведения ресурсных испытаний девяти однотипных объектов при условии, что нижняя доверительная оценка показателя R_t при доверительной вероятности 0.9 не менее 1500 ч.

Решение. Согласно условиям примера имеем $n = 9$, $P = 0.9$, $r = 1500$ ч.

Так как

$$9 > \frac{0.9}{4(1-0.9)},$$

то выполнено условие (23).

Тогда, согласно формуле (22), получим

$$t_0 = \frac{1500}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{0.9}{9(1-0.9)}}} = 3000 \text{ ч.}$$

Следовательно, минимально необходимая продолжительность проведения ресурсных испытаний девяти однотипных объектов равна 3000 ч.

Выводы. Для проведения ресурсных испытаний однотипных объектов, законы распределения безотказных наработок которых произвольны, доказаны непараметрические методы расчета необходимого количество объектов и продолжительности испытаний в зависимости от оценки нижней доверительной границы усеченного среднего ресурса при заданной доверительной вероятности.

Информация о финансовой поддержке. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 07-08-00574-а и № 10-08-00607-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Судаков Р.С.* Испытания систем: выбор объемов и продолжительности. М.: Машиностроение, 1988, 445 с.
2. *Переверзев Е.С.* Надежность и испытания технических систем. Киев: Наукова думка, 2009, 328 с.
3. *Karlin S., Studden W.J.* Tchebycheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics. N.Y.: Wiley and Sons, 1970, 568 p.
4. *Гласко А.В., Садыхова Л.Г.* Определение минимального объема выборки респондентов для проведения социологического исследования // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. № 7. С. 116–124.
5. *Садыхов Г.С., Савченко В.П.* Зависимость показателей ресурса от характеристик его расходования // Доклады РАН. 1998. Т. 361. № 2. С. 189–191.
6. *Садыхов Г.С., Савченко В.П., Сидняев Н.И.* Модели и методы оценки остаточного ресурса изделий радиоэлектроники. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, 382 с.
7. *Баранов Н.А., Турчак Л.И.* Методы анализа функциональной безопасности сложных технических систем. М.: ВЦ РАН, 2006. 186 с.
8. *Sadykhov G.S.* Technical Condition Control Calculation for Hazardous Industrial Facilities //Journal of Machinery Manufactures and Reliability. 2014. V. 43. Issue 4. P 327–332.
9. *Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Европин С.В.* Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления //Известия вузов. Машиностроение. 2013. № 11. С. 3–11.
10. *Gamiz M.Z., Roman. Y.G.* Non-parametric Estimation of the Availability in a General Repairable System //Reliability Engineering and System Safety. 2008. V. 93. Issue 8. P. 1188–1196.
11. *Sadykhov G.S., Babaev I.A.* Computations of the Least Number of Objects Necessary for the Cyclical Reliability Testing// Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2016. V. 4. № 3. P. 239–246.
12. *Беляев Ю.К.* Непараметрические методы в задачах обработки результатов испытаний и эксплуатации. М.: Знание. 1984. 65 с.
13. *Садыхов Г.С., Некрасова О.В.* Непараметрические и предельные оценки длительности безопасного срока эксплуатации техногенно-опасных объектов // Тр. Ин-та системного анализа РАН. 2010. Т. 53. Вып. 14. С. 191–198.
14. *Садыхов Г.С., Елисеева О.В., Бабаев И.А.* Средняя наработка до критического отказа техногенно-опасного объекта: предельные и непараметрические оценки // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. № 3. С. 37–46.
15. *Sadykhov G.S.* Average Number of Failure-Free Operations up to Critical Failure of Technologically Dangerous Facility: Calculation, Limit and Non- parametric Estimates //Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2013. V. 43. № 1. P. 81–88.
16. *Садыхов Г.С., Савченко В.П.* Средняя доля остаточного ресурса и ее непараметрические оценки // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. М.: Вычислительный центр РАН. Вып. 1. 2005. С. 65–72.
17. *Sadykhov G.S., Babaev I.A.* Non-parametric Assessment and Limiting Probability Values of the Hazardous and Safe States of a Technogenic-Hazardous Object //Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2015. V. 44. № 3. P. 298–304.
18. ГОСТ Р 27.002, 2009. Надежность в технике. Термины и определения. М.: Стандартинформ. 2011. 32 с.
19. *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности и их статистический анализ. М.: URSS. 2013. 584 с.
20. *Selberg H.L.* On an Inequality in Mathematical Statistic // Norsk. Mat. Tidsskr. 2005. 24. P. 1–12.